

周期对称性在失谐叶盘瞬态响应 求解中的应用

姚建尧¹, 辛健强², 王建军³

- (1. 重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044;
2. 中国航天科技集团公司 中国运载火箭技术研究院 研究发展中心, 北京 100076;
3. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 提出了利用周期对称性仅使用一个扇区进行失谐叶盘瞬态响应分析的方法, 给出了其理论和算法实现过程。该算法的核心思想是将失谐部分移至运动方程的右端作为非线性激励, 将失谐问题转化为谐调非线性问题, 并采用迭代法或预测位形法进行非线性响应的求解, 以单自由度(DOF)系统验证时域推进方法的有效性。最后使用简化失谐叶盘的有限元模型验证了该方法的有效性。结果表明: 采用扇区模型可将自由度从 3888 减少至 324, 而每一时间步仅需 2~3 次迭代即可收敛, 扇区模型与整体模型计算结果吻合良好, 最大幅值误差为 0.14%。

关 键 词: 失谐叶盘; 瞬态响应; 周期对称性; 非线性激励; 预测位形

中图分类号: V231.92

文献标志码: A

Application of cyclic symmetry property in transient response solution of mistuned bladed disks

YAO Jian-yao¹, XIN Jian-qiang², WANG Jian-jun³

- (1. College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. Research and Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology,
China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100076, China;
3. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Theory and algorithm for using cyclic symmetry property to calculate transient response of mistuned bladed disk was presented. The mistuning parts were moved to the right-hand side of the equations of motion, and were treated as the nonlinear excitation force of the corresponding tuned bladed disk. Therefore, the mistuned problem was transformed to a nonlinear tuned one, and could be solved using only one sector of the bladed disk. The iterative and prediction-correction time-marching schemes were proposed to handle the nonlinear mistuning force, and were validated using a single degree of freedom (DOF) model. A simplified mistuned bladed disk finite element model was used as the numerical example to validate the effectiveness of the proposed method. Result shows that, the number of DOF is reduced from 3888 to 324 by using the cyclic model, and it only takes 2—3 iterations to obtain the converged solution for each time step. The response results obtained using full model and cyclic model agree very well with the maximum amplitude error of 0.14%.

收稿日期: 2014-12-15

基金项目: 国家自然科学基金(11502037)

作者简介: 姚建尧(1981—), 男, 河北衡水人, 研究员、博士生导师, 博士, 主要从事航空发动机结构强度振动和流固耦合的研究。

E-mail: yaojianyao@cqu.edu.cn

Key words: mistuned bladed disk; transient response; cyclic symmetry property; nonlinear excitation; structural predictor

叶盘结构是航空发动机的关键重要部件之一,其振动响应分析对叶盘结构高循环疲劳和发动机的结构完整性及可靠性有着重要的作用^[1-3]. 航空发动机的叶盘结构是一种典型的旋转周期对称结构,每个叶盘和相应的轮盘组成了一个基本扇区. 利用叶盘结构的周期对称性,可仅使用一个扇区对叶盘结构整体进行分析,大大减小了叶盘结构的计算负荷和对计算机硬件的要求. 在结构分析理论中,对称性在一般周期结构的动态特性分析中已得到了广泛的应用. Thomas^[4]首先较为系统地提出了应用对称性分析典型周期对称结构的自由振动和强迫振动问题,Williams^[5-6]给出了旋转周期对称结构特征问题的求解算法,Fricker等^[7]给出了一般旋转周期对称结构瞬态响应的算法. 目前利用周期对称性进行模态分析和谐波响应分析的方法都已内置于通用的有限元程序中,如软件 ANSYS 和 NASTRAN 等.

