

一种磁性并联低刚度隔振器

董光旭, 张希农, 罗亚军, 严 博

(西安交通大学 航天航空学院

机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

摘 要: 为了能够抑制低频微幅振动, 提出了一种磁性并联低刚度隔振器, 其由固支的承载梁和磁性弹簧并联构成。其中, 磁性弹簧由 4 个永磁体对组成, 每个永磁体对中的两块永磁体相吸配置, 并在梁上对称均布; 利用等效电流法对永磁体进行建模, 根据安培定律给出了永磁体之间磁力的计算表达式, 最后通过曲线拟合得到了其近似表达式; 分析讨论了梁的等效刚度计算方法, 进而得到了所提出的隔振系统的等效刚度计算方法; 在不考虑系统非线性影响时, 对该隔振系统进行了隔振特性分析及数值仿真。结果表明: 与传统的线性隔振器相比, 该隔振器能够有效地隔离低频振动, 降低隔振系统的固有频率, 从而拓宽了隔振器的隔振频带, 并改善了系统的阻尼特性, 有效地降低了共振区域的共振峰值。

关 键 词: 负刚度; 隔振; 磁力; 振动控制; 力传递率

中图分类号: V214.4⁺2; V214.3⁺3

文献标志码: A

A parallel magnetic low stiffness vibration isolator

DONG Guang-xu, ZHANG Xi-nong, LUO Ya-jun, YAN Bo

(State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures,

School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to suppress the low frequency micro-vibration, a parallel magnetic low stiffness isolator consisting of the carrier beam with ends clamped and a magnetic spring was proposed. The magnetic spring was constructed by four permanent magnet pairs, furthermore, those magnets of each magnet pair were assigned in attractive interaction and symmetrically distributed on the surface of the beam. The equivalent current method was employed to establish the model of permanent magnet, and then the magnetic force calculation between two permanent magnets was developed according to Ampere's force law. Finally, the approximate expression of the magnetic force was obtained by curve fitting. The calculation method of equivalent stiffness of the proposed isolation system was acquired based on the analysis of the equivalent stiffness of beam. By ignoring the nonlinear effects of the isolator, the isolation characteristic of the isolator was analyzed by numerical simulation. Results demonstrate that, compared with the traditional vibration isolator, the isolator discussed can effectively isolate the low frequency vibration of the structure. The natural frequency of the system can be reduced. It not only broadens the bandwidth of the isolator, but also improves the damping characteristics of the system; moreover, the peak of resonance is attenuated greatly.

Key words: negative stiffness; vibration isolation; magnetic force;
vibration control; force transmissibility

收稿日期: 2014-09-20

基金项目: 国家自然科学基金(11172225)

作者简介: 董光旭(1988—), 男, 安徽合肥人, 博士生, 主要从事复杂机电系统动力学与控制方面的研究。

随着实际生产对振动环境要求的提高,尤其是精密工程、航空航天工程等领域的发展,对隔离由外界环境引起的振动提出了越来越高的要求,被动式隔振技术作为一种振动抑制手段在实际工程应用中起到了越来越重要的作用.由线性隔振理论可知,传统的线性隔振系统在外界激励频率大于隔振系统固有频率的 $\sqrt{2}$ 倍时,隔振系统才具有隔振效果;因此,线性隔振系统通常只对中、高频带范围内的振动具有良好的抑制效果;然而,对于低频区域的微幅振动往往难以有效隔离^[1].为了能够拓宽隔振频带,隔离低频振动,通常采用两种方法:一是减小隔振系统的刚度;二是增大隔振系统的承载质量.对于传统的线性隔振系统而言,减小系统的刚度会导致系统在相同的负载条件下,静变形增大,进而降低了系统的稳定性;同时,通过增大隔振质量来降低系统固有频率的能力也有限.因此,由正、负刚度元件并联构成的具有低频隔振性能的高静态-低动态刚度隔振器得到了广泛讨论.

近些年,国内外研究人员对具有低频隔振性能的被动式隔振器开展了一系列的研究,如准零刚度隔振器以及具有高静态-低动态刚度的隔振机构;它们是在线性隔振理论的基础上,通过引入负刚度元件与正刚度元件并联来降低系统的固有频率,实现低频隔振.对于负刚度弹性机构的实现问题,很多学者给予了广泛的关注.许茂等^[2]采用有限元分析了轴向受压细长杆件产生负刚度的典型模型;彭献等在文献^[3]中讨论了含有负刚度弹簧隔振系统的隔振原理,并提出一种由2根等长水平杆和4根等长斜杆以及1根拉簧构成的负刚度机构;路纯红等^[4]设计出一种采用连杆负刚度机构与正刚度弹簧并联的超低频隔振器;Carrella等^[5-6]采用两个斜压弹簧为被隔振物体在竖直方

向提供负刚度,并将所讨论的隔振系统简化为杜芬系统进行了求解,分析系统的隔振特性. Zhou 和 Liu^[7]采用梁弹簧与由电磁体和永磁体构成的磁性弹簧并联,进行了被动、半主动控制. Le 等^[8]通过水平弹簧与斜杆相连来为系统在运动方向提供负刚度;刘兴天等^[9]采用屈曲欧拉梁产生负刚度并与线性隔振器并联,设计了一种准零刚度隔振器.由于磁性结构之间的相互作用,既可以产生正刚度也可以产生负刚度. Carrella 等^[10]将3个永磁体相吸配置,每两个永磁体之间加一个弹簧来获得高静态-低动态刚度隔振特性. Xu 等^[11]采用永磁体相斥的特性并与斜杆串联来为系统提供负刚度.

