

直升机悬停纵向运动模态的耦合

陈 元, 陈仁良, 李 攀

(南京航空航天大学 直升机旋翼动力学国家级重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 针对直升机运动模态内状态量间的耦合, 提出了一种定量分析方法. 该方法基于解耦得到的运动模态, 结合气动导数矩阵, 定量描述运动模态内状态量间的耦合, 通过耦合的瞬时特性和积分特性定量区分各耦合. 以 Lynx, Bo105 和 Puma 直升机为例, 分析了三者悬停纵向运动模态的耦合特性. 分析表明, 纵向线速度通过空速稳定性对俯仰角速度的耦合作用在不稳定的悬停纵向振荡模态中起重要作用. 基于算例的定量分析, 筛选主要耦合得到简化模型, 因此得到的运动模态固有频率和阻尼比的偏差小于 2%, 优于文献中的简化模型, 说明了通过定量分析得到简化模型的可行性.

关 键 词: 直升机; 飞行动力学; 悬停; 运动模态; 耦合

中图分类号: V212.4

文献标志码: A

Couplings in helicopter hovering longitudinal motional modes

CHEN Yuan, CHEN Ren-liang, LI Pan

(National Key Laboratory of Rotorcraft Aeromechanics,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A quantitative analysis method was put forward, concentrating on couplings among state variables in helicopter motional modes. In the method, based on motional modes resulting from a decoupling procedure, couplings among state variables in motional modes were quantitatively described in combination with the matrix of aerodynamic derivatives. And all couplings were distinguished quantitatively by instantaneous characteristics and integrated characteristics. With the application into helicopters, Lynx, Bo105, and Puma, coupling characteristics of hovering longitudinal motional modes were analyzed. It showed that the coupling on pitching rate from longitudinal velocity by speed stability played a vital role in the unsteady hovering longitudinal oscillatory mode. Based on the quantitative analysis of examples, simplified models were obtained with the selection of main couplings, and the resulted deviation of natural frequency and damping ratio of motional modes was less than 2%, superior to simplified models in references. So it is feasible to obtain simplified models on the basis of the quantitative analysis.

Key words: helicopter; flight dynamics; hovering; motional mode; coupling

直升机能够垂直起降和空中悬停, 完成其他飞行器难以完成的任务, 应用广泛. 对于单旋翼带尾桨构型直升机, 旋翼同时扮演升力面、操纵面和推进器的角色, 全机布局极为紧凑且不具有对称

性, 因此存在较强烈的气动耦合和惯性耦合. 由于直升机的悬停状态与固定翼飞机的飞行状态有着较大差别, 且该状态的稳定性比较不理想^[1], 耦合在悬停状态表现得尤为突出. 通过研究悬停状态

收稿日期: 2015-02-03

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(51405227); 中央高校基本科研业务费专项资金(NS2014011)

作者简介: 陈元(1989—), 男, 江苏南通人, 博士生, 主要从事直升机飞行动力学研究.

的运动模态,阐明直升机悬停状态的耦合特性,有益于指导直升机设计和改善飞行品质.

国内外众多学者针对直升机的运动模态做了大量的研究.20世纪中叶,Gessow和Amer^[2]通过类比的方式,介绍了直升机静稳定性导数的物理意义以及直升机运动模态的耦合特性.此后,众多研究针对不同目的在建立了直升机飞行动力学模型的基础上研究了直升机的运动模态,着重研究模态稳定性^[3-9].国内研究人员^[10-19]从模态耦合、飞行性能和飞行品质等多个侧重点研究了直升机运动模态.然而直到21世纪初,Bramwell等^[20]和Padfield^[21]针对悬停纵向运动模态,都只是运用简化模型分析模态的稳定性,对于模态内的耦合则只是进行了定性的分析.其中,简化模型在某些情况下偏差较大,而且定性分析无法全面揭示耦合特性.

本文的目的是定量地分析直升机悬停纵向运动模态的耦合特性.首先,用线性变换描述直升机配平状态的零输入扰动自由响应,通过主坐标将系统解耦,在物理坐标下描述解耦得到的各运动模态.然后,研究模态中对状态量的变化产生贡献的各个耦合因素,针对实模态和复模态分别研究耦合的瞬时特性和积分特性,区分运动模态中各耦合的相对强弱和加剧/衰减特性.最后,以Lynx,Bo105和Puma为算例,定量分析悬停纵向固有模态的耦合机理,并根据定量分析得到简化模型.

1 数学模型

直升机的体轴系速度、角速度和机身姿态组成状态向量 $\mathbf{y}$,设 $\mathbf{y}$ 张成 n 维线性空间 $\mathbf{V}$,则状态向量的导数 $\dot{\mathbf{y}}$ 也属于 $\mathbf{V}$.旋翼总距、旋翼纵横向周期变距,以及尾桨总距组成操纵向量 $\mathbf{u}$,设 $\mathbf{u}$ 张成 s 维线性空间 $\mathbf{U}$.则从 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{u}$ 到 $\dot{\mathbf{y}}$ 的映射关系为^[22-24]

$$L: (\mathbf{y}, \mathbf{u}) \rightarrow \dot{\mathbf{y}} \quad (1)$$

式中 L 为线性空间 $\mathbf{V}+\mathbf{U}$ ($\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{U}$ 的直和)到 $\mathbf{V}$ 的一个映射,其对应法则就是直升机的强耦合非线性飞行动力学模型.在规定平飞速度下, $\mathbf{V}$ 中的零元素在 $\mathbf{V}+\mathbf{U}$ 中的原像为直升机的配平状态,记为 $(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$.