周期对称性在叶盘结构的分析中同样有着广泛的应用. 张锦等^[8-10]系统研究了叶盘结构周期对称模型的建模方法和固有特性分析方法. 利用周期对称性建立的叶盘结构减缩模型(如 fundamental mistuning model, FMM^[11]和 asymptotic mistuning model, AMM^[12])也被用于失谐叶盘的固有特性和频响分析中. 近年来,也有学者利用周期对称性对多级叶盘进行模型减缩^[13-15],在这些模型中,单级叶盘的周期对称模型通过盘间鼓筒的耦合约束组合在一起. 上述的研究主要是针对谐调或失谐叶盘的固有特性、频响特性和减缩模型开展的,关于叶盘结构瞬态响应的研究相对较少. 姚建尧等^[16]给出了利用周期对称性对谐调叶盘进行瞬态分析的模型和方法,研究表明采用周期对称模型可大大提高瞬态响应的分析效率.

但由于加工公差、材料分散性、使用中的不均匀磨损以及某些人为设计的因素,叶盘结构各扇区之间总是存在着失谐. 失谐的存在破坏了系统的周期对称性,在瞬态响应分析中往往必须采用整体模型,大大增加了计算负荷. 基于之前的研究^[16-17],这里提出利用周期对称性对失谐叶盘进行瞬态响应分析的方法. 在该方法中,将失谐部分移至运动方程的右端作为非线性激励,从而把失谐的线性问题转换为谐调的非线性问题在一个扇区进行求解. 在瞬态响应求解的时域推进过程中,

分别采用迭代和位形预测两种方法来处理非线性激励. 本文将系统介绍该方法的理论基础和算法实现过程,并以一个简化的失谐叶盘为例,比较各种方法的精度和稳定性.

1 失谐叶盘的运动方程及其求解

1.1 失谐叶盘的运动方程

失谐叶盘结构的运动方程可以写为

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别表示谐调叶盘结构的质量、阻尼和刚度矩阵; $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{C}$ 和 $\Delta\mathbf{K}$ 分别表示其失谐量; $\mathbf{F}(t)$ 表示作用于叶盘结构的外激励. 将失谐部分移至方程的右端,有

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) - (\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{K}\mathbf{x}) \quad (2)$$

这样,方程的左端仍保持了谐调的形式,而方程右端的激励与当前的运动状态(位移、速度和加速度)有关,从而形式上变成一个非线性问题. 这种非线性激励有两个特点:第一,非线性激励的大小和失谐大小呈线性关系,因此当失谐较小时,系统的非线性相对也比较弱;第二,非线性激励 $\mathbf{F}_m(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$ 与流固问题中流体激励类似,但其形式相对简单,因此可以借鉴非线性流固耦合的激励处理方式,相关内容将在下一小节进行详细介绍.

由于方程式(2)的左端保持了谐调的形式,因此仍可以只采用一个基本扇区进行瞬态响应分析. 谐调叶盘结构周期对称模型的有限元建模和瞬态响应分析过程在文献[16]中已经做了详细的介绍,这里不再赘述. 在这里,失谐与谐调叶盘的主要区别在于右端的激励:首先,由于随机失谐的存在,右端激励的节径谱^[18-19]成分更为丰富,能激起更为复杂的振动形式;第二,失谐激励的大小和分布形式取决于当前的运动状态,具有非线性特性.

1.2 非线性激励的处理方式

在航空航天工程的非线性流固耦合分析中,多数情况下采用流体和固体/结构分开求解的方式,然后通过流固耦合界面的数据交换来实现耦合过程. 同时,为了提高计算精度,通常会采用双向顺序耦合的方式^[20],并往往需要在耦合过程中的每一时间步内增加迭代来保证耦合界面上速度

和力的连续性. 对于工程应用中的大规模模型, 这种迭代需要消耗很多的计算资源, 因此有学者提出通过预测-校正的格式^[21-23]来避免迭代运算.

