

高超声速压缩拐角湍流计算的收敛性分析

夏陈超, 赵文文, 陈丽华, 陈伟芳
(浙江大学 航空航天学院, 杭州 310027)

摘 要: 应用基于 shear stress transport(SST)湍流模型的隐式紧耦合方法对高超声速压缩拐角流动进行了数值计算. 考察了差分格式、限制器以及湍流时间步长等 7 个因素对湍流计算过程稳定性和收敛性的影响. 结果表明:差分格式和限制器对收敛性有很大影响,总体而言言耗散性越大的差分格式和限制器收敛性越好;增加湍流时间步长对收敛性影响很小;适当降低湍流变量最低限制值有利于湍流方程的收敛;增大 Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)数和隐式内迭代次数可显著加速收敛,但均存在最优值,超过最优值则加速效果不明显.

关 键 词: 高超声速; 压缩拐角; 湍流模型; 隐式方法; 收敛性

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A

Convergence analysis of hypersonic turbulent flow calculation at compression corner

XIA Chen-chao, ZHAO Wen-wen, CHEN Li-hua, CHEN Wei-fang
(School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The hypersonic compression corner flow was simulated by a fully coupled implicit method based on the shear stress transport (SST) turbulence model. Influence of seven factors including schemes, limiter functions and turbulence time steps, etc, on the robustness and convergence of calculation were evaluated. Results show that schemes and limiter functions have great influence on the convergence characteristic, and those with higher dissipation show better convergence characteristic of schemes and limiter functions. The increase of turbulent time step has little effect on convergence. The proper decrease of lower bound of turbulent variables can accelerate the convergence of turbulence equations substantially. Increase of Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) number and inner iteration number of the lower-upper symmetric Gauss-Seidel (LU-SGS) method can accelerate the convergence greatly, while there are optimal values for different cases, the acceleration effect is not obvious if exceeding the optimal values.

Key words: hypersonic; compression corner; turbulence model; implicit method; convergence characteristic

基于 Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS)方程的数值模拟是流体力学的主要研究手段之一,湍流模型是该方法中的一个研究热点和难点.经过一二十年的发展,诸如 Spalart-Allmaras 单方程、 $k-\epsilon$ 两方程和 SST (shear stress transport)两方程等湍流模型已在工程问题中得到了广泛应用^[1-3].对高超声速飞行器而言,气动力热环境的准确预测关系到气动布局和气动热防护的精细设计.鉴于大涡模拟和直接数值模拟对计算量的过高需求,基于湍流模型进行气动力热

评估是目前飞行器设计的主要手段。

相比于 N-S 方程,耦合湍流模型方程后的 RANS 方程计算量有所增大,同时湍流模型源项的刚性往往会导致计算稳定性和收敛性变差.常用的提高计算稳定性和收敛性的方法包括湍流源项的特殊处理^[4]、隐式时间推进^[5-6]和多重网格^[7]等. Sinha 等^[8]通过对 k - ϵ 湍流模型源项的精确线性化处理提高了该模型求解超声速平板问题的收敛性. Fassbender^[9]基于 k - ω 模型,详细研究了湍流源项处理和时间推进方法等不同因素对亚声速飞行器湍流计算过程中鲁棒性的影响. 国内胡海洋等^[10]提出了一种能克服两方程湍流模型刚性的方法;杨小权等^[11]发展了高效的紧耦合 RANS 方程计算方法,数值计算的结果均表现出了良好的收敛性.

目前相关文献的工作主要集中在亚声速和超声速流动问题,针对高超声速湍流问题的计算收敛性研究还不多.此外,实际计算过程中影响收敛性的因素往往很多,且影响程度各不相同.为理清一些主要因素对高超声速湍流计算收敛性的影响程度,本文针对典型的压缩拐角流动问题,基于发展的隐式紧耦合 RANS 方程数值计算方法^[12],研究分析了差分格式、限制器以及湍流时间步长等因素对计算收敛性的影响,为更复杂湍流流动问题的数值计算提供参考.

1 数值方法

1.1 SST 湍流模型

流动控制方程为雷诺平均的三维 N-S 方程和 SST 两方程湍流模型方程,其中湍流模型输运方程为

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j k - (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = P - \beta^* \rho \omega k \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \omega - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \rho \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \cdot \frac{\partial k \partial \omega}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

其中 k 为湍动能; ω 为比耗散率; ρ 为密度; t 为时间; μ, μ_t 分别为层流、湍流黏度; ν_t 为涡黏度; $\sigma_k, \sigma_\omega, \sigma_{\omega 2}, \beta^*, \beta, \gamma$ 等为模式参数; F_1 为混合函数; P 为生成项. 模型的具体参数请参见文献^[2].

1.2 计算方法

控制方程的离散采用格心格式的有限体积

法, N-S 方程和 SST 湍流模型方程采用隐式紧耦合的形式求解. 文中计算时无黏通量采用了多种差分格式和限制器进行比较, 黏性通量采用中心差分离散.