本文提出一种由磁性弹簧与梁结构并联构成的低刚度隔振器;磁性弹簧为结构提供负刚度,梁在横向振动中作为隔振系统的正刚度承载元件;在平衡位置附近由磁性弹簧对正刚度机构进行刚度调节,降低隔振物体在平衡位置附近的动刚度,同时使系统保持应有的承载能力,进而降低隔振系统的固有频率,拓宽隔振频带.

1 低刚度隔振器模型

图1为本文所设计的低刚度隔振系统,图中 $F\cos\omega t$ 表示激励.该隔振机构由矩形截面的铝梁与由4个永磁体对①,②,③,④构成的磁性弹簧并联组成;完全相同的4个永磁体对对称安装在铝梁的左右两边,每个永磁体对中的两块相同的长方体永磁体相互吸引配置,其中一块固定,另一块黏贴在铝梁上.铝梁两端固定,其长为 L ,宽为 b ,厚度为 h .永磁体材料采用钕铁硼,其剩余磁感应强度为 B_r .黏贴在铝梁上的磁体位置分别为 L_1 和 $L_2=L-L_1$,随铝梁一起做1阶往复运动.起始处于静平衡状态,每对磁体之间的初始距离为 L_3 .物体固定在梁的中点处.这里仅考虑铝梁在

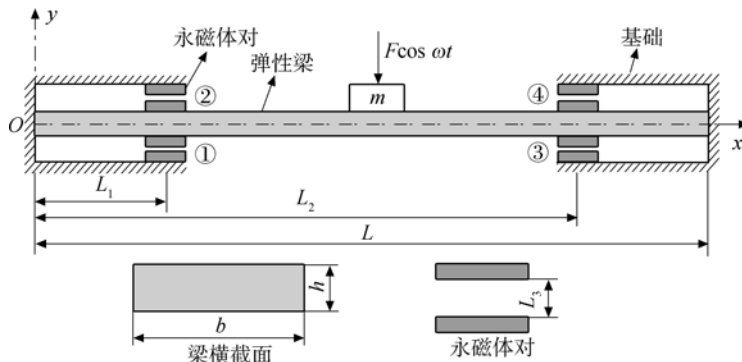


图1 低刚度隔振器模型

Fig. 1 Model of the low stiffness vibration isolator

具有1阶同步运动状态下该隔振系统的动力学特性,并作出如下假设:

- 1) 忽略铝梁的非线性影响,铝梁中点处的横向刚度采用其等效静刚度^[12];
- 2) 黏贴在铝梁上的永磁体相对于铝梁尺寸较小,忽略其对铝梁质量和刚度的影响;
- 3) 当隔振物体的质量较小时,忽略由物体重力引起的铝梁静挠度;
- 4) 只考虑每个磁体对中两块永磁体之间的相互作用,忽略4个永磁体对之间的相互影响。

本文所考虑的隔振质量 $m=0.3\text{ kg}$, 铝梁和永磁体的设计参数如表1和表2所示。

表1 铝梁参数

Table 1 Physical parameters of the aluminum beam

长度/m	宽度/m	厚度/m	弹性模量/GPa
0.2	0.02	0.001	68.9

表2 永磁体结构参数

Table 2 Structure parameters of permanent magnet

长度/m	宽度/m	厚度/m	剩余磁感应强度/T
0.015	0.01	0.005	1.17

1.1 永磁体建模

针对图1中所示的隔振系统,在进行动力学分析前,首先要对永磁体进行建模.本文采用等效电流法对永磁体产生的磁场进行分析,并根据安培定律推导出完全相同且同轴配置的两块长方体永磁体间的磁力计算表达式;最后,通过数据拟合给出其近似表达式^[13-14].这里先分析一块永磁体在空间任一点 R 产生的磁感应强度,永磁体模型如图2所示。

永磁体长度为 a_1 , 宽度为 b_1 , 厚度为 c_1 , 并沿

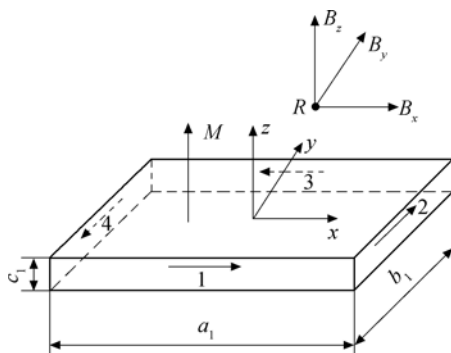


图2 永磁体建模

Fig. 2 Permanent magnet modeling

z 轴方向均匀磁化,磁化强度为 M ;磁化强度与剩余磁感应强度之间的关系为 $M = B_r / \mu_0$, 其中 μ_0 为真空磁导率.根据分子电流假设^[15],永磁体的磁矩可表示成由体电流和面电流构成。

体电流密度可表示为

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1)$$

面电流密度可表示为

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n \quad (2)$$

式中 $\mathbf{e}_n$ 为磁体表面的外法线方向。

由于永磁体是均匀磁化的,由式(1)可知,永磁体的体电流密度为零;同时,由于磁化方向沿 z 方向,根据式(2)可知永磁体的上、下表面的面电流密度为零,只在永磁体的4个侧面(即侧面1、侧面2、侧面3、侧面4)上存在面电流.因此,永磁体4个侧面上的面电流在空间任意一点 $R(x_R, y_R, z_R)$ 处产生的磁感应强度可以表示为

$$\mathbf{B}_R = \sum_{i=1}^4 B_{ix} \mathbf{i} + \sum_{i=1}^4 B_{iy} \mathbf{j} + \sum_{i=1}^4 B_{iz} \mathbf{k} \quad (3)$$