前面指出, 非线性失谐力的具有和非线性流体激励类似的形式, 因此这里采用同样的方式来求解式(2)的非线性运动方程. 图 1 表示采用迭代法求解失谐叶盘瞬态响应的推进过程, 图中 $\mathbf{X}^n = \{\mathbf{x}^n, \dot{\mathbf{x}}^n, \ddot{\mathbf{x}}^n\}$ 表示当前位形, $\mathbf{S}$ 代表结构求解器, $\mathbf{F}_m$ 是由当前位形得到的失谐力, 双向箭头表示该时间步中的迭代过程. 在时间推进过程中, 在得到当前步满足精度要求的结果后, 进行下一步的迭代计算. 该方法中每个时间步都需要多次调用结构求解器, 影响了算法的效率, 但计算结果的精度很高, 并可以通过设置收敛容差来控制.

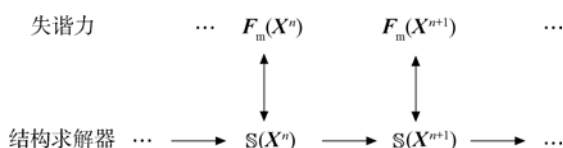


图 1 失谐叶盘周期模型迭代求解流程

Fig. 1 Procedures for iterative scheme of mistuned bladed disks cyclic model

图 2 表示失谐叶盘结构瞬态响应求解的预测位形算法流程. 该算法中, 失谐力是在预测位形 $\mathbf{X}_p^n$ 上计算的, 然后将该失谐力用于结构求解器得到该时间步的位移、速度和加速度等. 该方法中通过合理设计位形预测算法, 不需要迭代计算即可得到满足工程精度的响应结果, 大大提高了计算效率. 接下来, 将给出这两种算法的详细实现过程.

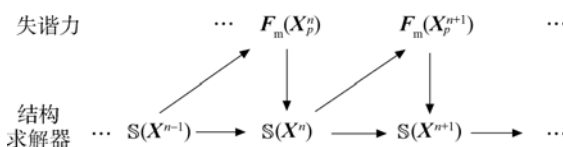


图 2 失谐叶盘周期模型预测位形求解流程

Fig. 2 Procedures for prediction-correction time-marching schemes of mistuned bladed disks cyclic model

2 失谐叶盘周期对称模型瞬态响应求解流程

2.1 迭代法的算法实现过程

失谐叶盘瞬态响应迭代算法具体实现过程如下:

1) 建立扇区模型. 基于扩充扇区的有限元模型获取系统矩阵, 包括谐调情况下的质量和刚度矩阵, 分别记为 $\mathbf{M}_0$ 和 $\mathbf{K}_0$, 各扇区的失谐量 $\Delta\mathbf{M}_r$ 和 $\Delta\mathbf{K}_r$, 以及扩充扇区和基本扇区之间的转换矩阵 $\mathbf{S}_r$, 下标 r 表示节径数. 需要说明的是, 这里的分析采用比例阻尼, 阻尼矩阵可写为

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3)$$

2) 计算并存储各节径下的基本扇区的质量和刚度矩阵, 记为 $\mathbf{M}_{pr}$ 和 $\mathbf{K}_{pr}$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pr} &= \mathbf{S}_r^H \mathbf{K}_0 \mathbf{S}_r \\ \mathbf{M}_{pr} &= \mathbf{S}_r^H \mathbf{M}_0 \mathbf{S}_r \end{aligned} \quad (4)$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1$$

为了节省存储空间, 这里将矩阵分为随节径变化和不随节径变化两个部分.

3) 给定初始条件, 确定积分时间步长, 计算 Newmark 法积分常数.

4) 对于每一时间步(从 t^n 到 t^{n+1})

(1) 设定迭代起始条件

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^n, \dot{\mathbf{x}}^{(0)} = \dot{\mathbf{x}}^n, \ddot{\mathbf{x}}^{(0)} = \ddot{\mathbf{x}}^n \quad (5)$$

(2) 计算失谐力

$$\mathbf{F}_m^{(k)} = -(\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^{(k)} + \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}^{(k)} + \Delta\mathbf{K}\mathbf{x}^{(k)}) \quad (6)$$

(3) 对失谐力和外激励进行 Fourier 变换, 得到每个节径下的激励向量.