1.3 当地时间步长

在数值计算中, 流场中的每个网格可采用最大的当地时间步长以提高收敛性, 式(3)为一种常用的时间步长计算方法^[13]

$$\Delta t = \frac{N_{\text{CFL}} \cdot V^2}{V(\lambda_\epsilon + \lambda_\eta + \lambda_\xi) + c_d \nu (\mathbf{S}_\epsilon \cdot \mathbf{S}_\epsilon + \mathbf{S}_\eta \cdot \mathbf{S}_\eta + \mathbf{S}_\xi \cdot \mathbf{S}_\xi)} \quad (3)$$

其中 CFL (Courant-Fiedrichs-Lewy) 数的量符号

记为 N_{CFL} , 系数 $c_d = 2, \nu = \left(\frac{4}{3\rho}, \frac{\gamma}{\rho} \right) \left(\frac{\mu_t}{Pr_l} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)$,

层流普朗特数 $Pr_l = 0.72$, 湍流普朗特数 $Pr_t = 0.90, \epsilon$ 方向上的谱半径为

$$\lambda_\epsilon = |u \cdot \mathbf{S}_\epsilon| + c |\mathbf{S}_\epsilon| \quad (4)$$

其中 c 为声速, $\mathbf{S}_\epsilon$ 为 ϵ 方向单元面积矢量. 在涉及湍流模型时, 湍流模型方程往往采用与 N-S 方程相同的时间步长, 但由于湍流模型方程不包含声波效应^[9], 若仍采用包含声速项的式(4)计算湍流时间步长, 则对湍流模型方程而言, 其时间步长过于保守, 因此针对湍流模型方程可采用不同的谱半径计算公式^[9]

$$\lambda_\epsilon = |u \cdot \mathbf{S}_\epsilon| + c_{\text{turb}} \cdot c |\mathbf{S}_\epsilon| \quad (5)$$

其中 c_{turb} 为小于 1 的系数, 用于增大时间步长, 同时保证稳定性.

1.4 湍流变量的限制

湍动能 k 和比耗散率 ω 的物理意义决定了在数值迭代过程中需要保证其非负性, 以使计算能够稳定进行, 常见的做法是限制其不能小于某一最小正值. 文献^[9]对 RAE2822 翼型的计算表明不同的湍流变量限制值对收敛性有较大影响. 本文湍流变量的限制采用如下形式

$$k = \max(k, V_{\text{limit}} \cdot k_\infty) \quad (6)$$

$$\omega = \max(\omega, V_{\text{limit}} \cdot \omega_\infty) \quad (7)$$

其中 V_{limit} 为一个很小的正值, k_∞ 和 ω_∞ 分别为来流湍动能和来流比耗散率

$$k_\infty = \frac{3}{2} (T_{u,\infty} \cdot U_\infty)^2 \quad (8)$$

$$\omega_\infty = \frac{\rho_\infty k_\infty}{\mu_\infty R} \quad (9)$$

式中 $T_{u,\infty}$ 为来流湍流度, U_∞ 为来流速度, R 为来流湍流黏度和来流层流黏度之比.

1.5 LU-SGS 隐式方法

本文时间推进采用 lower-upper symmetric Gauss-Seidel(LU-SGS)隐式方法,该方法具有较好的计算稳定性和收敛性,是最常用的隐式时间推进方法之一.原始的 LU-SGS 方法通过矩阵分裂和前后扫描求解,Chen 等^[14]提出的 BLU-SGS (block LU-SGS)方法对前后扫描过程进行迭代,提高了计算收敛性.该方法在高超声速层流计算中的加速收敛效果已经得到了验证,其前后扫描方式为^[15]

$$\Delta Q_{i,j}^* = \frac{\Delta t/V}{D}(A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^* + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^* + C_{k-1}^+ \Delta Q_{k-1}^* - A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^{n-1} - B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^{n-1} - C_{k+1}^- \Delta Q_{k+1}^{n-1} - R)$$

(10)

$$\Delta Q_{i,j}^n = \frac{\Delta t/V}{D}(A_{i-1}^+ \Delta Q_{i-1}^* + B_{j-1}^+ \Delta Q_{j-1}^* + C_{k-1}^+ \Delta Q_{k-1}^* - A_{i+1}^- \Delta Q_{i+1}^n - B_{j+1}^- \Delta Q_{j+1}^n - C_{k+1}^- \Delta Q_{k+1}^n - R)$$

(11)

场场更新为 $\Delta Q_{i,j} = \Delta Q_{i,j}^{n,\max}$,其中 n 为内迭代次数.在每次时间推进过程中 N-S 方程和湍流方程同时求解,并对湍流源项进行隐式处理以增强计算稳定性.

2 计算结果与分析

收敛性分析算例均基于 Settles 等^[16]的高超声速压缩拐角模型和实验数据.计算条件为:来流马赫数为 9.22,来流温度为 64.5 K,等温壁面温度为 295 K,单位雷诺数为 4.7×10^7 .网格数为 149×180 (流向和法向),第 1 层网格间距为 10^{-6} m,网格在靠近物面和拐角处进行了加密处理,图 1 为压缩拐角网格示意图.

