

复杂几何条件下伴随格林函数的 数值求解

徐希海¹, 李晓东¹, 胡方强²

- (1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;
2. 欧道明大学 数学与统计学院, 美国 弗吉尼亚 诺福克 23529)

摘 要: 为简化气动噪声预测中复杂边界的网格处理,采用计算气动声学(CAA)方法与浸入式边界方法(IBM)相结合数值求解气动噪声预测所需的伴随格林函数. 根据伴随格林函数的基本形式,文中设计了特定的圆柱声散射算例,并将数值结果与解析解对比,分析该方法的计算精度,验证了该方法在复杂几何边界条件下伴随格林函数求解中的适用性. 最后应用该方法求解了考虑吊挂安装效应的锯齿型喷管喷流剪切层内的伴随格林函数. 结果表明:由于喷流剪切层的散射效应,伴随格林函数在喷流内分布不均匀,最大值比最小值高出 3 倍以上,反映了喷流内不同区域声源对远场噪声贡献的差别,降噪设计可以重点考虑降低格林函数较大区域的声源强度以达到降低噪声的目的.

关 键 词: 伴随格林函数; 计算气动声学; 浸入式边界方法; 喷流噪声; 完全匹配层边界条件

中图分类号: V211

文献标志码: A

Numerical solutions of adjoint Green's function for complex geometries

XU Xi-hai¹, LI Xiao-dong¹, HU Fang-qiang²

- (1. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. Department of Mathematics and Statistics,
Old Dominion University, Norfolk Virginia 23529, USA)

Abstract: In order to simplify the grid generation during aerodynamic noise prediction, the computational aeroacoustic (CAA) method and immersed boundary method (IBM) were combined together to solve the adjoint Green's function. According to the basic formulation of adjoint Green's function, a special case of cylindrical acoustic scattering problem was designed. The comparison between the numerical results and the analytical solutions prove that the numerical methods used are reliable and feasible for the calculation of adjoint Green's function for problems with complex geometries. Finally, the combined numerical methods were used to solve the adjoint Green's function of the jet flow from a nozzle with chevron and pylon interaction. Result shows that, because of the scattering effect caused by jet flow shear layer, the distribution of adjoint Green's function in jet flow is uneven, and the maximum value is 3 times higher than the minimum value. This simulation results reveal the relative importance of different regions with the same sound intensity to the far field noise. Therefore, low noise nozzle design can focus on reducing the sound intensity in the larger

area of Green’s function.

Key words: adjoint Green’s function; computational aeroacoustic;
immersed boundary method; jet noise; perfect matched boundary layer

1952 年, Lighthill 通过重组 Navier-Stokes (N-S) 方程^[1-2], 得到了 Lighthill 方程, 并提出了声类比理论, 这标志着气动声学的诞生. 从此, 声类比理论成为了气动声学领域中占有主导地位的理论, 很多的相关研究者依据它对各种气动声学问题进行计算和研究. 在喷流噪声预测方面, 声类比理论也是绝对的主流理论. Lighthill 方程将声源和声传播独立开来, 气动噪声预测时, 声源一般通过经验数据或者相应的声源模化函数给定, 声传播过程则需要通过格林函数来描述. 由于格林函数方程中存在极点, 格林函数的准确求解一直是气动声学的难点之一. 1976 年 Mani^[3] 将喷流简化为完全平行流动, 并对观察点做远场假设, 给出了喷流内 Lilley 方程格林函数的近似解, 由于 20 世纪 90 年代 Khavaran 等^[4-5] (1993 年, 1994 年) 和 Khavaran^[6] (1996 年) 将几何声学的方法应用于非平行流、非轴对称喷流的格林函数计算, 并给出了近似解. 1998 年 Tam 等^[7] 首先将伴随方法应用到喷流噪声剪切层声散射问题中, 采用伴随格林函数来描述剪切层中的声散射问题, 并通过计算气动声学方法求解伴随格林函数. 伴随格林函数的优点是在伴随格林函数方程中声源项为实际远场观察点, 声源项位于计算域之外解决了计算域中奇点处理的问题, 1999 年 Tam 等^[8] 在喷流伴随格林函数求解的基础上发展了小尺度湍流噪声预测方法, 并不断改进应用日益广泛^[9-10].