(4) 利用 Newmark 法计算每一节径下的响应, 并叠加得到更新的 $\mathbf{x}^{(k+1)}$, $\dot{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ 和 $\ddot{\mathbf{x}}^{(k+1)}$.

(5) 计算位移相对误差

$$V_{\text{error}} = \frac{\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|}{\|\mathbf{X}^{(k+1)}\|} \quad (7)$$

(6) 判断是否满足迭代精度要求, 若不满足则返回步骤(2)更新失谐力进行下一次迭代; 若满足则结束该时间步迭代, 存储结果数据并进入下一时间步的计算

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^{(k+m)}, \dot{\mathbf{x}}^{n+1} = \dot{\mathbf{x}}^{(k+m)}, \ddot{\mathbf{x}}^{n+1} = \ddot{\mathbf{x}}^{(k+m)} \quad (8)$$

式中 m 为该时间步的迭代次数, 通常会设置一个最大迭代次数来避免“死循环”的出现.

在上面给出的计算流程中, 矩阵获取、激励转换、方程求解和位移叠加等过程的具体实现方法可参考文献[16].

2.2 预测位形法的算法实现过程

第 2.1 小节介绍了迭代算法的实现, 为了避免每一时间步中的迭代, 这里借鉴流固耦合算法中选取结构位形计算流体激励的方式, 利用预测位形法来计算失谐力. 该算法的前处理方式与迭

代算法相同,在每一时间步中(从 t^n 到 t^{n+1}),计算过程如下:

(1) 利用上一步的响应结果,采用如下方式预测结构的位移、速度和加速度

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}^n + h\dot{\mathbf{x}}^n \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \dot{\mathbf{x}}^n + h\ddot{\mathbf{x}}^n \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_p = \ddot{\mathbf{x}}^n + (\ddot{\mathbf{x}}^n - \ddot{\mathbf{x}}^{n-1}) \quad (11)$$

(2) 在预测的位形上计算失谐力为

$$\mathbf{F}_m = -(\Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_p + \Delta \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_p + \Delta \mathbf{K} \mathbf{x}_p) \quad (12)$$

(3) 对失谐力和外激励进行 Fourier 变换,得到每个节径下的激励向量。

(4) 利用 Newmark 法计算每一节径下的响应,并叠加得到整体叶盘响应 $\mathbf{x}^{n+1}$, $\dot{\mathbf{x}}^{n+1}$ 和 $\ddot{\mathbf{x}}^{n+1}$ 。

(5) 存储当前结果,进入下一时间步的计算。

从式(9)~式(11)表示的预测过程可以看出,失谐力实际上是在预测的 t^{n+1} 时刻上的位形计算的,其位移和速度分别是由当前状态及其导数(速度和加速度)线性外插得到的。同时,由于在瞬态响应分析中一般不提供加速度的导数,这里利用前两步的结果近似得到其导数。

需要说明的是,这里选取的预测位形的方法是最简单和直接的 1 阶形式,文献[22-23]中还给出了其他较为复杂的预测-校正方法。

3 算例和讨论

3.1 算法在单自由度系统中的应用

这里首先采用一个单自由度系统来验证这里所给出的两种时域推进算法的有效性。无量纲单自由度系统的运动方程为

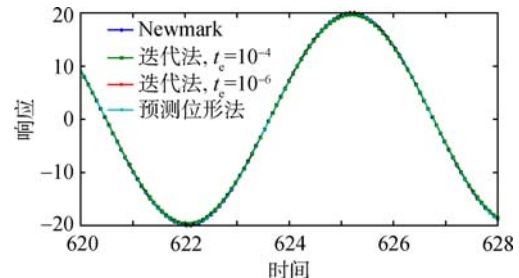
$$0.9\ddot{x} + 0.0425\dot{x} + 0.8x = \sin t - 0.1\ddot{x} - 0.0075\dot{x} - 0.2x \quad (13)$$