2.1 差分格式的影响

迎风格式是目前高超声速 CFD 计算的主流格式,其中通量差分分裂的 FDS(flux difference

splitting)格式(如 Roe)对黏性和间断分辨率较高,矢通量分裂的 FVS(flux vector splitting)格式(如 van Leer)计算效率较高,AUSM(advection upstream splitting method)类格式则综合了两者的优点.本文对常用的 Roe, van Leer, Steger-Warming, AUSMPW+ (AUSM with pressure-based weight functions)以及 AUSM+up 格式进行了计算对比分析,限制器为 minmod, c_{turb} 取 1, V_{limit} 取 10^{-5} .图 2 和图 3 为不同差分格式的压缩拐角壁面压力和热流分布,压力采用来流压力 p_{inf} 无量纲化,热流采用参考热流 $q_{\text{inf}} = 60\,700$ W/m² 无量纲化.可以看出,各种格式得到的压力值相差较小,与实验值吻合均较好.对于热流分布,AUSM 类格式的结果与实验值最接近, van Leer 和 Steger-Warming 格式的结果明显低于实验值,这是由于这两种格式的数值耗散较大,且对网格的依赖性较强,采用这两种格式时物面附近需要更密的网格.

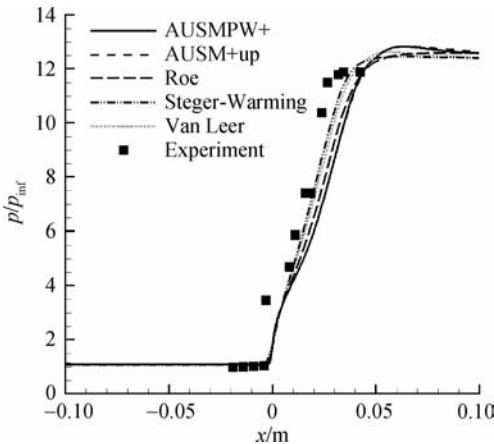


图 2 不同差分格式的壁面压力
Fig. 2 Wall pressure of different schemes

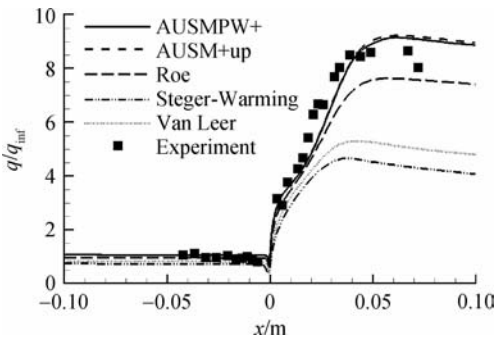


图 3 不同差分格式的壁面热流
Fig. 3 Wall heat flux of different schemes

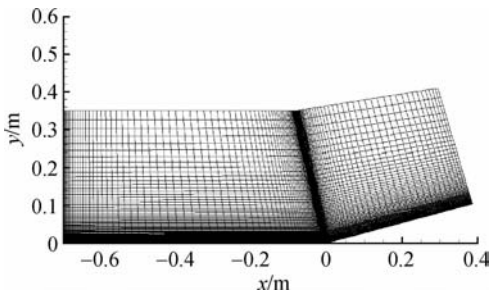


图 1 15°压缩拐角网格
Fig. 1 Grid of 15 degree compression corner

图 4 和图 5 分别为不同差分格式的全流场连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图,

可以看出 Roe 和 Steger-Warming 格式在 20000 步左右密度残差曲线就不再下降,其他格式可继续降低并收敛至机器零. Roe 格式的湍动能残差曲线同样下降不大并且持续振荡,其他格式则平稳下降至 10^{-7} 量级左右,其中 AUSMPW+ 和 Steger-Warming 格式的湍动能方程收敛较快.

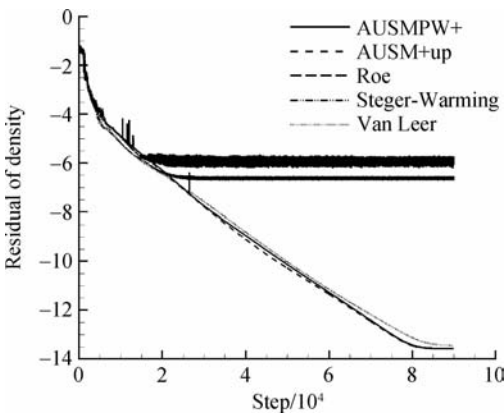


图 4 不同差分格式的密度收敛曲线
Fig. 4 Convergence history of density of different schemes

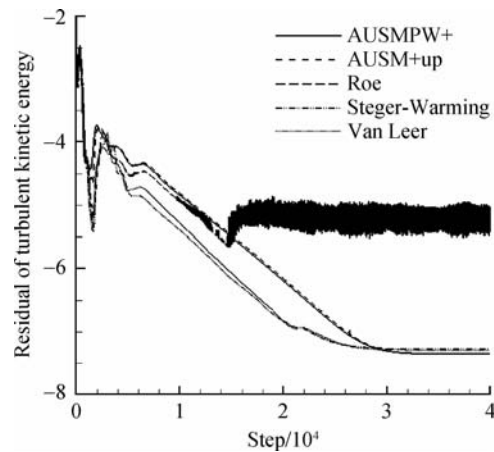


图 5 不同差分格式的湍动能收敛曲线
Fig. 5 Convergence history of turbulent kinetic energy of different schemes