式中 $B_{ix}, B_{iy}, B_{iz} (i=1, 2, 3, 4)$ 表示永磁体的第 i 个侧面产生的磁感应强度沿坐标轴方向的分量.根据毕奥-沙伐定律^[15],侧面上的电流元在空间任意一点处产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (4)$$

式中 $Id\mathbf{l}$ 表示侧面上的电流元; $\mathbf{r}$ 表示从电流元指向点 R 的矢量。

侧面1上位置 $(x, -b_1/2, z)$ 处的电流元 $Id\mathbf{l} = k_m dx dz \mathbf{i}$ 指向 $R(x_R, y_R, z_R)$ 点的矢量为

$$\mathbf{r} = (x_R - x) \mathbf{i} + (y_R + b_1/2) \mathbf{j} + (z_R - z) \mathbf{k} \quad (5)$$

由式(4),侧面1在点 R 处产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k_m \mathbf{i} \times [(x_R - x) \mathbf{i} + (y_R + b_1/2) \mathbf{j} + (z_R - z) \mathbf{k}]}{[(x_R - x)^2 + (y_R + b_1/2)^2 + (z_R - z)^2]^{3/2}} \cdot dx dz \quad (6)$$

将式(6)在侧面1上进行面积分,可得侧面1上的面电流在点 R 处产生的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 沿坐标轴方向分量为

$$B_{1x} = 0 \text{ T} \quad (7)$$

$$B_{1y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{-c_1-c_1/2}^0 \int_{-a_1-a_1/2}^{a_1/2} \frac{k_m (z_R - z)}{[(x_R - x)^2 + (y_R + b_1/2)^2 + (z_R - z)^2]^{3/2}} \cdot dx dz \quad (8)$$

$$B_{1z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{-c_1-a_1/2}^0 \int_{-c_1-a_1/2}^{a_1/2} \frac{k_m(y_R + b/2)}{|(x_R - x)^2 + (y_R + b/2)^2 + (z_R - z)^2|^{3/2}} dx dz \quad (9)$$

同理,可得侧面2,3,4在R点处产生的磁感应强度沿坐标轴方向的分量.将永磁体4个侧面在点R处产生磁感应强度沿坐标轴的分量代入式(3)可以得到永磁体在R点产生的磁感应强度 $\mathbf{B}_R$ 为

$$\mathbf{B}_R = B_{Rx}\mathbf{i} + B_{Ry}\mathbf{j} + B_{Rz}\mathbf{k} \quad (10)$$

1.2 两块永磁体之间的磁力分析^[15-16]

永磁体对模型如图3所示.两块完全相同的永磁体,其长为 a_1 ,宽为 b_1 ,厚度为 c_1 .两块永磁体同轴配置,磁体间距离为 z_0 .由上文对永磁体在空间中任意一点产生的磁感应强度的分析,本节中两块永磁体间磁力为下面永磁体对上面永磁体的4个侧面即侧面1'、侧面2'、侧面3'、侧面4'所产生的磁力的代数和.

由于对称性,磁体间沿 x 轴和沿 y 轴方向的磁力分量相互抵消,只有沿 z 方向的作用力.

1) 侧面1'受到下面永磁体沿 z 方向的排斥力-下面永磁体产生磁感应强度的 $B_y\mathbf{j}$ 分量起作用;

2) 侧面2'受到下面永磁体沿 z 方向的吸引力-下面永磁体产生磁感应强度的 $B_x\mathbf{i}$ 分量起作用;

$$\mathbf{F}_{1'} = -\frac{\mu_0 M_1^2}{4\pi} \cdot \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \int_{z_0}^{z_0+c_1} \int_{-c_1-a_1/2}^0 \int_{-c_1-a_1/2}^{a_1/2} \frac{z'-z}{[(x'-x)^2 + (-b_1/2 + b_1/2)^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} dx dz dz' dx' \cdot \mathbf{z} \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{2'} = \frac{\mu_0 M_1^2}{4\pi} \cdot \int_{-b_1/2}^{b_1/2} \int_{z_0}^{z_0+c_1} \int_{-c_1-b_1/2}^0 \int_{-c_1-b_1/2}^{b_1/2} \frac{z'-z}{[(a_1/2 - a_1/2)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} dy dz dz' dy' \cdot \mathbf{z} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{3'} = -\frac{\mu_0 M_1^2}{4\pi} \cdot \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \int_{z_0}^{z_0+c_1} \int_{-c_1-a_1/2}^0 \int_{-c_1-a_1/2}^{a_1/2} \frac{z'-z}{[(x'-x)^2 + (b_1/2 + b_1/2)^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} dx dz dz' dx' \cdot \mathbf{z} \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_{4'} = \frac{\mu_0 M_1^2}{4\pi} \cdot \int_{-b_1/2}^{b_1/2} \int_{z_0}^{z_0+c_1} \int_{-c_1-b_1/2}^0 \int_{-c_1-b_1/2}^{b_1/2} \frac{z'-z}{[(-a_1/2 - a_1/2)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{3/2}} dy dz dz' dy' \cdot \mathbf{z} \quad (16)$$

将式(13)~式(16)代入式(11)可得磁体间的吸引力;式(11)为两块永磁体间的磁力-位移的四重积分表达式,为了便于计算,对其表达形式进行简化,采用数据拟合的方法,如图4所示.