可认为系统的质量、阻尼和刚度失谐量分别为 10%, 15% 和 20%。

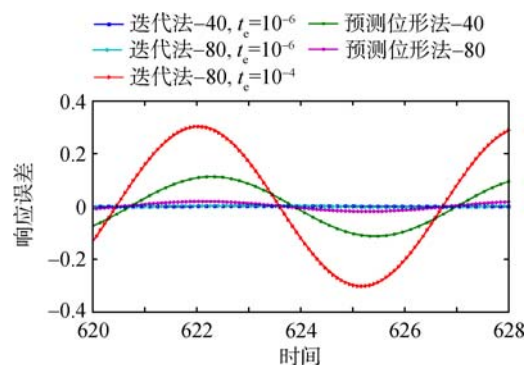
图 3 给出了式(13)所示的单自由度系统在共振状态下的响应,这里迭代法的控制容差设置为 10^{-6} ,此处横纵坐标均为无量纲。从图 3(a)可以看出,以 Newmark 法得到的标称系统的响应解为基准,这里给出的迭代法和预测位形法都可以准确地得到瞬态响应解。

为了更为清晰地比较这两种算法的精度,图 3(b)给出了不同时间步长和迭代误差控制下两种算法的误差。图中 -80 表示步长为 $T/80$, -40 表示步长为 $T/40$, T 表示振动周期。从图中可以看出,在同一容差 t_e 下(设置为 $t_e = 10^{-6}$),迭代法

的精度对时间步长不敏感,且此时的精度比预测位形法要高,但其每个时间步平均需要 3.77 次迭代,如图 4 所示。当容差设置为 10^{-4} 时,在同一时间步长($T/80$)下,迭代法的误差要明显大于位形预测法,且此时每时间步仍需要 2~3 次迭代。



(a) 共振响应



(b) 响应误差

图 3 单自由度系统共振响应及其误差

Fig. 3 Resonant responses and errors of single degree of freedom system

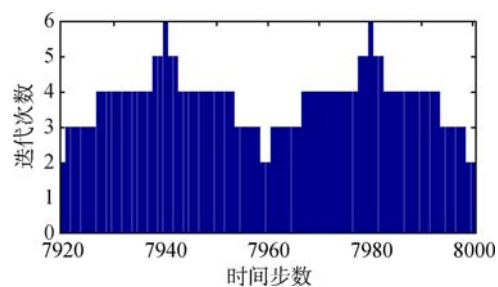


图 4 容差为 10^{-6} 时迭代法每时间步的迭代次数

Fig. 4 Number of iterations of each time step with error tolerance of 10^{-6}

需要注意的是,位形预测法的精度对时间步长较为敏感,其精度随着时间步长的减小明显提高。当步长为 $T/40$ 时,其幅值误差为 0.56%;当步长为 $T/80$ 时,其幅值误差为 0.09%。

3.2 简化失谐叶盘模型

简化叶盘结构的有限元模型如图 5(a)所示,

该叶盘有 12 个扇区,这里只考虑刚度失谐的情况,各叶片的失谐量如图 5(b)所示,其最大失谐量为 5%.