2.2 限制器的影响

在进行 MUSCL(monotone upstream-centered schemes for conservation laws)插值时,往往需要采用限制器函数抑制振荡,对于压缩型限制器,如 superbee,其耗散性较小,但稳定性和收敛性较差,而耗散型限制器,如 minmod,其耗散性较大,但稳定性和收敛性较好. 本文基于常用的 minmod,superbee,van Albada 和 van Leer 四种限制器^[13],采用 2.1 章节中表现较好的 AUSMPW+格式进行数值

计算, c_{turb} 取 1, V_{limit} 取 10^{-5} . 图 6 和图 7 为不同限制器的壁面压力和热流分布,可以看出 AUSMPW+格式结合不同限制器得到的压力和热流差别很小,与实验值均较为吻合.

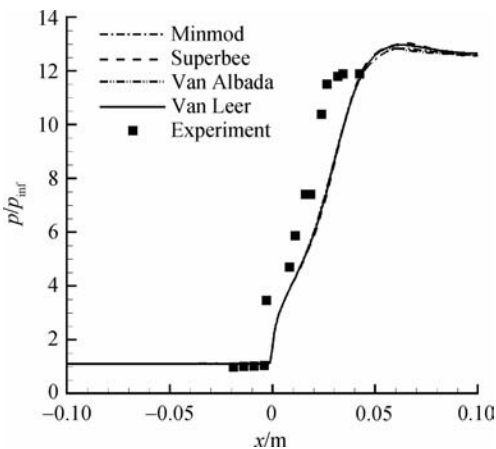


图 6 不同限制器的壁面压力
Fig. 6 Wall pressure of different limiter functions

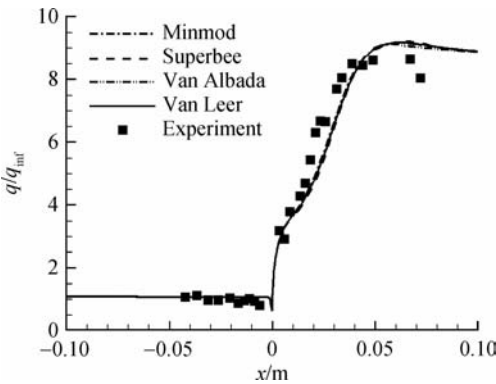


图 7 不同限制器的壁面热流
Fig. 7 Heat flux of different limiter functions

图 8 和图 9 为不同限制器的连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图,从密度曲线图可以看出,除了耗散型的 minmod 限制器残差稳定收敛至机器零外,其他限制器残差在初始下降 2~3 个量级后便不再下降并有一定程度振荡,其中压缩型的 superbee 限制器的残差最高. 湍动能残差曲线的结果是类似的,从耗散性最小的 superbee 限制器到最大的 minmod 限制器,残差曲线由高到低变化,收敛性和稳定性逐渐提高.

2.3 湍流时间步长的影响

采用 AUSMPW+格式和 minmod 限制器, V_{limit} 取 10^{-5} ,研究 c_{turb} 对收敛性的影响. $c_{\text{turb}}=1$ 时湍流方程和 N-S 方程具有相同的时间步长, $c_{\text{turb}}<1$ 时湍流方程的时间步长大于 N-S 方程的

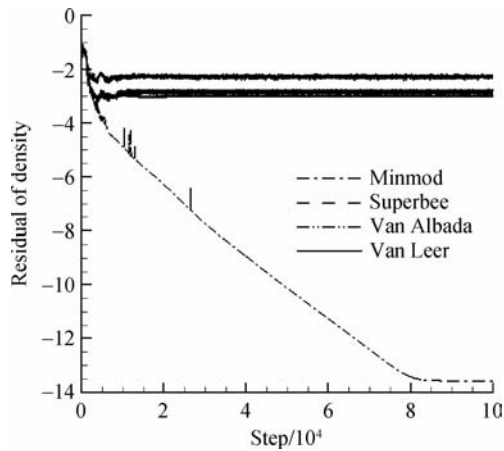


图 8 不同限制器的密度收敛曲线

Fig. 8 Convergence history of density of different limiter functions

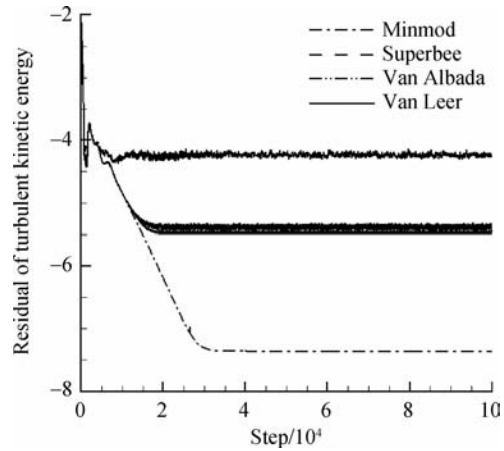


图 9 不同限制器的湍动能收敛曲线

Fig. 9 Convergence history of turbulent kinetic energy of different limiter functions

时间步长. 取不同的 c_{turb} 计算得到的壁面压力和热流分布几乎一致, 限于篇幅不再列出(下文同). 图 10 和图 11 为采用不同 c_{turb} 计算得到的连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图. 可以看出, 密度残差曲线均可达到机器零, 而湍动能残差仍是下降至 10^{-7} 量级左右. 减小 c_{turb} , 即增大湍流方程时间步长可略微提高收敛性, 残差曲线提前 1000~2000 步达到最低值, 但总体而言差别不大.