为了分析强耦合,在 $(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$ 的足够小邻域内用一个线性映射逼近映射 L ,并令操纵向量始终为配平值 $\mathbf{u}_0$,研究受扰自由响应.由此得到线性

空间 $\mathbf{V}$ 上的线性变换,设为 $\mathbf{A}$,则

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(\Delta \mathbf{y}) \quad (2)$$

式中 $\Delta \mathbf{y}$ 为 $\mathbf{y}$ 相对于 $\mathbf{y}_0$ 的扰动量.

线性变换 $\mathbf{A}$ 在不同的基下的表达是等价的,设线性空间 $\mathbf{V}$ 的两组基为

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (3)$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{E}$ 为常用的标准正交基,即

$$\mathbf{e}_i = [0 \quad \dots \quad 0_{(i-1)} \quad 1_{(i)} \quad 0_{(i+1)} \quad \dots \quad 0]^T \quad (5)$$

设从 $\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{N}$ 的过渡矩阵为 $\mathbf{W}$,两组基下与线性变换 $\mathbf{A}$ 对应的矩阵分别为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$,且

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_i]_{1 \leq i \leq n} \quad (6)$$

式中对角阵 $\mathbf{\Lambda}$ 存在的条件是 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量^[24].对于直升机来说, $\mathbf{A}$ 对应配平状态的气动导数矩阵,且通常有 n 个线性无关的特征向量. λ_i 为 $\mathbf{A}(\mathbf{A})$ 的特征值,过渡矩阵 $\mathbf{W}$ 的第 i 列为与 λ_i 对应的右特征向量.由特征值和特征向量组成的特征对即为运动模态.设 $\Delta \mathbf{y}$ 在基 $\mathbf{E}$ 下的坐标矩阵为 $\Delta \mathbf{y}$,在基 $\mathbf{N}$ 下的坐标矩阵为 $\mathbf{x}$,则两者满足

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{W} \mathbf{x} \quad (7)$$

则式(2)在两组基下分别为

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{x} \quad (9)$$

式(8)中通过 $\mathbf{A}$ 反映系统的耦合,各坐标具有明确的物理意义;式(9)中各坐标之间不存在耦合,但是各坐标往往没有明确的物理意义.故而,基 $\mathbf{E}$ 下的坐标 $\Delta \mathbf{y}$ 称为物理坐标,基 $\mathbf{N}$ 下的坐标 $\mathbf{x}$ 称为广义坐标(或主坐标),过渡矩阵 $\mathbf{W}$ 称为解耦矩阵^[25].设式(2)的初始条件为

$$\Delta \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{E}(\Delta \mathbf{y}|_{t=0}) = \mathbf{N} \mathbf{x}_0 \quad (10)$$

则解为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}(t) &= \mathbf{N} \text{diag}[\exp(\lambda_i t)] \mathbf{x}_0 = \\ &\mathbf{E} \mathbf{W} \text{diag}[\exp(\lambda_i t)] \mathbf{W}^{-1} \Delta \mathbf{y}|_{t=0} \end{aligned} \quad (11)$$

当 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_m$ 时(m 为1至 n 间的正整数),即当 $\Delta \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{W} \mathbf{e}_m$ 时, $\Delta \mathbf{y}$ 描述的是第 m 阶固有模态的纯模态自由运动.因此,在物理坐标下,第 m 阶固有模态满足

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{y}}_j &= \lambda_m \Delta \mathbf{y}_j = \sum_{k=1}^n (\mathbf{A}_{jk} \Delta \mathbf{y}_k) = \\ &\mathbf{e}^{\lambda_m t} \sum_{k=1}^n (\mathbf{A}_{jk} \mathbf{W}_{km}) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)表明第 m 阶固有模态中任一状态量的变

化与气动导数矩阵、特征值和特征向量均相关. 为了便于分析, 令第 m 阶固有模态中第 k 个状态量对第 j 个状态量的耦合作用因子为

$$C_{m,jk} \triangleq A_{jk} W_{km} \quad (13)$$

代入式(12), 得

$$\Delta \dot{y}_j = \sum_{k=1}^n (e^{\lambda_m t} C_{m,jk}) \quad (14)$$

由式(12)和式(14)所反映的复平面内耦合关系, 如图 1 所示. 其中 $\eta(\lambda_m)$ 表示 λ_m 的相位

$$\eta(\lambda_m) = \begin{cases} \operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\lambda_m)] \arccos(-\zeta_m) & |\zeta_m| < 1 \\ \pi & \zeta_m \geq 1 \\ 0 & \zeta_m \leq -1 \end{cases} \quad (15)$$

式中 ζ_m 为第 m 阶模态的阻尼比, 表征了模态阻尼的强弱; $\operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\lambda_m)]$ 辨别 λ_m 虚部的符号, 区分一对共轭模态. 由图 1 可知, 各个 Δy_k 对 $\Delta \dot{y}_j$ 的贡献 ($A_{jk} \Delta y_k$) 的幅值和相位不尽相同, 由于存在公共项 $\exp(\lambda_m t)$, 可直接通过 $C_{m,jk}$ 与 W_{jm} 的关系分析耦合作用的性质.

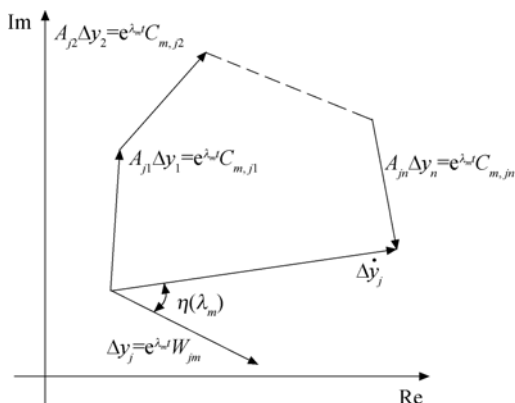


图 1 复平面内耦合关系简图

Fig. 1 Diagram of couplings in complex plane

零特征值模态无需研究耦合. 下面分别分析非零实模态和复模态内状态量间的耦合特性.