计算气动声学(CAA)方法通过采用高阶的空间和时间差分格式^[11-12] 降低了声传播数值模拟过程中频散和耗散. 应用 CAA 方法求解伴随格林函数可以得到更为精确的计算结果, 但是其缺点也显而易见, 高阶的差分格式严重依赖网格的质量, 并且稳定性大大低于低阶格式. 这些缺陷严重限制了其在一些具有复杂几何边界的声学问题(如民用飞机的高升力装置、起落架、直升机的旋翼等)上的应用, 极大地阻碍了计算气动声学方法的进一步推广. 浸入式边界方法(immersed boundary method, IBM)^[13-14] 是近些年得到快速发展的一种适合于复杂几何边界的方法, 其在低雷诺数流动的数值模拟, 尤其是运动物体, 如模拟昆虫飞行等方面取得了成功. 浸入式边界方法

尽管精度偏低, 但是数值稳定性较好, 而且简单易于实现, 因而仍然得到了广泛的应用. 在气动声学方面, 近年来众多研究者致力于高精度浸入式边界方法的研究, 2011 年 Seo 和 Mittal^[15] 发展了一种针对线化欧拉方程和低雷诺数下声散射问题的高精度浸入式边界方法. 本文将 Seo 和 Mittal 提出的鬼点式浸入式边界方法与 CAA 方法相结合, 根据伴随格林函数的基本形式, 文中设计了特定的圆柱声散射算例. 并将数值结果与解析解对比, 分析该方法的计算精度, 初步验证了该方法在复杂几何边界条件下伴随格林函数求解中的适用性. 最后应用该方法求解了考虑吊挂安装效应的锯齿型喷管喷流剪切层内的伴随格林函数, 应用于喷流噪声预测.

1 浸入式边界条件

计算气动声学(CAA)方法采用的高阶的差分格式严重依赖网格的质量, 并且稳定性大大低于低阶格式, 严重限制了其在复杂几何边界的声学问题上的应用, 阻碍了计算气动声学方法在工程应用领域的进一步推广. 为了简化格林函数数值计算中复杂边界网格处理的难度, 本文采用 Seo 和 Mittal 提出的高精度鬼点浸入式边界方法求解气动噪声预测中所需的格林函数. 该方法中鬼点的值通过鬼点附近的边界点和内场点以满足边界条件的插值得到, 如式(1)所示

$$\phi(x', y', z') = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K c_{ijk} (x')^i (y')^j (z')^k$$
$$i + j + k \leq N \tag{1}$$

其中 $x' = x - x_{bi}$, $y' = y - y_{bi}$, $z' = z - z_{bi}$, 下标 bi 表示实际边界点 (x_{bi}, y_{bi}, z_{bi}) 的坐标. c_{ijk} 是积分系数, 积分系数根据边界点边界条件的泰勒展开来得到.

$$\phi(x', y', z') = \phi_{bi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_{bi} x' + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bigg|_{bi} y' + \dots \tag{2}$$

因此

$$c_{ijk} = \frac{1}{(i!)(j!)(k!)} \cdot \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \phi \tag{3}$$

2 圆柱声散射校核算例

本文采用第 2 届 CAA Workshop^[16] 的标准

问题之一的二维圆柱声散射问题对数值计算方法和程序进行验证。本文的目的是将 CAA 方法与浸入式边界方法相结合的数值求解方法应用于伴随格林函数的求解。为避免计算中声源奇点存在，同时节省计算资源，伴随格林函数数值计算中将声源设定于计算域之外。因此本文改将 Workshop 中圆柱声散射问题的声源放在计算域之外如图 1 所示。

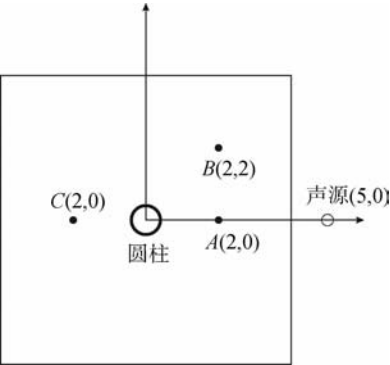


图 1 二维圆柱声散射问题

Fig. 1 Two-dimensional acoustic scattering of cylinder

2.1 数值计算方法

在无流动的情况下，线化欧拉方程为自伴随方程，因此这里的主控方程为无流动下的线化欧拉方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \bar{p} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

初始条件为

$$\begin{aligned} p'(t=0) &= \exp\left[-\ln 2 \cdot \frac{(x-5)^2 + y^2}{0.2^2}\right] \\ u'(t=0) &= 0 \\ v'(t=0) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