图4中,°为通过式(11)获得的磁力 F_a -磁体间距离的理论值,曲线为磁力-磁体间距离的拟合曲线,可以看出,两者非常吻合,其误差小于5%.下面的仿真模拟是基于该拟合的磁力-位移曲线

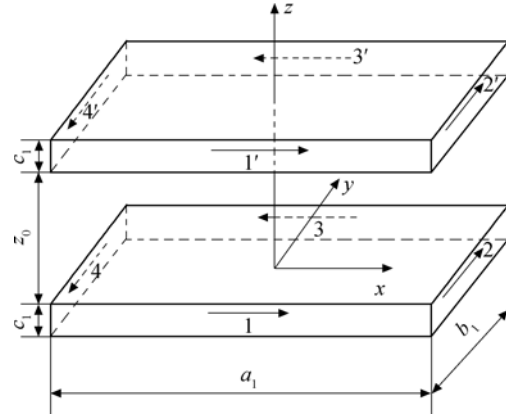


图3 永磁体对模型

Fig. 3 Model of the permanent magnet pair

作用;

3) 侧面3'受到下面永磁体沿 z 方向的吸引力-下面永磁体产生磁感应强度的 $B_y\mathbf{j}$ 分量起作用;

4) 侧面4'受到下面永磁体沿 z 方向的排斥力-下面永磁体产生磁感应强度的 $B_x\mathbf{i}$ 分量起作用.

两块永磁体沿 z 方向的总吸引力可表示为

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{1'} + \mathbf{F}_{2'} + \mathbf{F}_{3'} + \mathbf{F}_{4'} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{F}_{1'}$, $\mathbf{F}_{2'}$, $\mathbf{F}_{3'}$, $\mathbf{F}_{4'}$ 分别为上面永磁体4个侧面在下面永磁体磁感应强度下所受到的磁力.根据安培定律

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (12)$$

可得永磁体之间的磁力表达式

关系,磁力-位移曲线的近似表达式为

$$f(x) = d_1 e^{d_2 x} + d_3 e^{d_4 x} \quad (17)$$

式中拟合系数 $d_1 = 12.8 \text{ N}$, $d_2 = -1092 \text{ m}^{-1}$, $d_3 = 27.58 \text{ N}$, $d_4 = -247.9 \text{ m}^{-1}$.

1.3 隔振梁分析

这里将图1中两端固定的铝梁(下文简称梁)考虑为细长梁^[12](即欧拉-伯努利梁),仅对梁的1阶同步运动进行分析.由振型叠加法,两端固定梁

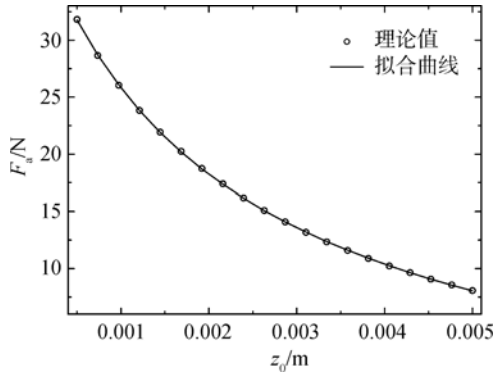


图4 磁力-磁体间距离曲线拟合

Fig. 4 Magnetic force-distance curve fitting

振动的解可表示为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \eta_i(t) \quad (18)$$

考虑梁作1阶横向振动

$$y(x, t) = Y_1(x) \eta_1(t) \quad (19)$$

梁上左侧磁体的振动位移

$$f_m(x, L_1, L_3) = d_1 e^{d_2 \left[L_3 - \frac{Y_1(L_1)}{Y_1(L/2)} x \right]} + d_3 e^{d_4 \left[L_3 - \frac{Y_1(L_1)}{Y_1(L/2)} x \right]} - d_1 e^{d_2 \left[L_3 + \frac{Y_1(L_1)}{Y_1(L/2)} x \right]} - d_3 e^{d_4 \left[L_3 + \frac{Y_1(L_1)}{Y_1(L/2)} x \right]} + d_1 e^{d_2 \left[L_3 - \frac{Y_1(L_2)}{Y_1(L/2)} x \right]} + d_3 e^{d_4 \left[L_3 - \frac{Y_1(L_2)}{Y_1(L/2)} x \right]} - d_1 e^{d_2 \left[L_3 + \frac{Y_1(L_2)}{Y_1(L/2)} x \right]} - d_3 e^{d_4 \left[L_3 + \frac{Y_1(L_2)}{Y_1(L/2)} x \right]} \quad (25)$$

将式(25)对隔振物体位移 x 求1阶导数,可得磁性弹簧的磁刚度 $k_m = k_m(x, L_1, L_3)$; f_m 与 k_m 为中点处隔振物体位移 x , 梁上磁体的位置 L_1 ($L_2 = L - L_1$), 磁体间初始距离 L_3 的函数。