1.1 实模态的耦合

对于非零实模态, 图 1 中的 $A_{jk} \Delta y_k$ 和 Δy_j 均在实轴上. 任一时刻, 当 $A_{jk} \Delta y_k$ 和 Δy_j 同号时, 即 $C_{m,jk}$ 与 W_{jm} 同相位, Δy_k 对 Δy_j 的耦合使 $|\Delta y_j|$ 有变大的趋势, 起加剧作用; 反之, 起衰减作用. 因此, 可用如下判据判断某时刻的耦合性质:

$$\alpha_{m,jk} = \eta(C_{m,jk}) - \eta(W_{jm}) = \begin{cases} 0 & \text{加剧} \\ \pi & \text{衰减} \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\eta(C_{m,jk})$ 和 $\eta(W_{jm})$ 分别为 $C_{m,jk}$ 和 W_{jm} 的相

位; $\alpha_{m,jk}$ 为任一时刻 Δy_k 对 Δy_j 的耦合与 Δy_j 的相位差. $|C_{m,jk}|$ 的相对大小则表征了耦合作用的强弱. 若某时刻 $C_{m,jk}$ 起加剧(衰减)作用, 则任何时刻、任意时间段内均起加剧(衰减)作用, 这是由于

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} C_{m,jk} e^{\lambda_m t} dt = \frac{[e^{\lambda_m t_0} (e^{\lambda_m \Delta t} - 1) / \lambda_m]}{C_{m,jk}} \quad (17)$$

式中 $\lambda_m \neq 0, \forall t_0, \Delta t \in [0, +\infty)$. 由于 $C_{m,jk}$ 前的系数始终为正, 因此得证. 从而 $|C_{m,jk}|$ 能表征任何时刻和任意时间段内耦合的相对强弱.

1.2 复模态的耦合

对于复模态, 某时刻, 当 $A_{jk} \Delta y_k$ 与 Δy_j 在实轴上的投影同号时, $A_{jk} \Delta y_k$ 使 $|\operatorname{Re}(\Delta y_j)|$ 有变大的趋势, 起加剧作用; 反之, 起衰减作用. 复模态中的耦合会发生周期性变化, 周期 T_m 为

$$T_m = 2\pi / |\operatorname{Im}(\lambda_m)| \quad (18)$$

一个运动周期内, 当 $A_{jk} \Delta y_k$ 与 Δy_j 在复平面内的夹角为锐角时, 则起加剧作用的时间将大于半个周期; 为钝角时, 反之; 为直角时, 各占一半. 因此, 可根据 $\alpha_{m,jk}$ 判断耦合性质的时间特性, 即

$$\tau_{\text{agg}} \triangleq 1 - \frac{|\alpha_{m,jk}|}{\pi} \quad \begin{cases} \in [0.5, 1), |\alpha_{m,jk}| \leq \pi/2 \\ \in [0, 0.5), \pi/2 < |\alpha_{m,jk}| \leq \pi \end{cases} \quad (19)$$

式中 $\alpha_{m,jk} \in (-\pi, \pi]$; τ_{agg} 表征了耦合作用的瞬时特性, 即一个周期内 Δy_k 对 Δy_j 起加剧作用的时间占比. 如果某耦合满足 $\tau_{\text{agg}} > 0.5$, 那么一个周期后该耦合是否一定使 $|\Delta y_j|$ 变大? 为此, 将式(17)用于复模态, 并令 $\Delta t = T_m$, 则 Δy_k 对 Δy_j 的耦合经过一个周期引起的 Δy_j 的变化为

$$\int_{t_0}^{t_0+T_m} C_{m,jk} e^{\lambda_m t} dt = \left\{ \left| \exp \left[2\pi \frac{\operatorname{Re}(\lambda_m)}{|\operatorname{Im}(\lambda_m)|} \right] - 1 \right| \cdot \exp[\operatorname{Re}(\lambda_m) t_0 + i\eta(\Delta y_j |_{t_0})] / |\lambda_m| \right\} \cdot$$

$$\{ |C_{m,jk}| e^{i\beta_{m,jk}} \} \quad (20)$$

其中第 1 个大括号中的值在复平面内与 Δy_j 同相位. 第 2 个括号反映了耦合的周期积分特性, $\beta_{m,jk}$ 为决定耦合周期积分特性的相位差

$$\beta_{m,jk} = \alpha_{m,jk} - \arctan[\operatorname{Im}(\lambda_m) / \operatorname{Re}(\lambda_m)] \quad (21)$$

当 $\operatorname{Re}(\lambda_m) = 0$ 时, 为无阻尼简谐振荡, 式(20)始终为 0, 即周期积分不产生耦合作用. 当 $\operatorname{Re}(\lambda_m) \neq 0$ 时, 将式(20)后一个大括号中的值分解, 得

$$|C_{m,jk}| e^{i\beta_{m,jk}} = C_{//} + iC_{\perp} = |C_{m,jk}| \cos \beta_{m,jk} + e^{i\frac{\pi}{2}} |C_{m,jk}| \sin \beta_{m,jk} \quad (22)$$

上式中 $C_{//}$ 为沿着 Δy_j 的分量, $C_{//} > 0$ 表明经过一个周期 $A_{jk} \Delta y_k$ 使 $|\Delta y_j|$ 增加, 起加剧作用; 反之起衰减作用; 为零, 则无作用. $|C_{//}|$ 表征耦合的强弱. $C_{\perp}$ 为垂直 Δy_j 的分量, 各耦合所对应的 $C_{\perp}$ 相互抵消. 值得注意的是, 当 $|\alpha_{m,j,k}| < \pi/2$ 时, $\tau_{\text{agg}} > 0.5$, 但 $|\beta_{m,j,k}|$ 可能大于 $\pi/2$, 使得 $C_{//} < 0$. 这说明, 某耦合尽管 $\tau_{\text{agg}} > 0.5$, 但是经过一个周期后, 该耦合作用却有可能使 $|\Delta y_j|$ 减小, 起衰减作用; 反之, 亦有可能.