伴随计算中声源位于计算域外，因此必须以入射波的形式从边界加入声源，初始条件在自由空间的理论解为

$$p_{in}(r,\theta,t) = \int \frac{e^{-b\omega^2/4}}{2b} J_0(\omega r) \omega \cos(\omega t) d\omega \tag{6}$$

入射波以声源的形式加在边界上，因此数值计算中无反射边界条件必须在吸收散射声波的同时不能吸收入射声波。数值计算中无反射边界条

件采用 Hu^[17]发展的完全匹配层边界条件(perfectly matched layer,PML),在 PML 吸收区域内将声波分为入射波和散射波两个部分

$$p' = p_{in} + p_s \tag{7}$$

只针对散射波的 PML 边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} (u' + \sigma_y q') + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} (u' + \sigma_x q') + \\ (\sigma_x + \sigma_y)(u' - u_{in}) + \sigma_x \sigma_y q' = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = u' - u_{in}$$

数值计算中空间差分采用低频散、低耗散的频散相关保持(dispersion-relation-preserving,DPR)格式^[12](Tam 等,1993 年),时间推进采用 4 阶精度优化的低频散、低耗散龙格库塔格式^[18](Hu 等,1996 年),固壁边界条件则采用上面所述的鬼点浸入式边界方法。

2.2 数值计算结果分析

计算域为 $x=-4\sim 4, y=-4\sim 4$ 的正方形，声源点位置 $(-5,0)$ 位于计算域外。网格尺度 $dx=dy=0.04$ 。图 2 显示在无量纲时间 $T=2.4, 4.8, 7.2, 9.6$ 时刻的压力场云图，云图显示压力范围为 $(-0.4\sim 0.4)$ 虚线显示为压力负值，实线显示为正值。从云图中可以看出 PML 无反射边界条件在吸收了散射声波的同时对入射声波没有

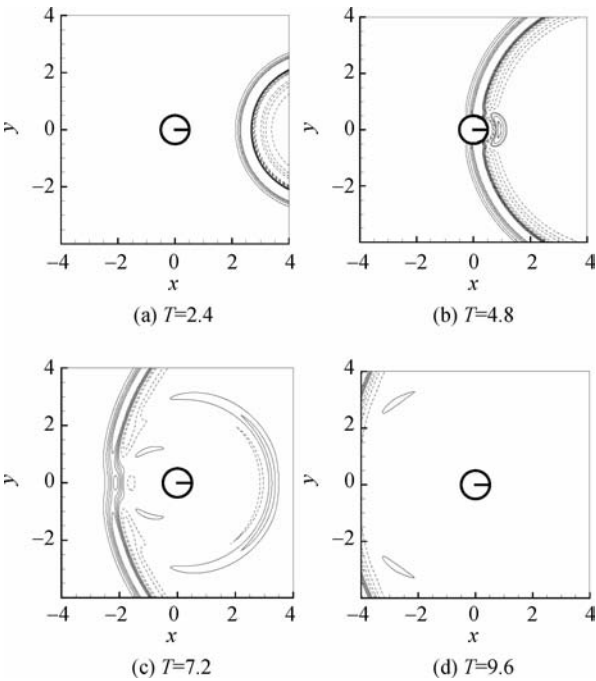


图 2 $T=2.4, 4.8, 7.2, 9.6$ 时刻压力场

Fig. 2 Pressure contours at $T=2.4, 4.8, 7.2, 9.6$

影响. $T=4.8, 7.2$ 时刻可以看出圆柱散射波的产生, 辐射的过程, 验证了固壁采用鬼点浸入式边界方法的可行性.

图 3~图 5 分别是 A, B, C 三点的无量纲压力 p 随时间变化曲线数值解与理论解的对比. 无论是入射波还是反射波, 数值计算结果与理论解都很好吻合, 对比验证了本文采用的数值计算方法及相应边界条件在伴随格林函数计算中的可行性.