1) 固定梁上磁体的位置 L_1 , $f_m = f_m(x, L_3)$

从图5可以看出,结构的总磁力-位移之间没

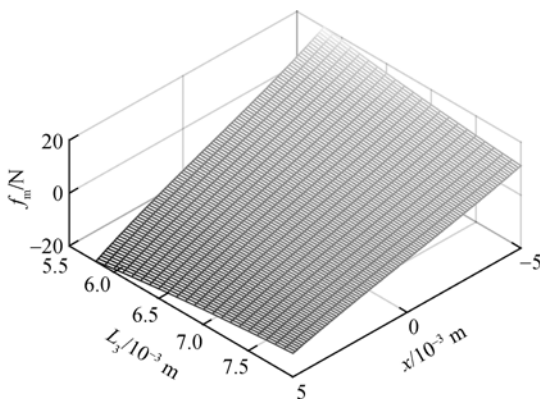
图5 总磁力随隔振物体振动位移 x 和磁体间初始距离 L_3 的变化 ($L_1 = L/4$)

Fig. 5 Variation of the total magnetic force with the vibration displacement x and initial distance L_3 between magnets ($L_1 = L/4$)

$$y_l(L_1, t) = Y_1(L_1) \eta_1(t) \quad (20)$$

梁上右侧磁体的振动位移

$$y_r(L_2, t) = Y_1(L_2) \eta_1(t) \quad (21)$$

梁中点(隔振物体)处的振动位移

$$y_m(L/2, t) = Y_1(L/2) \eta_1(t) \quad (22)$$

由以上分析,梁上左、右侧磁体处的振动位移与梁中点的振动位移之间的关系为

$$y_l(L_1, t) = Y_1(L_1) \eta_1(t) = \frac{Y_1(L_1)}{Y_1(L/2)} y_m(L/2, t) \quad (23)$$

$$y_r(L_2, t) = Y_1(L_2) \eta_1(t) = \frac{Y_1(L_2)}{Y_1(L/2)} y_m(L/2, t) \quad (24)$$

1.4 低刚度隔振系统磁力分析

针对图1所示的结构,一般往往只关心梁中点处隔振物体的振动情况,磁性弹簧对梁中点处的作用等效为梁中点处作用的总磁力,梁中点处作用的总磁力 f_m 为(记梁中点的振动位移 x)

有明显的非线性特征,近似为线性弹簧;在平衡位置附近,位移越大,总磁力越大。

2) 固定磁体间初始距离 L_3 , $f_m = f_m(x, L_1)$

如图6所示,当磁体越靠近梁中点隔振物体时,平衡位置附近总磁力-位移之间的非线性特征越来越强。

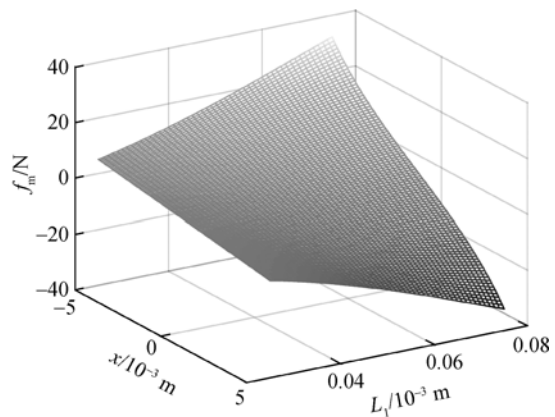
图6 总磁力随隔振物体振动位移 x 和梁上磁体位置 L_1 的变化 ($L_3 = 0.0069 m$)

Fig. 6 Variation of the total magnetic force with the vibration displacement x and the location L_1 of magnets ($L_3 = 0.0069 m$)

3) 固定梁上磁体的位置 L_1 , $k_m = k_m(x, L_3)$

从图 7 可以看出,随着磁体间初始距离 L_3 的增大,在平衡位置附近,磁性弹簧的磁刚度-位移的非线性特征越弱。

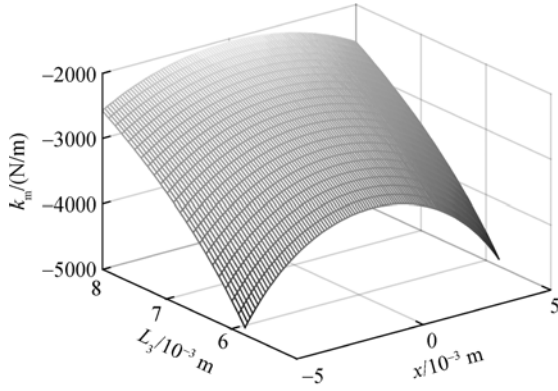


图 7 磁刚度随隔振物体振动位移 x 和磁体间初始距离 L_3 的变化 ($L_1 = L/4$)

Fig. 7 Variation of the magnetic stiffness with the vibration displacement x and the distance L_3 between magnets ($L_1 = L/4$)

4) 固定磁体间初始距离 L_3 , $k_m = k_m(x, L_1)$

图 8 所示,当磁体越靠近隔振物体时 (L_1 增大),平衡位置附近磁性弹簧的磁刚度-位移之间的非线性特征越来越明显。

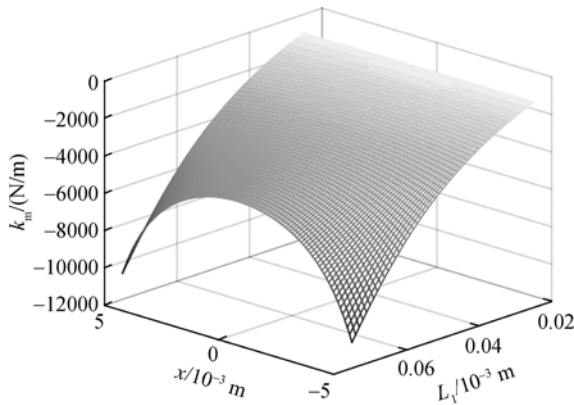


图 8 磁刚度随隔振物体振动位移 x 和梁上磁体位置 L_1 的变化 ($L_3 = 0.0069\text{ m}$)