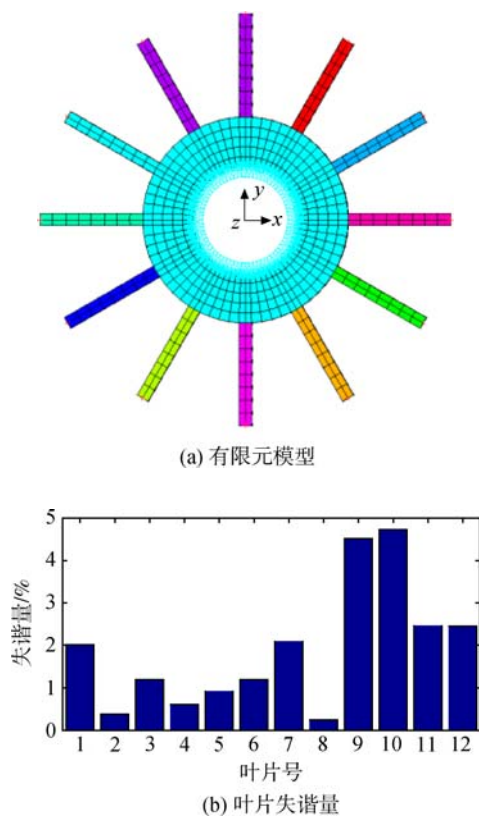


图 5 简化叶盘结构的有限元模型

Fig. 5 Finite element model of simplified bladed disk

以失谐叶盘整体模型计算结果为基准,对比周期对称模型迭代法和预测位形法的精度.施加 0 节径的激励,频率为 1074 Hz(叶片一弯频率族).同样考虑不同容差和不同步长下的响应结果,这里计算 100 个周期的响应,以验证算法的长期稳定性,最后一个周期的响应和误差如图 6 所示.

图 6(a)表示步长为 $T/40$ 时分别采用迭代(两种容差 10^{-4} 和 10^{-6})、预测位形法和整体模型得到的响应结果.从图中可以看出,以失谐叶盘整体模型的结果为基准,迭代法和预测位形法都能得到较为准确响应结果,最大幅值误差为 0.14%.为了更加清晰地对算法进行比较,图 6(b)给出了几种方法得到的响应误差.从图中可以看出,当对容差要求相当较高时,与单自由度相比,本算例中迭代法的精度对步长更加敏感,而对容差并不敏感.与单自由度的情况相同,预测位形法的精度比迭代法稍差,但当步长减小至 $T/80$ 时,其精度与迭代法接近.