2.4 湍流量限制的影响

采用 AUSMPW+ 格式和 minmod 限制器, c_{turb} 取 0.15, 研究湍流限制参数 V_{limit} 对收敛性的影响. 图 12 和图 13 为采用不同 V_{limit} 值计算得到的连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图. 可以看出, 取不同的 V_{limit} 值对计算过程的稳定性没有影响, 但确可以较大程度地降低残差

值, 尤其是湍动能方程残差值. 对于本文的算例, 当 V_{limit} 小至 10^{-7} 时, 密度和湍动能残差曲线都可

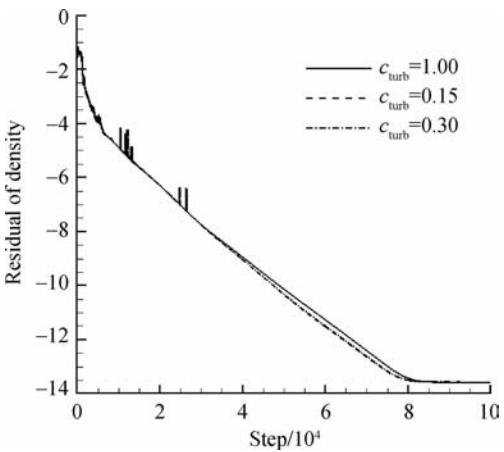


图 10 密度收敛曲线(不同 c_{turb})

Fig. 10 Convergence history of density (different c_{turb})

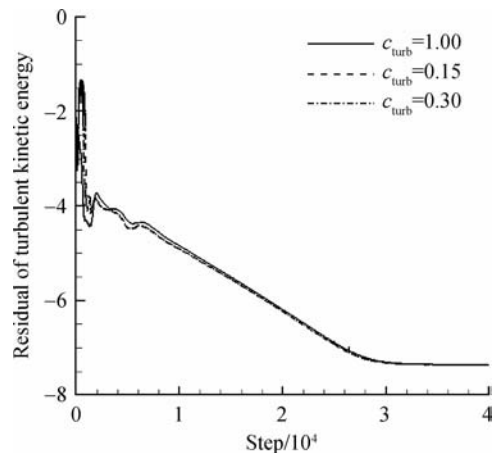


图 11 湍动能收敛曲线(不同 c_{turb})

Fig. 11 Convergence history of turbulent kinetic energy (different c_{turb})

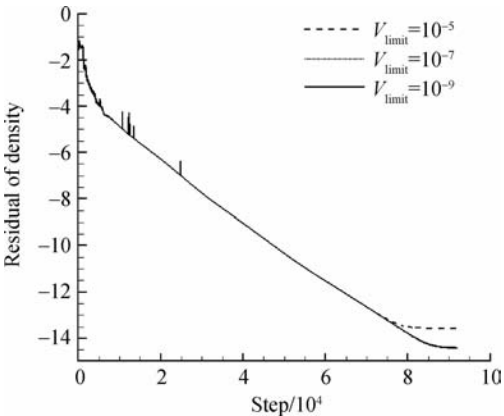


图 12 密度收敛曲线(不同 V_{limit})

Fig. 12 Convergence history of density (different V_{limit})

趋于机器零,这也是 2.1~2.3 章节中湍动能收敛曲线不能降至机器零的原因.当 V_{limit} 继续减小时对收敛性没有影响.

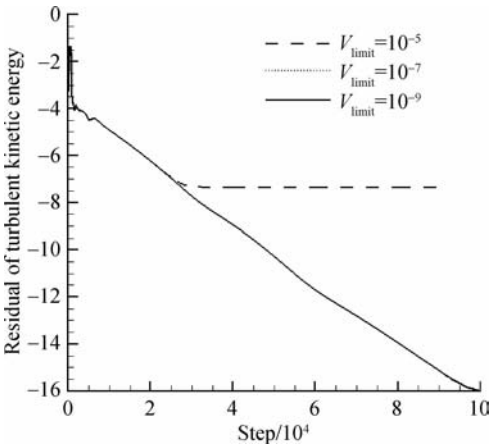


图 13 湍动能收敛曲线(不同 V_{limit})

Fig. 13 Convergence history of turbulent kinetic energy (different V_{limit})

2.5 CFL 数的影响

采用 AUSMPW+格式和 minmod 限制器, c_{turb} 取 0.15, V_{limit} 取 10^{-7} , 研究不同 CFL 数对收敛性的影响,这里的 CFL 数均指由小(接近于 0 的极小值)到大线性递增后的最大 CFL 数.图 14 和图 15 为采用不同 CFL 数计算得到的连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图.可以看出,不同 CFL 数下计算过程均十分稳定,残差均可达到机器零. CFL 数由 2 增加至 20 时收敛性提高了 1 倍左右,继续增加 CFL 数并不能显著提高收敛性,即存在一个最优的 CFL 数.实际计算中,考虑收敛性和稳定性, CFL 数并不需要取得非常大,本文数值算例中的 CFL 数均为 2.