Fig. 8 Variation of the magnetic stiffness with the vibration displacement x and the location L_1 of magnets ($L_3 = 0.0069\text{ m}$)

由于式(25)中所示的磁性弹簧的总磁力表达式较为复杂,为了分析方便,在平衡位置附近对其进行近似简化;Wu 等^[17]采用 3 阶泰勒级数展开

对磁性弹簧的总磁力与位移之间的关系进行了化简,将式(25)所示的总磁力在平衡位置处用 3 阶幂级数展开如图 9 所示。

$$f_{\text{Taylor}}(x) = k_1 x + k_3 x^3 \quad (26)$$

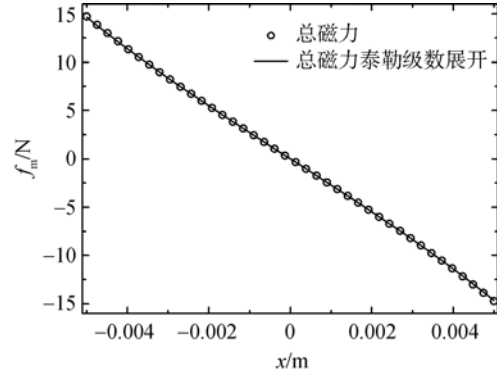


图 9 总磁力-位移曲线 ($L_1 = L/4$, $L_3 = 0.0069\text{ m}$)

Fig. 9 Total magnetic force-displacement curve ($L_1 = L/4$, $L_3 = 0.0069\text{ m}$)

从图 9 可以看出,总磁力-位移曲线的解析形式与 3 阶泰勒级数展开式在平衡位置附近完全吻合.故本文所讨论的总磁力-位移关系可用其近似表达式来代替。

式(26)对隔振物体的位移求 1 阶导,即可求得磁性弹簧的磁刚度

$$k_{\text{Taylor}} = k_1 + 3k_3 x^2 \quad (27)$$

磁性弹簧的磁刚度-位移拟合曲线如图 10 所示。

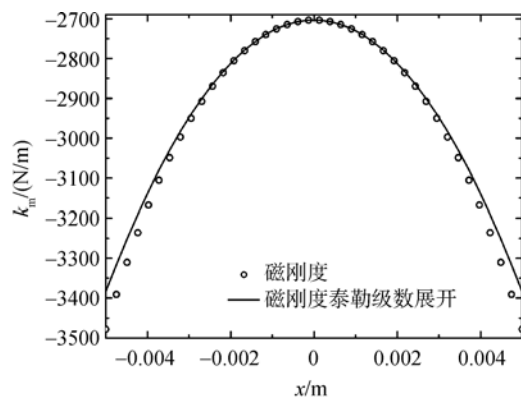


图 10 磁刚度-位移曲线拟合

Fig. 10 Magnetic stiffness-displacement curve fitting

从图 10 可知,在平衡位置附近 (± 0.002) m 磁性弹簧的磁刚度-位移曲线的解析形式与 3 阶泰勒展开式曲线基本完全吻合,故磁性弹簧的总磁力-位移的泰勒级数展开在平衡位置附近 ($\pm 0.002\text{ m}$) 可代替其解析表达式。

1.5 磁性弹簧的磁刚度非线性分析

从图9可以看出,总磁力与位移之间近似为一种线性关系.对于包含非线性特征的系统而言,非线性因素往往会引起系统难以预料的动力学行为.在平衡位置附近 $\pm 0.002\text{ m}$ 范围内,由式(27)中可以看出,非线性磁性弹簧的磁刚度由线性刚度部分与非线性刚度部分组成.为了考虑非线性刚度部分对系统的动力学特性的影响,这里定义一个变量 α 来估计磁性弹簧非线性的强弱,该变量为非线性刚度部分与线性刚度部分之比,这里取 $L_1 = L/4, L_3 = 0.0069\text{ m}$.

$$\alpha = \left| \frac{3k_3 x^2}{k_1} \right| \quad (28)$$

其中 $k_1 = -2703.14, k_3 = -9081665.54$.

从图11可以看出,当振动幅值不超过 2 mm 时,非线性刚度部分小于线性刚度部分的 5% ;因此,当在平衡位置附近 $\pm 0.002\text{ m}$ 范围内振动时,可近似取其线性部分,这样该系统被近似成一个线性系统.