图 7 表示当步长为 $T/80$ 时,第 100 个周期

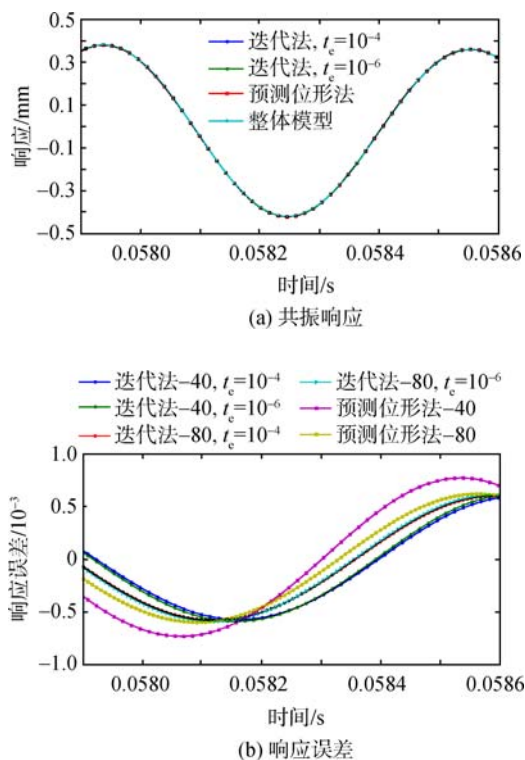


图 6 简化叶盘结构的共振响应及其误差

Fig. 6 Resonant responses and errors of simplified bladed disk

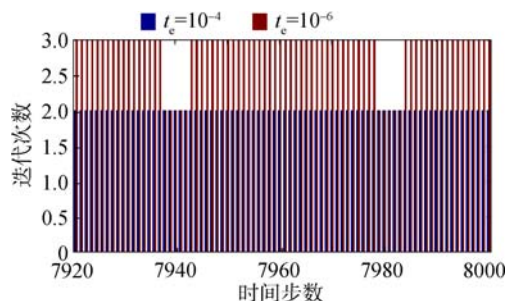


图 7 不同容差下迭代法每时间步的迭代次数

Fig. 7 Number of iterations of each time step with different error tolerances

内每个时间步对应的迭代次数.从图中可以看出,对于这里给出的算例,当容差为 10^{-4} 时,每个时间步仅需 2 次即可满足精度要求,但当容差为 10^{-6} 时,多数时间步需要 3 次迭代才可满足精度要求.就前 100 个周期而言,前者平均每步需要 2.003 次迭代,后者需要 2.928 次迭代.

3.3 对结果的讨论

上文两个算例表明,迭代法和预测位形法都能利用扇区模型准确地预测整体失谐叶盘的响应.从计算结果可以看出

1) 迭代法的计算精度要明显高于位形预测

法.图6的误差结果表明,在同一步长情况下,每个时间步经过2次迭代即可明显地提高响应计算精度.

2) 提高迭代法容差要求能得到更为精确的响应结果,但每个时间步的迭代次数也相应的增加,如图7所示.

3) 位形预测法对积分时间步长较为敏感,当步长减小时其精度明显提高,如图3(b)和图6(b)所示.这主要是因为时间步长减小能提高位形预测的精度,因此得到的非线性失谐激励也更为准确.

4) 由于位形预测法不需要迭代计算,其计算效率显然要比迭代法高至少1倍(迭代法至少需要2次迭代).

5) 这里对两个算例都进行了较多周期的计算,得到了稳定的响应幅值,结果表明所提出的两种算法都是稳定的.

4 结 论

本文给出了利用周期对称性计算失谐叶盘瞬态响应的迭代法和预测位形法的算法和实现过程,两种方法都利用叶盘的扇区模型,将失谐部分作为非线性激励移至方程右端进行求解.文中以单自由度系统和简化叶盘结构为算例,验证了所提出的激励处理方式的稳定性和精确性.结果表明,在同样积分步长情况下,迭代法的精度(通过收敛容差)要高于预测位形法,但两种算法的精度都足以满足工程需求.由于位形预测法不需要迭代,因此其计算效率要明显高于迭代法.

与整体叶盘模型相比,这里提出的两种算法只需要一个扇区即可进行失谐叶盘的计算,大大降低了求解方程的规模和对系统矩阵存储的要求.同时,即使对于迭代法而言,在合理的积分步长情况下,每个时间步仅需2~3次迭代即可得到较高精度的响应,而若采用预测位形法则不需要进行迭代,大大提高了失谐叶盘瞬态分析的计算效率.

需要特别指出的是,在失谐叶盘流固耦合瞬态分析的时间推进过程中,失谐激励与非定常流体激励类似,其大小和分布形式都取决于叶盘当前的运动状态,因此两种激励可以同时处理,这里对失谐激励的处理方式也借鉴了流固耦合中采用的耦合方法.采用文中所提出的对失谐的处理方式,利用一个扇区进行响应分析,在结构求解方面可大大提高计算效率,因此在流固耦合分析中具

有广阔的应用前景.

需要指出的是,这里对算法稳定性并未给出完整的理论证明.此外,还可以改进和开发新的预测位形的方法,通过更多的预测方式或加入校正步来提高计算精度.