2 算例分析

根据上述分析, 直升机纵向“小扰动”状态向量在基 $\mathbf{E}$ 下的坐标阵为

$$\Delta \mathbf{y} = [\Delta u \quad \Delta w \quad \Delta q \quad \Delta \theta]^T \quad (23)$$

式中 4 个状态量分别为直升机体轴系下的纵向速度、垂向速度、俯仰角速度以及机身俯仰姿态的“小扰动”量. 线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 $\mathbf{E}$ 下对应的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dot{u}_u & \dot{u}_w & \dot{u}_q & \dot{u}_\theta \\ \dot{w}_u & \dot{w}_w & \dot{w}_q & \dot{w}_\theta \\ \dot{q}_u & \dot{q}_w & \dot{q}_q & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中下标 u 表示对 u 的偏导数, 其余类似; γ_0 为

悬停配平状态的机身滚转姿态.

直升机悬停状态的纵向固有运动模式通常包括周期发散的纵向振荡模式 (令 $m=3, 4$) 以及单调收敛的俯仰模式和垂向模式 (令 $m=2$ 和 1). 文献[21]给出了 Lynx, Bo105 和 Puma 悬停状态的气动导数矩阵 $\mathbf{A}$, 可得到相应的运动模式 (见附录 A).

2.1 悬停纵向振荡模式的耦合分析

一对共轭的悬停纵向振荡模式, 两者除了相位相反其余特性相同, 只需分析正虚轴分支 ($m=3$). 耦合的定量分析结果如表 1~表 3 所示. 表中给出了作用于 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合作用瞬时幅值 ($|C_{m,jk}|$)、相位差 ($\alpha_{m,jk}$)、加剧作用时间比 (τ_{agg}) 和积分特性 ($C_{//}$). $\Delta \theta$ 的变化仅与 Δq 有关, 为运动学关系, 较简单, 表中未列出. 表中, $|C_{m,jk}|$ 对应的列表征的耦合幅值, 最大值为 100%, 其余耦合通过百分比表征相对强弱; $C_{//}$ 对应的列所表征的 4 个积分特性的和为 100%, 各个积分特性的相对强弱也用百分比表征.

对于 Lynx (表 1), 对 Δu 瞬时幅值最大的是 $C_{3,14}$, 即 $\Delta \theta$ 对 Δu 的作用, 一个周期内略超过一半的时间起加剧作用; 周期积分使 Δu 加剧. 其余

表 1 Lynx 悬停纵向振荡模式中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合

Table 1 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering longitudinal oscillatory mode of Lynx

k	$ C_{3,1k} / 10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{3,1k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$	$ C_{3,2k} / 10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{3,2k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$	$ C_{3,3k} / 10^{-2}$ (rad/s ²)	$\alpha_{3,3k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$
1	4.13	180	0	-0.48	66.77	1.16	0.9936	8.99	100	13.67	0.9241	144.99
2	0.34	-1.16	0.9936	0.03	65.99	180	0	-7.58	0.89	12.51	0.9305	1.21
3	3.26	-13.67	0.9241	-0.40	0.89	-12.51	0.9305	-0.09	95.24	180	0	-46.20
4	100	83.01	0.5388	100.85	100	84.17	0.5324	98.68	0	0	0	0

表 2 Bo105 悬停纵向振荡模式中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合

Table 2 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering longitudinal oscillatory mode of Bo105

k	$ C_{3,1k} / 10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{3,1k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$	$ C_{3,2k} / 10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{3,2k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$	$ C_{3,3k} / 10^{-2}$ (rad/s ²)	$\alpha_{3,3k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$
1	4.07	180	0	-0.27	44.88	-9.31	0.9483	-4.70	100	7.79	0.9567	149.80
2	0.08	9.31	0.9483	0.02	57.18	180	0	-4.16	0.52	-162.90	0.0950	-1.38
3	3.73	-7.79	0.9567	-0.26	4.18	162.90	0.0950	1.05	97.69	180	0	-48.42
4	100	86.03	0.5221	100.51	100	76.72	0.5738	107.81	0	0	0	0

表 3 Puma 悬停纵向振荡模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合Table 3 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering longitudinal oscillatory mode of Puma

k	$ C_{3,1k} / 10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{3,1k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$	$ C_{3,2k} / 10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{3,2k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$	$ C_{3,3k} / 10^{-2}$ (rad/s ²)	$\alpha_{3,3k} / (^\circ)$	τ_{agg}	$C_{//} / \%$
1	4.33	180	0	-1.28	79.18	104.59	0.4189	93.07	100	34.55	0.8081	134.25
2	0.04	75.41	0.5811	0.04	58.27	180	0	-23.24	1.07	-70.04	0.6109	-1.47
3	2.73	-34.55	0.8081	-0.85	1.79	-109.96	0.3891	-2.46	65.87	180	0	-32.78
4	100	72.28	0.5984	102.09	100	-3.13	0.9826	32.63	0	0	0	0