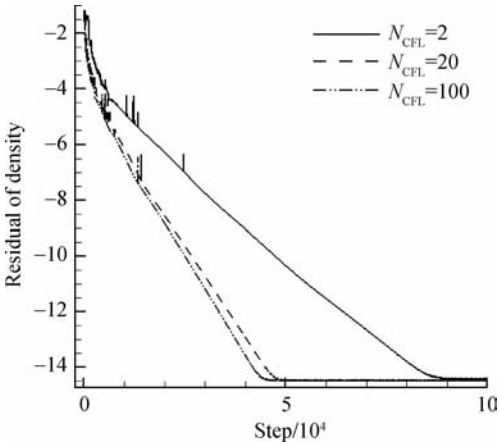


图 14 密度收敛曲线(不同 N_{CFL})

Fig. 14 Convergence history of density (different N_{CFL})

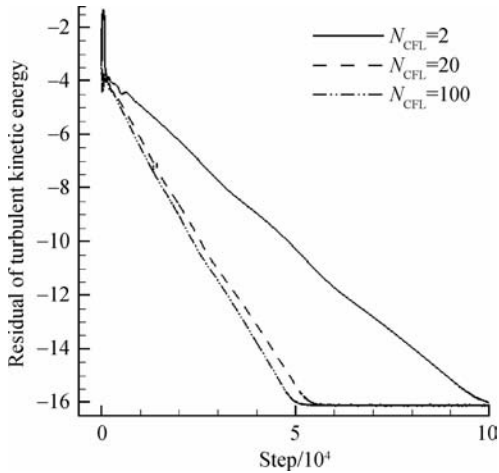


图 15 湍动能收敛曲线(不同 N_{CFL})

Fig. 15 Convergence history of turbulent kinetic energy (different N_{CFL})

2.6 LU-SGS 内迭代次数的影响

2.1~2.5 章节中的数值计算均采用原始的 LU-SGS 方法,即不包含内迭代,下面研究不同内迭代次数对收敛性的影响,采用的是 AUSMPW+格式和 minmod 限制器, c_{turb} 取 0.15, V_{limit} 取 10^{-7} .图 16 和图 17 为采用不同内迭代次数 n 计算得到的连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图.可以看出,采用不同的内迭代次数 n 残差均可达到机器零,提高内迭代次数可显著加速收敛. n 取 3 时收敛性提高了 1/3 左右,随着内迭代次数的进一步增加,收敛性改善不大,同时考虑到增加内迭代次数计算量也会相应增大,因此实际计算中内迭代次数不应取太大.

2.7 不同湍流模型的收敛性分析

湍流模型本身是影响数值计算的一个关键因素,不同的模型由于构造不同往往具有不同的收

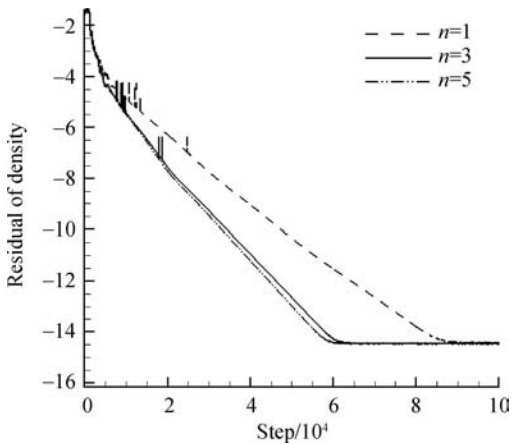


图 16 密度收敛曲线(不同 n)

Fig. 16 Convergence history of density (different n)

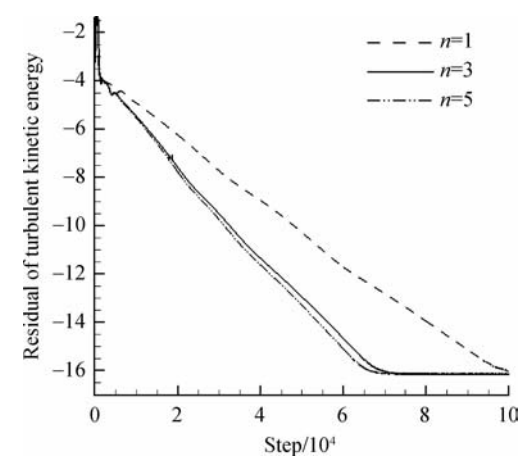


图 17 湍动能收敛曲线(不同 n)

Fig. 17 Convergence history of turbulent kinetic energy (different n)