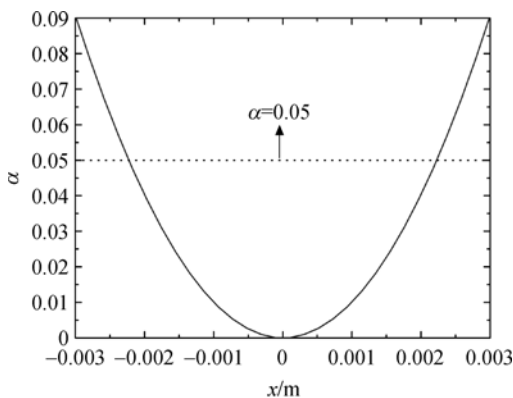


图11 磁刚度的非线性特性分析

Fig. 11 Nonlinear characteristics analysis of the magnetic stiffness

2 低刚度隔振系统动力学分析

图1所示的隔振系统结构,梁在做横向1阶微幅振动时,结构横向总回复力为梁的横向回复力与磁性弹簧回复力之和

$$f(x) = k_b x + f_{\text{Taylor}}(x) \quad (29)$$

根据振动力学^[12]相关知识,忽略梁的非线性影响,梁中点处的等效静刚度为

$$k_b = \frac{192EI_y}{L^3} \quad (30)$$

式中 E 为梁的弹性模量, I_y 表示梁的截面横向惯性矩, L 表示梁的长度,则系统总的恢复力为

$$f(x) = (k_b + k_1)x + k_3 x^3 \quad (31)$$

对于图1所示的系统,该系统可简化成一个如图12所示的单自由度系统,图中 k 表示刚度, c 表示阻尼.其动力学方程为

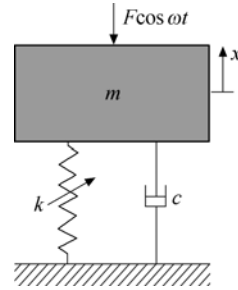


图12 单自由度隔振系统

Fig. 12 Single degree of freedom vibration isolation system

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_b + k_1)x + k_3 x^3 = F \cos \omega t \quad (32)$$

令

$$x_0 = \frac{F}{k_b + k_1}, \quad x = \frac{x}{x_0}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_b + k_1}{m}},$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \tau = \omega_n t, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad \alpha = \frac{k_3 x_0^2}{k_b + k_1}$$

则式(32)可以化简为无量纲的形式

$$\hat{x}'' + 2\xi\hat{x}' + \hat{x} + \alpha\hat{x}^3 = \cos \Omega\tau \quad (33)$$

采用谐波平衡法^[18]求解式(33),设其解为 $\hat{x} = a \cos(\Omega\tau + \phi)$ 并代入式(33)可得

$$\left[(1 - \Omega^2)a + \frac{3}{4}\alpha a^3 \right]^2 + (2\xi\Omega a)^2 = 1 \quad (34)$$

传到基础上的力为

$$f_t = 2\xi\hat{x}' + \hat{x} + \alpha\hat{x}^3 \quad (35)$$

力的传递率为

$$T_{\text{nonlinear1}} = a \left[\left(1 + \frac{3}{4}\alpha a^2 \right)^2 + 4\xi^2 \Omega_1^2 \right]^{1/2} \quad (36)$$

$$T_{\text{nonlinear2}} = a \left[\left(1 + \frac{3}{4}\alpha a^2 \right)^2 + 4\xi^2 \Omega_2^2 \right]^{1/2} \quad (37)$$

其中 Ω_1, Ω_2 由求解式(34)获得.

3 低刚度隔振系统动态分析及仿真模拟

由图9可以看出,非线性磁性弹簧的总磁力与梁中点处位移(隔振物体)之间的关系近似线性关系.从磁刚度的非线性分析中可以看出,非线性刚度部分在平衡位置附近 $\pm 0.002\text{ m}$ 相对于线性刚度为小量,故在平衡位置附近,忽略非线性部分的影响,进行磁刚度线性近似.图1所示的隔振结

构对应的线性系统为去除4个永磁体对之后的梁结构;假定图1的隔振系统与其对应的线性系统的黏性阻尼系数相同。

系统的相对阻尼比为^[12]

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (38)$$

低频隔振系统的相对阻尼比为

$$\zeta_1 = \frac{c}{2\sqrt{(k_b + k_1)m}} \quad (39)$$

对应的线性系统相对阻尼比为

$$\zeta_{\text{linear}} = \frac{c}{2\sqrt{k_b m}} \quad (40)$$

线性系统的力传递率为

$$T_{\text{force}} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (41)$$

从式(39)和式(40)可知,由于 $k_1 < 0$, $k_b + k_1 < k_b$,有 $\zeta_1 > \zeta_{\text{linear}}$;故本文所提出的隔振系统提高了系统的相对阻尼比。

从图13(图中 λ 表示频率比)可以看出,通过在梁结构基础上引入磁性弹簧来提供负刚度,降低了系统的固有频率并拓宽的隔振频带;所考虑的低刚度隔振系统从2.9 Hz开始隔振,而其对应的线性系统从21.5 Hz开始隔振,在很大程度上拓宽了隔振带宽;同时,有效地降低了共振峰值。

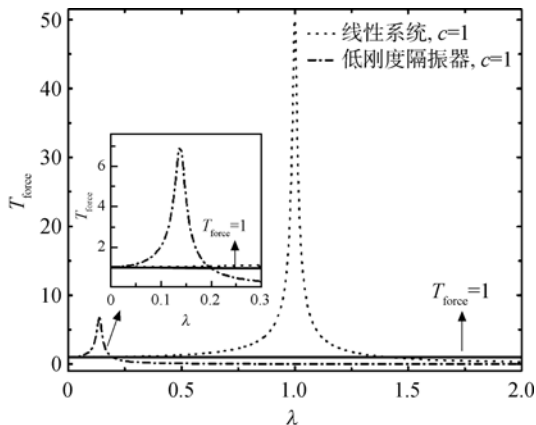


图13 低刚度隔振器与线性系统之间的力传递率对比

($L_1 = L/4$, $L_3 = 0.0069 \text{ m}$)

Fig. 13 Comparison of the force transmissibility between the low stiffness vibration isolator and the linear system ($L_1 = L/4$, $L_3 = 0.0069 \text{ m}$)