耦合作用较微弱,瞬时幅值和周期积分均不及 $C_{3,14}$ 的 5%。对 Δw 瞬时幅值最大的是 $C_{3,24}$,即 $\Delta \theta$ 对 Δw 的作用,特性类似于 $C_{3,14}$ 。其次是 $C_{3,21}$,即 Δu 对 Δw 的耦合,瞬时幅值约为 $C_{3,24}$ 的 2/3,一个周期内超过 99% 的时间起加剧作用;周期积分的加剧作用不足 $C_{3,24}$ 周期积分的 10%。再其次是 $C_{3,22}$,即 Δw 对自身的衰减作用(垂向阻尼),瞬时幅值略小于 $C_{3,21}$;周期积分的衰减作用也很小。此外, $C_{3,23}$ 很微弱,瞬时幅值和周期积分均不足 $C_{3,24}$ 的 1%。对 Δq 瞬时耦合作用幅值最大的是 $C_{3,31}$,即 Δu 对 Δq 的耦合(空速稳定性),一个周期内超过 90% 的时间起加剧作用;周期积分使 Δq 加剧。其次是 $C_{3,33}$,即 Δq 对自身的衰减作用(俯仰阻尼),瞬时幅值略小于 $C_{3,31}$;周期积分使 Δq 衰减,大小约为 $C_{3,31}$ 的 1/3。此外, $C_{3,32}$ 很微弱,瞬时幅值和周期积分均不足 $C_{3,31}$ 的 1%。

对于 Bo105(表 2),作用于 Δu 和 Δq 的耦合类似于 Lynx。作用于 Δw 的耦合中,除了 $C_{3,21}$,均类似于 Lynx。此处 $C_{3,21}$ 的瞬时幅值小于 $C_{3,22}$,且周期积分使 Δw 衰减。

对于 Puma(表 3),作用于 Δu 和 Δq 的耦合也类似于 Lynx。与 Lynx 相比,作用于 Δw 的耦合中, $C_{3,21}$ 一个周期内约 60% 的时间起衰减作用,但是周期积分却使 Δw 加剧;而 $C_{3,24}$ 一个周期内几乎始终起加剧作用,周期积分的大小却仅有 $C_{3,21}$ 的约 1/3。

该模态的主要运动量间(除垂向速度)的耦合可以概括为,空速稳定性的加剧作用强于俯仰阻尼的衰减作用,合作用对俯仰角速度产生加剧作用;俯仰角速度对俯仰姿态产生加剧作用;俯仰姿态对纵向速度产生加剧作用;纵向速度又通过空速稳定性对俯仰角速度产生加剧作用;模态运动因此而逐渐发散。

针对悬停纵向振荡模态,文献[21]采用了如

下简化分析模型

$$\lambda_{3,4}^2 - (\dot{u}_u + g\dot{q}_u/\dot{q}_q^2)\lambda_{3,4} - g\dot{q}_u/\dot{q}_q = 0 \quad (25)$$

式中 g 为重力加速度(取 9.8 N/kg),是对 $\dot{u}_\theta$ 的近似。对比可知,用上式简化分析悬停纵向振荡模态,对于 Lynx 偏差很小;然而,对于 Bo105,阻尼比偏差达到了 -25.53%,对于 Puma,固有频率和阻尼比的偏差分别达到了 24.52% 和 83.84%。上述简化模型中所涉及的气动导数与本文定量分析得到的主要耦合基本一致(包含了不起显著作用的纵向阻尼 $\dot{u}_u$)。但是式(25)的结果却产生较大偏差,这是因为式(25)是通过假设俯仰模态特征值的模与纵向振荡模态特征值的模相差较大而得到的,而直升机悬停纵向气动导数并不总能满足该假设。仅考虑 $g, \dot{q}_u$ 和 $\dot{q}_q$,可得到关于 $\Delta u, \Delta q$ 和 $\Delta \theta$ 的 3 阶简化模型,该模态对应于特征方程的复根。利用文中 3 个算例机型验算可知,固有频率和阻尼比偏差均不足 2%。

2.2 悬停俯仰模态的耦合分析

悬停俯仰模态耦合的定量分析结果如表 4~表 6 所示。由于是实模态,只需给出 $|C_{m,jk}|$ 和 $\alpha_{m,jk}$ 。

对于 Lynx(表 4),对 Δu 作用最强的是 $C_{2,14}$,即 $\Delta \theta$ 对 Δu 的作用;其次是 $C_{2,13}$,即 Δq 对 Δu 的耦合,约是 $C_{2,14}$ 的 1/7,两者均起衰减作用;其余两个耦合很微弱,均不足 $C_{2,14}$ 的 2%。对 Δw 作用最强的是 $C_{2,24}$,即 $\Delta \theta$ 对 Δw 的作用,起衰减作用;其次是 $C_{2,21}$,即 Δu 对 Δw 的耦合,起加剧作用,约为 $C_{2,24}$ 的 1/5;再其次是 $C_{2,22}$,即 Δw 对自身的衰减作用(垂向阻尼),略弱于 $C_{2,21}$;此外, $C_{2,23}$ 较微弱,不足 $C_{2,24}$ 的 5%。对 Δq 耦合最强的是 $C_{2,33}$,即 Δq 对自身的衰减作用(俯仰阻尼);其余耦合较微弱,均不足 $C_{2,33}$ 的 10%。对于 Bo105(表 5),作用于 Δu 和 Δq 的耦合类似于 Lynx。对 Δw 作用最强的是 $C_{2,24}$,即 $\Delta \theta$ 对 Δw 的作用,起衰减作用;其次是 $C_{2,23}$,即 Δq 对 Δw 的耦合,起