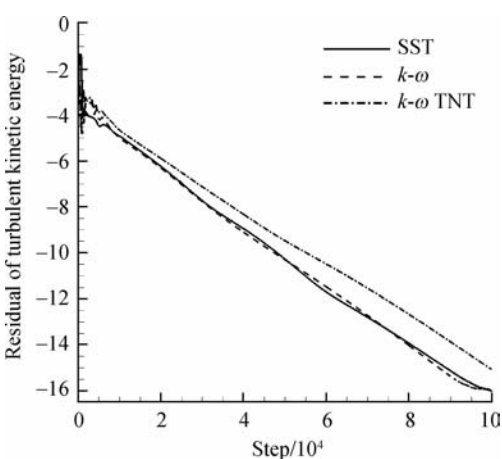


图 19 湍动能收敛曲线(不同湍流模型)

Fig. 19 Convergence history of turbulent kinetic energy (different turbulence models)

敛性. 鉴于本文计算程序主要基于 $k-\omega$ 类两方程湍流模型, 这里仅对常用的 SST, $k-\omega$ 和 $k-\omega$ TNT (turbulent/non-turbulent) 湍流模型进行收敛性比较. 计算参数设置与 2.6 节一致. 图 18 和图 19 为采用不同湍流模型计算得到的连续方程 ρ 和湍动能方程 ρk 的无量纲残差曲线图. 可以看出, SST 和 $k-\omega$ 模型的收敛性差别很小, 均略优于 $k-\omega$ TNT 模型. 总体而言, 由于 3 种湍流模型均是关于湍动能和比耗散率的输运方程, 因此, 其收敛性差别不大.

以上的数值计算主要基于没有发生流动分离的 15° 压缩拐角, 流动较为简单, 因而收敛性均较好. 本文采用相同数量的网格、条件和 2.7 节中的设置, 采用 SST 模型对含流动分离和强激波/边界层干扰的 38° 压缩拐角进行了计算, 图 20 和图 21 分别为不同压缩拐角的密度和湍动能残差曲

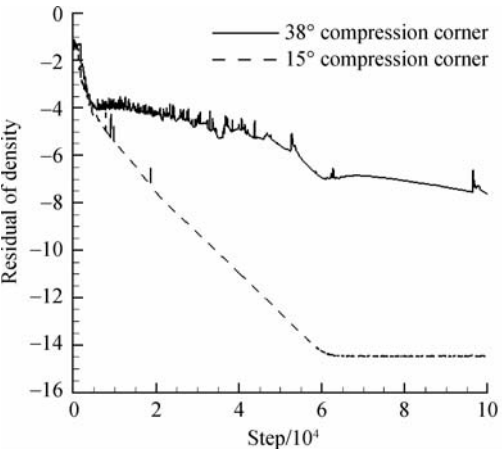


图 20 密度收敛曲线(不同压缩拐角)

Fig. 20 Convergence history of density (different compression corners)

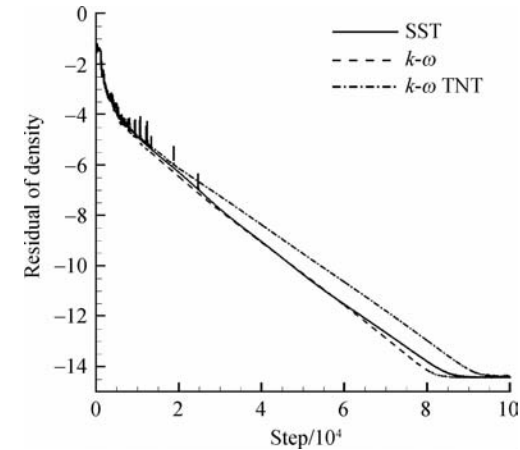


图 18 密度收敛曲线(不同湍流模型)

Fig. 18 Convergence history of density (different turbulence models)

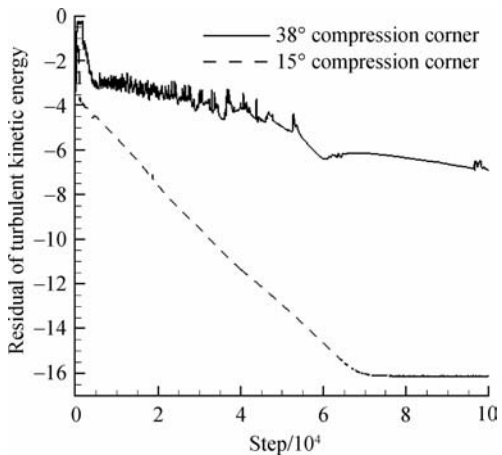


图 21 湍动能收敛曲线(不同压缩拐角)

Fig. 21 Convergence history of turbulent kinetic energy (different compression corners)

线.可以看出, 38° 拐角流动的残差在计算前期有一定的振荡, 曲线下降较缓慢, 由于流动复杂性提高, 其稳定性和收敛性远不如 15° 压缩拐角流动. 尽管如此, 从图中也可看出 38° 压缩拐角流动残差下降了 8 个量级左右, 且仍在下降, 表明本文的数值方法在模拟复杂湍流流动问题时仍具有较好地收敛性.