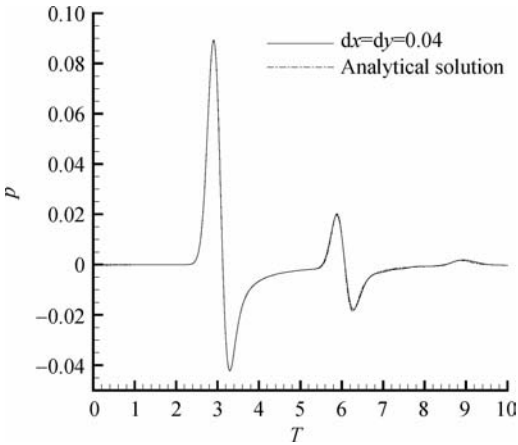


图 3 A 点压力随时间变化曲线

Fig. 3 Pressure variation curve at point A

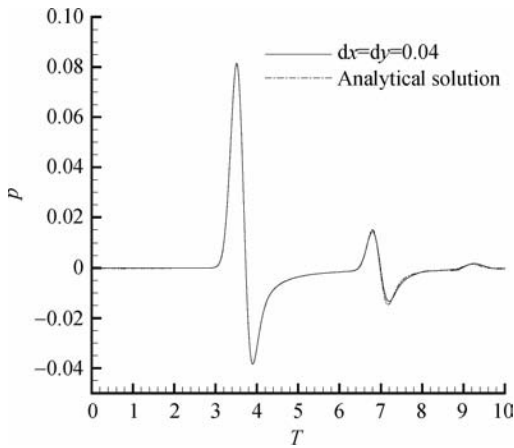


图 4 B 点压力随时间变化曲线

Fig. 4 Pressure variation curve at point B

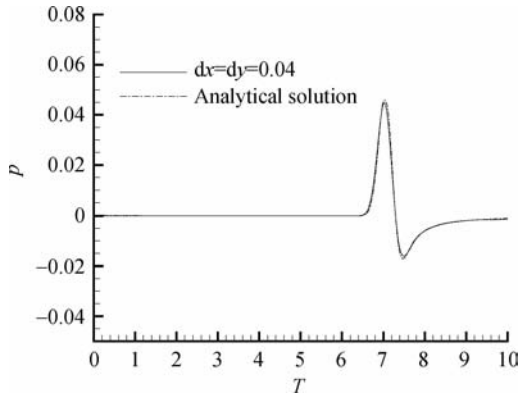


图 5 C 点压力随时间变化曲线

Fig. 5 Pressure variation curve at point C

3 喷流剪切层伴随格林函数计算

如图 6 所示, 喷流中的声源产生的声波在穿过剪切层向远场传播时, 声波在剪切层中会产生明显的折射效应, 这对于喷流噪声远场指向性有极为重要的影响. 声波在流场中的折射效应可以用线化欧拉方程描述. 由于喷流流场中无数声源点存在, 直接求解每个声源的格林函数其计算量显然是难以承受的. 相比于声源点, 远场观测点则只需几个, 因此求解伴随格林函数来代替直接求解格林函数可以大大减少数值计算量.

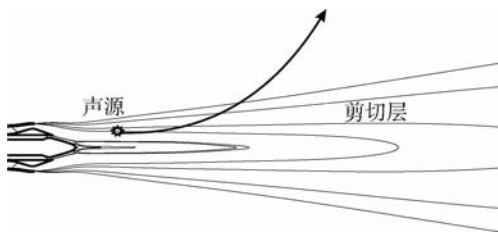


图 6 喷流中的声散射问题

Fig. 6 Acoustic scattering from jet flow

喷流噪声预测中为简化计算应用平行流假设忽略径向和法向速度. 相应伴随格林函数如下所示:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{C} \mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_a \\ \tilde{w}_a \\ \tilde{p}_a \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma \bar{p} / \bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \bar{p} / \bar{\rho} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{i\omega \bar{u} \cos \theta}{a_\infty} & 0 & \frac{\gamma \bar{p} \cos \theta}{\bar{\rho}(a_\infty - \bar{u} \cos \theta)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ 0 & \frac{i\omega \bar{u} \cos \theta}{a_\infty} & \frac{\gamma \bar{p} \cos \theta}{\bar{\rho}(a_\infty - \bar{u} \cos \theta)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{i\omega}{a_\infty} \left(\bar{u} \cos \theta + \frac{\gamma \bar{p} \cos^2(\theta)}{\bar{\rho}(a_\infty - \bar{u} \cos \theta)} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \end{bmatrix}$$

其中 $\tilde{p}_a(x,y,z)$, $\tilde{v}_a(x,y,z)$ 和 $\tilde{w}_a(x,y,z)$ 分别是压力、速度项的伴随格林函数. $\bar{u}(x,y,z)$, $\bar{\rho}(x,y,z)$ 和 $\bar{p}(x,y,z)$ 是喷流平均流动的轴向速度, 密度和压强. $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ 是内场点 $\mathbf{x}$ 与外场伴随声源点 $\mathbf{x}_0$ 之间的距离.