加剧作用,约是 $C_{2,24}$ 的 $1/3$;其余耦合较微弱,均不足 $C_{2,33}$ 的 10% 。对于 Puma(表 6),对 Δu 作用最强的是 $C_{2,14}$,即 $\Delta\theta$ 对 Δu 的作用,起衰减作用;其余耦合很微弱,均不足 $C_{2,14}$ 的 5% 。对 Δw 耦合最强的是 $C_{2,22}$,即 Δw 对自身的衰减作用(垂向阻尼); $\Delta\theta$ 和 Δu 对 Δw 的衰减作用($C_{2,24}$ 和 $C_{2,21}$),分别约为 $C_{2,22}$ 的 $3/4$ 和 $2/5$; $C_{2,23}$ 很微弱,不足 $C_{2,22}$ 的 5% 。对 Δq 作用最强的是 $C_{2,33}$,即 Δq 对自身的衰减作用(俯仰阻尼);其次是 $C_{2,31}$,即 Δu 对 Δq 的耦合(空速稳定性),起衰减作用,约是 $C_{2,33}$ 的 $1/2$; $C_{2,32}$ 很微弱,不足 $C_{2,33}$ 的 5% 。

表 4 Lynx 悬停俯仰模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合

Table 4 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering pitch mode of Lynx

k	$ C_{2,1k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{2,1k}/^\circ$	$ C_{2,2k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{2,2k}/^\circ$	$ C_{2,3k} /10^{-2}$ (rad/s^2)	$\alpha_{2,3k}/^\circ$
1	1.13	180	18.24	0	6.76	180
2	0.08	0	15.51	180	0.05	180
3	13.83	180	3.77	180	100	180
4	100	180	100	180	0	0

表 5 Bo105 悬停俯仰模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合

Table 5 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering pitch mode of Bo105

k	$ C_{2,1k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{2,1k}/^\circ$	$ C_{2,2k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{2,2k}/^\circ$	$ C_{2,3k} /10^{-2}$ (rad/s^2)	$\alpha_{2,3k}/^\circ$
1	0.71	180	7.78	0	2.38	180
2	0.01	0	5.60	180	0.01	0
3	27.76	180	31.12	0	100	180
4	100	180	100	180	0	0

表 6 Puma 悬停俯仰模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合

Table 6 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering pitch mode of Puma

k	$ C_{2,1k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{2,1k}/^\circ$	$ C_{2,2k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{2,2k}/^\circ$	$ C_{2,3k} /10^{-2}$ (rad/s^2)	$\alpha_{2,3k}/^\circ$
1	2.74	180	37.94	180	55.34	180
2	0.09	0	100	180	2.12	0
3	4.73	180	2.35	180	100	180
4	100	180	75.79	180	0	0

文献[21]中认为该模态只需考虑俯仰角速度,且

$$\lambda_2 = \dot{q}_q \quad (26)$$

对比可知,对于 Lynx 和 Bo105,上式偏差较小;但对于 Puma 会带来较大偏差(-34.73%)。而且, Puma 的模态向量中, $\Delta u/\Delta q$ 较大。根据上述耦合分析, Lynx 和 Bo105 的俯仰模态中俯仰阻尼对 Δq 起主要作用; Puma 中则还包括空速稳定性。对比气动导数矩阵可以发现, Puma 的俯仰阻尼明显弱于 Lynx 和 Bo105,这可能是偏差较大的原因。因此,仅考虑 $\dot{u}_q, g, \dot{q}_u$ 和 $\dot{q}_q$, 可得到 $\Delta u, \Delta q$ 和 $\Delta\theta$ 的 3 阶简化模型,其中的实根对应俯仰模态。用文中 3 个算例机型验算,特征值偏差不足 1% 。

2.3 悬停垂向模态的耦合分析

悬停垂向模态耦合的定量分析结果如表 7~表 9 所示。对于 Lynx(表 7),对 Δu 耦合最强的是 $C_{1,12}$,即 Δw 对 Δu 的耦合;其次是 $C_{1,14}$,即 $\Delta\theta$ 对 Δu 的作用,接近 $C_{1,12}$ 的 50% ;其余两个耦合较微弱,均不及 $C_{1,12}$ 的 10% 。4 个耦合皆起衰减作用。对 Δw 耦合最强的是 $C_{1,22}$,即 Δw 对自身的衰减作用(垂向阻尼);其余 3 个耦合很微弱,均不足 $C_{1,22}$ 的 1% 。对 Δq 耦合最强的是 $C_{1,32}$,即 Δw 对 Δq 的耦合(迎角稳定性),起加剧作用;其次是 $C_{1,31}$ 和 $C_{1,33}$,即空速稳定性和俯仰阻尼,两者之和强于 $C_{1,32}$ 的加剧作用; $\Delta\theta$ 对 Δq 无直接耦合。对于 Bo105(表 8),对 Δu 作用最强的是 $C_{1,14}$,即 $\Delta\theta$ 对 Δu 的作用,起衰减作用;其次是 $C_{1,12}$,即 Δw 对 Δu 的耦合,起加剧作用,不及 $C_{1,14}$ 的 $1/3$;其余两个耦合较微弱,均不及 $C_{1,14}$ 的 10% 。作用于 Δw 和 Δq 的耦合类似于 Lynx。对于 Puma(表 9),对 Δu 作用最强的是 $C_{1,14}$,即 $\Delta\theta$ 对 Δu 的作用,起衰减作用;其余 3 个耦合较微弱,均不足 $C_{1,14}$ 的 10% 。作用于 Δw 和 Δq 的耦合与 Lynx 和 Bo105 类似。