参考文献:

- [1] 王建军,李其汉.航空发动机失谐叶盘振动减缩模型与应用[M].北京:国防工业出版社,2009.
- [2] 王建军,李其汉,朱梓根.失谐叶片-轮盘结构系统振动局部化问题的研究进展[J].力学进展,2000,30(4):517-528.
WANG Jianjun, LI Qihan, ZHU Zigen. Vibratory localization of mistuned bladed disk assemblies; a review[J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(4): 517-528. (in Chinese)
- [3] 臧朝平,兰海强.失谐叶盘结构振动问题研究新进展[J].航空工程进展,2011,2(2):133-142.
ZANG Chaoping, LAN Haiqiang. Advances in research vibration problem of mistuned blisk assemblies [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2011, 2(2): 133-142. (in Chinese)
- [4] Thomas D L. Dynamics of rotationally periodic structures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, 14(1): 81-102.
- [5] Williams F W. An algorithm for exact eigenvalue calculations for rotationally periodic structures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(4): 609-622.
- [6] Williams F W. Exact eigenvalue calculations for structures with rotationally periodic substructures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(4): 695-706.
- [7] Fricker A J, Potter S. Transient forced vibration of rotationally periodic structures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, 17(7): 957-974.
- [8] 张锦,陈向均,王文亮.转动盘-片系的循环对称模综[J].固体力学学报,1992,13(3):225-234.
ZHANG Jin, CHEN Xiangjun, WANG Wenliang. Cyclo-symmetric modal synthesis of rotating bladed disc system [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1992, 13(3): 225-234. (in Chinese)
- [9] 张锦,刘晓平.叶轮机振动模态分析理论与数值方法[M].北京:国防工业出版社,2001.
- [10] Zhang J, Chen X J, Wang W L. Dynamic analysis technique of rotating centrifugal impeller [R]. Orlando, Florida, USA: ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, 1991.
- [11] Feiner D, Griffin J H. A Fundamental model of mistuning for a single family of modes [J]. Journal of Turbomachinery, 2002, 124(4): 597-605.
- [12] Martel C, Corral R. Asymptotic description of maximum mistuning amplification of bladed disk forced response [J].

- Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 2009, 131(2): 311-324.
- [13] Tran D M. Reduced models of multi-stage cyclic structures using cyclic symmetry reduction and component mode synthesis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(2): 5443-5463.
- [14] Laxalde D, Thouverez F, Lombard J P. Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures[J]. Mechanics Research Communications, 2007, 34(4): 379-384.
- [15] Laxalde D, Pierre C. Modelling and analysis of multi-stage systems of mistuned bladed disks[J]. Computers & Structures, 2011, 89(3/4): 316-324.
- [16] 姚建尧, 王建军. 周期对称性在叶盘结构瞬态响应求解中的应用[J]. 航空动力学报, 2011, 26(2): 385-391.
YAO Jianyao, WANG Jianjun. Application of cyclic symmetry properties in transient forced vibration of bladed disks[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(2): 385-391. (in Chinese)
- [17] 姚建尧. 流体激励下谐调和失谐整体叶盘结构响应分析[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2010.
YAO Jianyao. Response analysis for tuned and mistuned bladed disk under fluid excitation[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)
- [18] 姚建尧, 王建军, 李其汉. 基于振型节径谱的失谐叶盘结构动态特性评价[J]. 推进技术, 2011, 32(5): 645-653.
YAO Jianyao, WANG Jianjun, LI Qihan. Dynamic characteristics assessment of mistuned bladed disk using nodal diameter spectrum of mode shapes[J]. Journal of Propulsion Technology, 2011, 32(5): 645-653. (in Chinese)
- [19] Yao J, Wang J, Li Q. Improved mode localization and modal excitation factors for understanding mistuned bladed disk response[J]. Journal of Propulsion and Power, 2011, 27(1): 50-60.
- [20] Marshall J G, Imregun M. A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications[J]. Journal of Fluids and Structures, 1996, 10(3): 237-267.
- [21] Farhat C, Lesoinne M. Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 182(3): 499-515.
- [22] Farhat C, Vander Zee K G, Geuzaine P. Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(17/18): 1973-2001.
- [23] Yao J, Lin T, Liu G R, et al. A comparative study of time-marching schemes for fluid-structure interactions[J]. Vibroengineering Procedia, 2014, 4: 170-175.

(编辑: 秦理曼、王碧琚)