3.1 数值计算方法

在计算伴随格林函数前, 喷流流动平均流场通过 Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) 计算获得, 图 7 所示为考虑吊挂安装效应锯齿形低噪声喷管的速度云图. 对于已知的喷流平均流动数据, 式(9)描述的声散射问题可以通过数值计算得到.

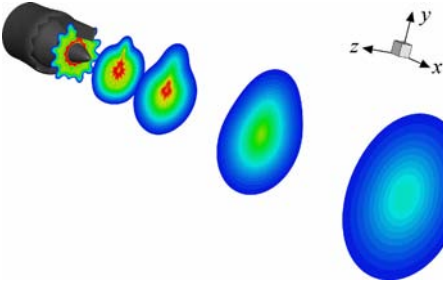


图 7 考虑吊挂安装效应锯齿形低噪声喷管的速度云图
Fig. 7 Velocity contour of low noise nozzle with chevron and pylon installation effects

这里伴随格林函数采取入射波声散射方法求解, 将伴随声源点位计算域之外于这样可以避免计算中声源点奇异的问题. 数值计算中将伴随格林函数分为入射波和散射波两个部分如式(10)所示

$$\bar{\mathbf{u}}_a = \mathbf{u}' + \mathbf{u}_{in} \tag{10}$$

则式(14)的算子形式可以转换为

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_a}{\partial t} + L(\bar{\mathbf{u}}_a) = 0$$
$$\frac{\partial (\mathbf{u}' + \mathbf{u}_{in})}{\partial t} + L(\mathbf{u}' + \mathbf{u}_{in}) = 0 \tag{11}$$

将入射波移到方程右边作为声源项则得到关于散射波的主控方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + L(\mathbf{u}') = -\frac{\partial \mathbf{u}_{in}}{\partial t} - L(\mathbf{u}_{in}) \tag{12}$$

喷流计算域外由于没有流动, 由伴随声源产生的入射声波可以通过理论解得到如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{in} \\ \bar{v}_{in} \\ \bar{w}_{in} \\ \bar{p}_{in} \end{bmatrix} = \frac{-i\omega}{8\pi^2 a_\infty^2 R} \begin{bmatrix} a_\infty \cos\theta \\ a_\infty \sin\theta \cos\phi \\ a_\infty \sin\theta \sin\phi \\ 1 \end{bmatrix} \times \exp(i\omega/a_\infty) \cdot (R - y\sin\theta\cos\phi - z\sin\theta\sin\phi - a_\infty t)$$

喷流伴随格林函数计算域如图 8 所示. 数值计算中空间差分采用低频散低耗散的 DRP 频散相关保持格式^[12] (Tam 等, 1993 年), 时间推进采用 4 阶精度优化的低频散、低耗散龙格库塔格式^[18] (Hu 等, 1996 年), 固壁边界条件则采用上面所述的鬼点浸入式边界方法.

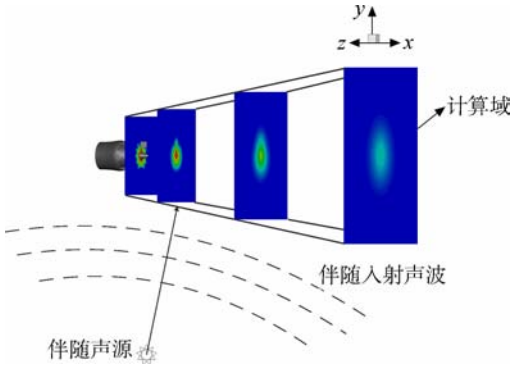


图 8 伴随格林函数计算域
Fig. 8 Computational domain of adjoint Green's function

3.2 数值计算结果

图 9 给出了 $x=2D$ 截面的位置及轴向速度分布云图. 图 10 给出了 $x=2D$ 截面伴随格林函数数值计算结果. 其中图 10(a) 是时域伴随格林函数的某时刻的瞬态云图, $x=2D$ 截面在喷管下游方向, 远离喷管出口及吊挂, 截面中不存在固壁. 从图中可以看出入射声波从计算域下方引入计算域, 由于喷流剪切层中速度梯度存在, 声波在穿过剪切层是发生了明显的散射效应. 图 10(b) 是伴随格林函数的频域结果云图, 从图中可以看出由于喷流剪切层的散射效应, 伴随格林函数在喷流内分布不均匀, 最大值比最小值高出 3 倍以上.