表 7 Lynx 悬停垂向模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合

Table 7 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering vertical mode of Lynx

k	$ C_{1,1k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{1,1k}/^\circ$	$ C_{1,2k} /10^{-2}$ (m/s^2)	$\alpha_{1,2k}/^\circ$	$ C_{1,3k} /10^{-2}$ (rad/s^2)	$\alpha_{1,3k}/^\circ$
1	9.91	180	0.82	180	91.12	180
2	100	180	100	180	100	0
3	0.96	180	0.001	0	10.63	180
4	44.84	180	0.23	0	0	0

表 8 Bo105 悬停垂向模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合Table 8 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering vertical mode of Bo105

k	$ C_{1,1k} /10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{1,1k}/$ (°)	$ C_{1,2k} /10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{1,2k}/$ (°)	$ C_{1,3k} /10^{-2}$ (rad/s ²)	$\alpha_{1,3k}/$ (°)
1	5.22	180	0.28	0	69.61	180
2	27.78	0	100	180	100	0
3	2.33	180	0.01	0	33.26	180
4	100	180	0.49	180	0	0

表 9 Puma 悬停垂向模态中 $\Delta u, \Delta w$ 和 Δq 的耦合Table 9 Couplings on $\Delta u, \Delta w$ and Δq in hovering vertical mode of Puma

k	$ C_{1,1k} /10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{1,1k}/$ (°)	$ C_{1,2k} /10^{-2}$ (m/s ²)	$\alpha_{1,2k}/$ (°)	$ C_{1,3k} /10^{-2}$ (rad/s ²)	$\alpha_{1,3k}/$ (°)
1	5.50	180	1.30	180	89.58	180
2	5.26	0	100	180	100	0
3	2.25	180	0.02	180	38.24	180
4	100	180	1.29	180	0	0

类似于俯仰模态,文献[21]用于分析该模态的简化模型中只考虑垂向速度,且

$$\lambda_1 = \dot{w}_w \quad (27)$$

对比可知,用垂向阻尼近似垂向模态的特征值,偏差很小.而通过上述分析可知,垂向阻尼在对 Δw 的耦合中确实占据了主导.因此,式(27)的简化是合理的.

3 结 论

1) 通过结合气动导数矩阵和固有模态提出的运动模态中耦合定量分析方法,有效分析了直升机悬停纵向运动模态中状态量间的耦合.

2) 通过对 3 个算例机型的耦合分析发现:纵向速度通过空速稳定性对俯仰角速度的耦合在不稳定的悬停纵向振荡模态中起到了重要作用;纵向速度的自身阻尼在悬停纵向模态中的作用较小,可以忽略.

3) 根据本文的耦合定量分析结果可以辨别运动模态中的主要耦合,且据此可进一步得到有效的简化分析模型.

参考文献:

[1] Watkinson J. The art of the helicopter [M]. London:

Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004: 1-2.

- [2] Gessow A, Amer K B. An introduction to the physical aspects of helicopter stability[R]. Washington DC: National Advisory Committee for Aeronautics Report 993, 1950.
- [3] Frederick D K. Formulation and validation of high-order mathematical methods of helicopter flight dynamics[D]. Washington DC: University of Maryland, 1991.
- [4] Takahashi M D. A flight-dynamic helicopter mathematical model with a single flap-lag-torsion main rotor[R]. NASA TM 102267, 1990.
- [5] Thanapalan K, Wong T M. Modeling of a helicopter with an under-slung load system[C]// Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. Beijing: the Technical Committee on Control Theory of the Chinese Association of Automation, 2010: 1451-1456.
- [6] Kendrick S A, Walker D J. The modelling simulation and control of helicopters operating with external loads[C]// Proceedings of the 62nd AHS Annual Forum. Phoenix, Arizona, US: AHS International, 2006: 1022-1035.
- [7] Oktay T, Sultan C. Modeling and control of a helicopter slung-load system[J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 29(1): 206-222.
- [8] Adams C J. Modeling and control of helicopters carrying suspended loads [D]. Atlanta, US: Georgia Institute of Technology, 2012.
- [9] Bisgaard M. Modeling, estimation, and control of helicopter slung load system [D]. Aalborg East, Denmark: Aalborg University, 2007.
- [10] 曹义华, 许心钰. 计及诱速不均匀挥扭耦合的直升机侧风稳操特性[J]. 南京航空学院学报, 1988, 20(3): 34-48.
- CAO Yihua, XU Xinyu. Stability and controllability of helicopters under lateral gust with uneven induced velocity and flap-pitch-torsion coupling [J]. Journal of Nanjing Aeronautical Institute, 1988, 20(3): 34-48. (in Chinese)
- [11] 苏媛, 曹义华. 直升机动稳定性分析和增稳系统控制律设计[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 28(6): 636-639.
- SU Yuan, CAO Yihua. Dynamic stability analysis and control law design of stability augmentation system for helicopter[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(6): 636-639. (in Chinese)
- [12] 苏媛, 康丽霞, 袁坤刚, 等. 风切变场中直升机的稳定性和操纵性研究[J]. 航空计算技术, 2006, 36(2): 86-89.
- SU Yuan, KANG Lixia, YUAN Kungang, et al. Helicopter dynamic stability and control in wind shear field[J]. Aeronautical Computing Technique, 2006, 36(2): 86-89. (in Chinese)
- [13] 崔利, 曹义华, 李国知. 直升机吊挂飞行平衡、稳定性与操纵性研究[J]. 航空动力学报, 2010, 25(10): 2307-2311.
- CUI Li, CAO Yihua, LI Guozhi. Study on trims, stability, and controllability of helicopter with slung-load[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(10): 2307-2311. (in Chinese)
- [14] 曹龙, 曹义华, 李春华. 直升机-吊挂耦合系统平衡特性和稳定性分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(9):