3 结 论

采用隐式紧耦合计算方法模拟了高超声速压缩拐角湍流流动问题, 分析了差分格式、限制器以及湍流时间步长等因素对计算稳定性和收敛性的影响. 对于本文的压缩拐角流动而言: AUSM 类格式和矢通量分裂类格式收敛性总体上优于通量差分分裂格式(Roe); 耗散型的 minmod 限制器收敛性最好; N-S 方程和湍流模型方程采用不同的时间步长对收敛性影响不大; 适当降低计算过程中湍流变量的最小限制值可显著提高湍流方程的收敛性; 增大 CFL 数后的加速收敛效果较为明显, 但过大 CFL 数的加速效果有限; 增加 LU-SGS 内迭代次数有助于收敛, 但存在综合收敛性和计算量的最优内迭代次数; 几种常用的 $k-\omega$ 类湍流模型的收敛性差别不大.

流动问题复杂性的提高通常会对收敛性产生重要影响, 针对不同的流动情况和模型, 往往需要对相关计算因素进行恰当的处理和选择方可得到较为理想的稳定性和收敛性. 更为复杂的流动问题和更多的收敛性影响因素有待进一步地研究.

参考文献:

- [1] Deck S, Duveau P, D'Espiney P, et al. Development and application of Spalart-Allmaras one equation turbulence model to three-dimensional supersonic complex configurations [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2002, 6(3): 171-183.
- [2] Menter F R, Kuntz M, Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model[C]// *Proceeding of Turbulence, Heat and Mass Transfer*. New York: Begell House Incorporation, 2003: 625-632.
- [3] 赵慧勇, 雷波, 乐嘉陵. 非对称交叉激波和湍流边界层相互作用的数值研究[J]. *航空动力学学报*, 2009, 24(10): 2183-2188.
ZHAO Huiyong, LEI Bo, LE Jialing. Numerical investigation of interaction between asymmetric crossing shock waves/turbulence boundary layer[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2009, 24(10): 2183-2188. (in Chinese)
- [4] Merci B, Steelant J, Vierendeels J, et al. Computational treatment of source terms in two-equation turbulence models[J]. *AIAA Journal*, 2000, 38(11): 2085-2093.
- [5] Peromian O, Chakravarthy S, Palaniswamy S, et al. Convergence acceleration for unified-grid formulation using preconditioned implicit relaxation[R]. AIAA 98-0116, 1998.
- [6] Barakos G, Drikakis D. Implicit unfactored implementation of two-equation turbulence models in compressible Navier-Stokes methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1998, 28(1): 73-94.
- [7] Mavriplis D J, Martinelli L. Multigrid solution of compressible turbulent flow on unstructured meshes using a two-equation model [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1994, 18(10): 887-914.
- [8] Sinha K, Candler G V. Convergence improvement of two-equation turbulence model calculations[R]. AIAA 98-2649, 1998.
- [9] Fassbender J K. Improved robustness for numerical simulation of turbulent flows around civil transport aircraft at flight Reynolds numbers [D]. Braunschweig: Technische Universitaet Braunschweig, 2003.
- [10] 胡海洋, 王强. 一种能克服两方程湍流模型刚性的流热一体化算法[J]. *计算物理*, 2009, 26(5): 685-692.
HU Haiyang, WANG Qiang. Flow heat transfer integrated method overcoming stiffness in two-equation turbulence models [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2009, 26(5): 685-692. (in Chinese)
- [11] 杨小权, 杨爱明, 孙刚. 一种强耦合 Spalart-Allmaras 湍流模型的 RANS 方程的高效数值计算方法[J]. *航空学报*, 2013, 34(9): 2007-2018.
YANG Xiaoquan, YANG Aiming, SUN Gang. An efficient numerical method for coupling the RANS equations with Spalart-Allmaras turbulence model equation [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2013, 34(9): 2007-2018. (in Chinese)
- [12] 夏陈超, 陈伟芳, 郭中州, 等. 隐式紧耦合 SST 和 TNT 模型的高速流动数值模拟[J]. *航空动力学学报*, 2015, 30(4): 936-943.
XIA Chenchao, CHEN Weifang, GUO Zhongzhou, et al. Applications of implicit coupled SST and TNT turbulence models for high speed flows [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2015, 30(4): 936-943. (in Chinese)
- [13] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.
- [14] Chen R F, Wang Z J. Fast, block lower-upper symmetric Gauss-Seidel scheme for arbitrary grids[J]. *AIAA Journal*, 2000, 38(12): 2238-2245.
- [15] 曹文斌, 李桦, 丁国昊. 高超声速流动计算中 LU-SGS 隐式算法的应用[J]. *国防科学技术大学学报*, 2013, 35(3): 18-23.
CAO Wenbin, LI Hua, DING Guohao. Application of the implicit LU-SGS algorithm for hypersonic flows [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2013, 35(3): 18-23. (in Chinese)
- [16] Settles G S, Dodson L J. Hypersonic shock/boundary-layer interaction database[R]. NASA CR-177577, 1991.

(编辑: 王碧琚)