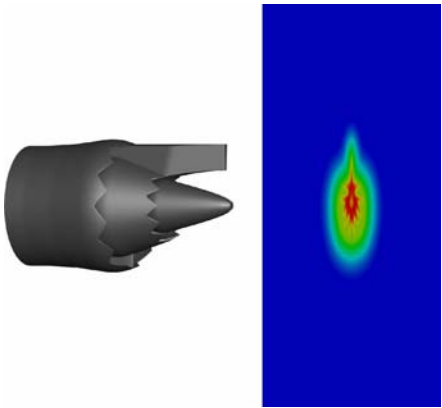


图 9 $x=2D$ 截面位置及轴向速度云图
Fig. 9 Axial velocity contour at cross-section $x=2D$

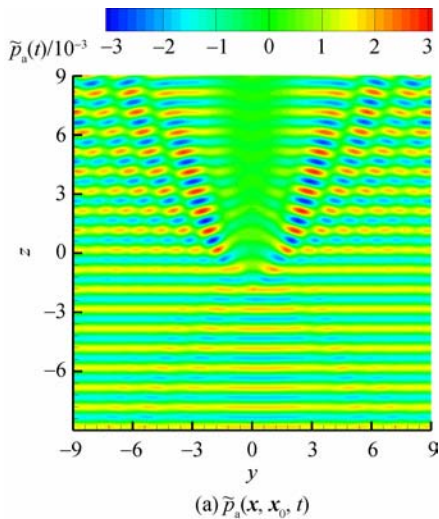


图 10 $x=2D$ 截面伴随格林函数数值计算结果
Fig. 10 Numerical results of adjoint Green's function at cross-section $x=2D$

图 11 给出了 $x=0.6D$ 截面的位置及轴向速度分布云图. 图 12 给出了 $x=0.6D$ 截面伴随格林函数数值计算结果. 其中图 12(a) 是时域伴随格林函数的某时刻的瞬态云图, $x=0.6D$ 截面在喷管下游, 距离喷管出口较近与吊挂相交. 从图中可以看出入射声波从计算域下方引入计算域, 有喷流剪切层中速度梯度存在, 声波在穿过剪切层是发生了明显的散射效应. 同时由于中心插件及吊挂的存在又引起反射和散射效应. 图 12(b) 是伴随格林函数的频域结果云图, 从图中可以看出由于喷流剪切层的散射效应, 伴随格林函数在喷流内分布不均匀, 最大值比最小值高出 3 倍以上. 且相比于 $x=2D$ 截面, 由于截面中吊挂及中心插件对噪声的散射作用, $x=0.6D$ 截面内伴随格林函数的分布更为复杂.

格林函数物理上反映某处声源对远场声压的

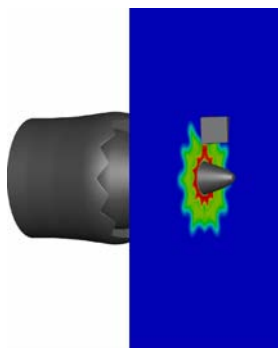


图 11 $x=0.6D$ 截面位置及轴向速度云图
Fig. 11 Axial velocity contour at cross-section $x=0.6D$

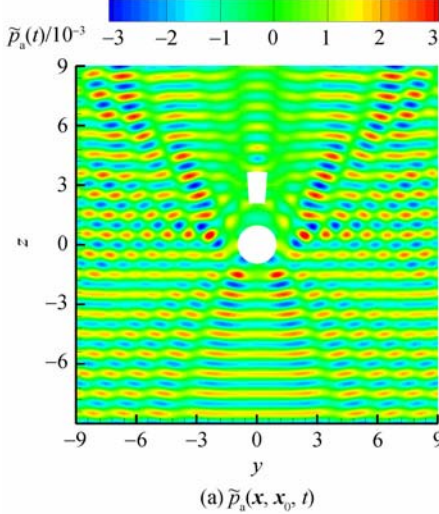
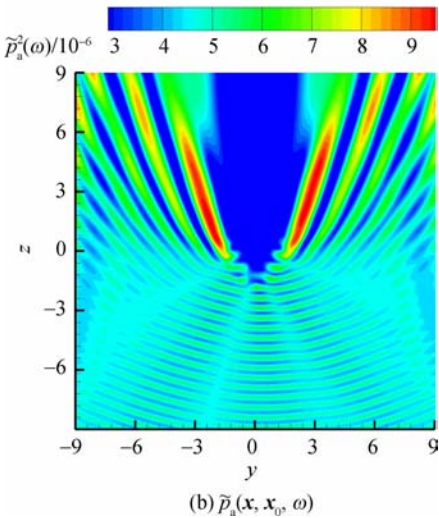