- 1219-1224.
- CAO Long, CAO Yihua, LI Chunhua. Equilibrium characteristics and stability analysis of helicopter-slung-load coupling system[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 40(9): 1219-1224. (in Chinese)
- [15] 高正, 陈仁良. 直升机飞行动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 119-124.
- [16] 崔琰. 直升机吊挂飞行稳定性分析[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2005.
- CUI Ying. Stability analysis of a helicopter with an external slung load[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2005. (in Chinese)
- [17] 郑文东. 黑鹰直升机飞行特性研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.
- ZHENG Wendong. Research on Black Hawk helicopter flight characteristic[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009. (in Chinese)
- [18] 沈雳. 直升机飞行品质对设计参数的敏感性分析[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
- SHEN Li. Design sensitivity analysis for helicopter handling qualities[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)
- [19] 齐万涛, 陈仁良. 直升机吊挂飞行稳定性和操纵性分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2011, 43(3): 406-412.
- QI Wantao, CHEN Renliang. Stability and control characteristic analysis for flight of helicopter with slung-load[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011, 43(3): 406-412. (in Chinese)
- [20] Bramwell A R S, Done G, Balmford D. Bramwell's helicopter dynamics[M]. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001: 160-174.
- [21] Padfield G D. Helicopter flight dynamics: the theory and application of flying qualities and simulation modelling[M]. 2nd ed. Washington DC: AIAA, 2007: 236-251.
- [22] 李攀. 旋翼非定常自由尾迹及高置信度直升机飞行力学建模研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
- LI Pan. Rotor unsteady free-vortex wake model and investigation on high-fidelity modeling of helicopter flight dynamics[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)
- [23] Chen R T N. A simplified rotor system mathematical model for piloted flight dynamics simulation[R]. NASA TM 78575, 1979.
- [24] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 45-70.
- [25] Thomson W T, Dahleh M D. Theory of Vibration with Application[M]. 5th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 126-189.

附录 A:

式(A1)~式(A3)给出了 Lynx, Bo105 和 Puma 的悬停纵向矩阵^[21].

$$\mathbf{A}_{\text{Lynx}} = \begin{bmatrix} -0.0199 & 0.0215 & 0.6674 & -9.7837 \\ 0.0237 & -0.3108 & 0.0134 & -0.7215 \\ 0.0468 & 0.0055 & -1.8954 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9985 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{A}_{\text{Bo105}} = \begin{bmatrix} -0.0211 & 0.0113 & 0.7086 & -9.8029 \\ 0.0091 & -0.3220 & -0.0311 & -0.3838 \\ 0.1045 & -0.0151 & -3.7472 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9990 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{A}_{\text{Puma}} = \begin{bmatrix} -0.0176 & 0.0076 & 0.6717 & -9.8063 \\ -0.0092 & -0.3195 & 0.0126 & -0.2803 \\ 0.0113 & -0.0057 & -0.4506 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9989 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

求得固有模态分别如表 A1~表 A3 所示. 表中, 下标 $m=1, 2, 3, 4$ 分别代表垂向模态、俯仰模态和一对共轭纵向振荡模态; λ_m 为模态特征值, 单位为 $1/\text{s}$; $[\mathbf{W}_{1m} \ \mathbf{W}_{2m} \ \mathbf{W}_{3m} \ \mathbf{W}_{4m}]^T$ 为特征向量, 分别对应于“小扰动”纵向速度 $\Delta u(\text{m/s})$ 、垂向速度 $\Delta w(\text{m/s})$ 、俯仰角速度 $\Delta q(\text{rad/s})$ 以及机身俯仰姿态 $\Delta \theta(\text{rad})$.

表 A1 Lynx 悬停纵向运动模态

Table A1 Hovering Longitudinal Motional Modes of Lynx

m	$\lambda_m/(1/s)$	$W_{1m}/(m/s)$	$W_{2m}/(m/s)$	$W_{3m}/(rad/s)$	W_{4m}/rad
1	$0.05552+0.47403i$	1	$0.07535-0.00152i$	$0.02285-0.00556i$	$-0.00598-0.04883i$
2	$0.05552-0.47403i$	1	$0.07535+0.00152i$	$0.02285+0.00556i$	$-0.00598+0.04883i$
3	-2.02452	1	0.06486	-0.36521	0.18012
4	-0.31262	-0.10709	1	0.00031	-0.00099

表 A2 Bo105 悬停纵向运动模态

Table A2 Hovering Longitudinal Motional Modes of Bo105

m	$\lambda_m/(1/s)$	$W_{1m}/(m/s)$	$W_{2m}/(m/s)$	$W_{3m}/(rad/s)$	W_{4m}/rad
1	$0.03430+0.51404i$	1	$0.03553+0.00583i$	$0.02699-0.00369i$	$-0.00366-0.05270i$
2	$0.03430-0.51404i$	1	$0.03553-0.00583i$	$0.02699+0.00369i$	$-0.00366+0.05270i$
3	-3.83626	-0.85479	-0.01738	1	-0.26041
4	-0.32264	0.10058	1	-0.00134	0.00415

表 A3 Puma 悬停纵向运动模态

Table A3 Hovering Longitudinal Motional Modes of Puma

m	$\lambda_m/(1/s)$	$W_{1m}/(m/s)$	$W_{2m}/(m/s)$	$W_{3m}/(rad/s)$	W_{4m}/rad
1	$0.11528+0.38105i$	1	$0.00534+0.02051i$	$0.01361-0.00937i$	$-0.01261-0.03948i$
2	$0.11528-0.38105i$	1	$0.00534-0.02051i$	$0.01361+0.00937i$	$-0.01261+0.03948i$
3	-0.69041	1	0.07589	-0.04532	0.06556
4	-0.32785	0.45187	1	-0.00484	0.01474

(编辑:陈 越)