图14为低刚度隔振器及其对应的线性系统在不同的阻尼比条件下,系统的传递率对比;可以看出阻尼越大,系统的响应越小;低刚度隔振系统进一步改善了系统的阻尼特性,有效地降低了共振峰值。

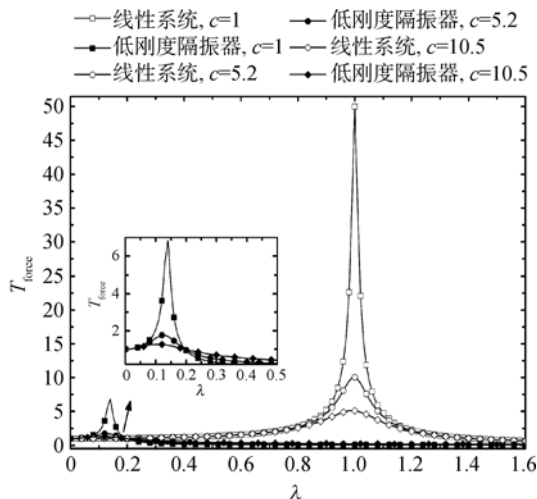


图14 低刚度隔振器和线性系统在不同阻尼下力传递率对比($L_1 = L/4$, $L_3 = 0.0069 \text{ m}$)

Fig. 14 Comparison of the force transmissibility between the low stiffness vibration isolator and the linear systems with the different dampings ($L_1 = L/4$, $L_3 = 0.0069 \text{ m}$)

4 结 论

本文提出了一种改进型磁性并联低刚度隔振器,采用正负刚度并联来降低隔振系统固有频率,拓宽隔振频带;通过调节磁体之间的距离和磁体在梁上的分布位置,对磁性弹簧提供的总磁力和磁刚度进行优化;当隔振系统在平衡位置附近作微幅振动时,磁性弹簧磁刚度的非线性线性较弱,进行了局部线性近似处理;在不考虑隔振系统的非线性影响时,对该隔振器进行了低频隔振特性分析,结果表明:在线性隔振系统基础上引入磁性弹簧,降低了系统的固有频率,整个隔振系统的频带得以拓宽,同时进一步改善了隔振系统的阻尼特性,有效地降低了共振峰值。

参考文献:

- [1] Ibrahim R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 314(3): 371-452.
- [2] 许茂,冯加权. 负刚度结构的刚度分析[J]. 科学技术与工程, 2010, 10(19): 4611-4613.
XU Mao, FENG Jiaquan. The stiffness characteristic analysis of negative stiffness structure[J]. Science Technology and Engineering, 2010, 10(19): 4611-4613. (in Chinese)
- [3] 彭献,陈树年,宋福磐. 负刚度的工作原理及应用初探[J]. 湖南大学学报, 1992, 19(4): 89-94.
PENG Xian, CHEN Shunian, SONG Fupan. Research on theory of negative stiffness and its application[J]. Journal

- of Hunan University, 1992, 19(4): 89-94. (in Chinese)
- [4] 路纯红, 白鸿柏. 新型超低频非线性被动隔振系统的设计[J]. 振动与冲击, 2011, 30(1): 234-236.
LU Chunhong, BAI Hongbo. A new type nonlinear ultra-low frequency passive vibration isolation system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(1): 234-236. (in Chinese)
- [5] Carrella A, Brennan M J, Kovacic I, et al. On the force-transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(4): 707-717.
- [6] Carrella A, Brennan M J, Waters T P, et al. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 55(1): 22-29.
- [7] Zhou N, Liu K. A tunable high-static-low-dynamic stiffness vibration isolator[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(9): 1254-1273.
- [8] Le T D, Ahn K K. A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(26): 6311-6335.
- [9] 刘兴天, 孙靖雅, 肖锋, 等. 准零刚度微振动隔振器的原理和性能研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(21): 69-73.
LIU Xingtian, SUN Jingya, XIAO Feng, et al. Principle and performance of a quasi-zero stiffness isolator for micro-vibration isolation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(21): 69-73. (in Chinese)
- [10] Carrella A, Brennan M J, Waters T P, et al. On the design of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using linear mechanical springs and magnets[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 315(3): 712-720.
- [11] Xu D, Yu Q, Zhou J, et al. Theoretical and experimental analyses of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(14): 3377-3389.
- [12] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [13] 牛红攀, 张希农. 电磁约束层阻尼与电磁分支电路阻尼技术结构振动控制研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2008.
NIU Hongpan, ZHANG Xinong. Structure vibration control technology on electromagnetic constrained layer damping treatment and electromagnetic shunt damper [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2008. (in Chinese)
- [14] Tsui J, Iden D, Strnat K, et al. The effect of intrinsic magnetic properties on permanent magnet repulsion[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1972, 8(2): 188-194.
- [15] 冯慈璋, 马西奎. 工程电磁场导论[M]. 西安: 高等教育出版社, 2000.
- [16] Zhang X, Niu H, Yan B. A novel multimode negative inductance negative resistance shunted electromagnetic damping and its application on a cantilever plate[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(10): 2257-2271.
- [17] Wu W, Chen X, Shan Y. Analysis and experiment of a vibration isolator using a novel magnetic spring with negative stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(13): 2958-2970.
- [18] Friswell M I, Penny J E T. The accuracy of jump frequencies in series solutions of the response of a Duffing oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 169(2): 261-269.

(编辑: 王碧琚)