图 12 $x=0.6D$ 截面伴随格林函数数值计算结果
Fig. 12 Numerical results of adjoint Green's function at cross-section $x=0.6D$

贡献, 格林函数大的区域则表明同样大小的声源在此处对远场观察点声压的贡献更大. 降噪设计上则可以通过在此区域采取降噪手段从而降低远

场噪声. 伴随格林函数的准确求解则对低噪声喷管的设计可以给出更为针对性的指导.

4 结 论

1) 根据伴随格林函数的基本形式, 设计了特定的圆柱声散射算例, 并将数值结果与解析解对比, 分析了 CAA 与浸入式边界方法相结合方法的计算精度, 验证了数值方法在复杂几何边界条件下伴随格林函数求解中的适用性.

2) 应用 CAA 方法与浸入式边界方法相结合的方法求解了考虑吊挂安装效应的锯齿型喷管喷流剪切层内的伴随格林函数. 结果由于喷流剪切层的散射效应, 伴随格林函数在喷流内分布不均匀, 最大值比最小值高出 3 倍以上.

3) 声源区内格林函数的大小反映了声源对远场的贡献率, 降噪设计可以重点考虑降低格林函数较大区域的声源强度以达到降低噪声的目的. 通过伴随格林函数的准确求解可以对低噪声喷管的设计可以给出更为针对性的指导.

参考文献:

[1] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically: I general theory[J]. Proceedings of the Royal Society of London; A, 1952, 211(1107): 564-587.

[2] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically: II turbulence as a source of sound[J]. Proceedings of the Royal Society of London; A, 1954, 211(1148): 1-31.

[3] Mani R. The influence of flow on jet noise[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1976, 74(4): 753-793.

[4] Khavaran A, Krejsa E A. Propagation of high frequency jet noise using geometric acoustics[R]. AIAA 93-0147, 1993.

[5] Khavaran A, Krejsa E A. Refraction of high frequency noise in an arbitrary jet flow[R]. AIAA 94-0139, 1994.

[6] Khavaran A. Refraction and shielding of noise in non-axi-

symmetric jets[R]. AIAA 96-1780, 1996.

[7] Tam C K W, Auriault L. Mean flow refraction effects on sound radiated from localized sources in a jet[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1998, 370: 149-174.

[8] Tam C K W, Auriault L. Jet mixing noise from fine-scale turbulence[J]. AIAA Journal, 1999, 37(2): 145-153.

[9] Tam C K W, Pastouchenko N N, Viswanathan K. Fine-scale turbulence noise from hot jets[J]. AIAA Journal, 2005, 43(8): 1675-1683.

[10] Tam C K W, Pastouchenko N N. Noise from fine-scale turbulence of nonaxisymmetric jets[J]. AIAA Journal, 2002, 40(3): 456-464.

[11] Lele S K. Compact finite difference scheme with spectral-like resolution [J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1): 16-42.

[12] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference scheme for computational acoustics [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107(2): 262-281.

[13] Mittal R, Iaccarino G. Immersed boundary methods[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2005, 37(1): 239-261.

[14] Luo H, Mittal R, Zheng X, et al. An immersed-boundary method for flow-structure interaction in biological systems with application to phonation[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(22): 9303-9332.

[15] Seo J H, Mittal R. A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-Mach number flow-induced sound in complex geometries[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(4): 1000-1019.

[16] Tam C K W, Hardin J C. Second computational aeroacoustic (CAA) workshop on benchmark problems[R]. Tallahassee, Florida: Workshop on Benchmark Problems, 1996.

[17] Hu F Q. A stable, perfectly matched layer for linearized euler equations in unsplit physical variables[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 173(2): 455-480.

[18] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124(1): 177-191.

(编辑:王碧琚)