

基于乏信息失效数据的可靠性评估方法

夏新涛, 朱文换, 孟艳艳, 邱 明
(河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003)

摘 要: 基于乏信息失效数据,提出了机械产品可靠性的最大熵评估模型. 根据可靠性经验值公式,获得失效数据的可靠性经验值向量,并逆推出离散失效频率向量即获得统计直方图;基于区间映射的牛顿迭代方法获得具有最大熵的概率密度函数,对其积分获得失效概率分布函数,进而得到可靠性估计真值函数. 仿真案例和试验案例研究证明该方法可以很好地评估已知分布的可靠性并有效地解决只有失效数据而没有概率分布任何先验信息的可靠性评估问题. 在寿命给定时,最大熵方法获得的可靠性取值与已知分布获得的可靠性取值之间的差值非常小仅为 3.40%.

关 键 词: 失效数据; 可靠性; 最大熵; 概率密度函数; 可靠性估计函数

中图分类号: V233.4⁺5 **文献标志码:** A

Reliability evaluation method based on failure data with poor information

XIA Xin-tao, ZHU Wen-huan, MENG Yan-yan, QIU Ming
(School of Mechatronics Engineering,
Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China)

Abstract: Under the condition of failure data with poor information, the maximum entropy model for evaluation of mechanical product reliability was put forward. According to the empirical value formula of reliability, the reliability empirical value vector of failure data was obtained, and discrete failure frequency vector of lifetime data could be inferred by the empirical value vector (i. e. statistical histogram was obtained); based on the interval-mapping Newton iteration method, the maximum entropy probability density function was established, the failure probability distribution function could be gained by integration, and then the estimated true value function of reliability was acquired. Studies on simulation cases and experimental cases have proved the method proposed is not only able to evaluate the reliability with a known distribution but effective and feasible in the reliability assessment under the condition of failure data without any priori information about the possibility distribution. At the given lifetime, the difference between the values of reliability obtained via the maximum entropy method and the known distributions is very small, which only reaches 3.40%.

Key words: failure data; reliability; maximum entropy; probability density function; reliability estimated function

随着航天器研制技术的进步,现代航天系统
对各类航天器的可靠性提出了更为严格的要求.

然而“高可靠、长寿命、小子样”却成为航天器可靠
性研究领域的瓶颈. 因此,如何有效评估各类航天

器的可靠性,确保航天器正常发射和成功运行是长期以来国内外研究的热点与难点^[1-4].

在现有的可靠性评估方法中,传统的解决方法是以经典统计学为主要依据的.经典统计学又以大数定律和中心极限定律为其理论基础,要求失效概率分布已知或有大量的失效数据.对于高可靠性机械产品以及新产品研制与开发等,通常很难获得大量的数据进行研究.而且许多工程问题的概率分布通常不是正态分布,如圆度误差的瑞利分布、滚动轴承疲劳寿命的威布尔分布等,有些产品的可靠性分布甚至是未知的.通常那些已知分布模型的参数是未知的,往往需要进行参数估计.由于任何试验的参数评估都伴随有不确定性,尤其对高可靠性的重大装备与系统、以及与人身安全息息相关的交通运输等领域而言,可靠性的过高和过低估计,都有可能影响到可靠性评估的准确性和有效性,从而产生不良后果^[5-6].因此,分布模型参数的精度是可靠性分析的关键^[7].对于工程实践中使用较为广泛的三参数威布尔分布,其参数的估计方法就存在着多样性和复杂性.例如,目前较为常用的双线性回归法、概率权重法、相关系数优化法、Bayesian 统计分析方法及灰色估计法等,由于各自对不同样本容量的适应能力不同,如果选择不当,就会导致参数估计精度的降低,从而直接影响到可靠性评估结果的可信度^[8-10].

在可靠性评估中,当概率分布未知时,虽然 Johnson^[11]或 Nelson^[12]提出的可靠性经验值公式不需要进行参数估计,但是这两个公式对可靠性真值的估计结果是离散的和波动的,具有不确定性,难以进行连续评估.

当失效数据很少且分布类型未知时,统计分布模型以及可靠性经验值公式在进行评估时就受到局限.这时的可靠性评估隶属于乏信息分析的范畴^[13].乏信息是指研究对象呈现出的特征信息不完备,缺乏先验信息.譬如,缺乏概率分布或趋势的先验信息,小样本数据,未知的干扰等.而经典统计理论依赖于已知的概率分布与大样本数据.因此,为了弥补经典统计理论和可靠性经验值公式的评估缺陷,在失效数据分布类型未知时,提出了可靠性分析的最大熵模型.

最大熵方法能够对未知的概率分布做出主观偏见为最小的最佳估计^[14].根据可靠性经验值公式,获得失效数据的可靠性经验值向量;利用可靠性经验值向量逆推出离散失效频率向量,即得到统计直方图;基于区间映射的牛顿迭代方法获得

具有最大熵的概率密度函数,并对其积分获得失效概率分布函数,进而得到可靠性估计真值函数,对仿真案例及试验案例的分析研究,证明了该方法的有效性和可行性.

1 最大熵可靠性模型

机械产品寿命数据有失效数据和无失效数据两种.本文提出的最大熵可靠性模型仅考虑失效数据即完全失效数据情况下的可靠性分布.

1.1 可靠性经验值向量

假设通过试验获得某机械产品的一组失效数据,用向量表示为

$$\mathbf{X}_0 = \{x_{0i}\}; x_{01} \leq x_{02} \leq \cdots \leq x_{0i} \leq \cdots \leq x_{0n}; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

式中 $\mathbf{X}_0$ 为失效数据组成的向量, x_{0i} 为第 i 个失效数据, i 为失效数据序号, n 为失效数据个数.

在产品失效概率分布未知或者分布参数未知的情况下,可以用 Johnson 方法对寿命数据的可靠性中位秩经验值进行非参数估计,或者用 Nelson 方法对寿命数据的可靠性期望经验值进行非参数估计.这两种方法获得的可靠性经验值即经验可靠度可以用向量表示为

$$\mathbf{R}_1 = \{r(x_{0i})\}; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

式中 $\mathbf{R}_1$ 表示由可靠性中位秩经验值或期望经验值组成的向量.

可靠性中位秩经验值的计算公式为

$$r(x_{0i}) = 1 - \frac{i - 0.3}{n + 0.4}; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

可靠性期望经验值的计算公式为

$$r(x_{0i}) = 1 - \frac{i}{n + 1}; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

1.2 离散失效频率向量

根据统计理论,由可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 可以得到离散累积失效概率向量 $\mathbf{F}_1$

$$\mathbf{F}_1 = \{f_i\} = 1 - \mathbf{R}_1 = \{1 - r(x_{0i})\}; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

设各个失效寿命数据对应的离散失效概率为 p_{0i} , 对于第 1 个数据,也即 $i=1$ 时,令其失效概率为 $p_{01}=f_{01}$, 则从第 2 个数据开始,也即当 $i=2, 3, \cdots, n$ 时,其各自的失效概率可以由向量 $\mathbf{F}_1$ 中元素依次累减得到 $p_{0i}=f_i-f_{i-1}, i=2, 3, \cdots, n$.

故失效寿命数据的离散失效频率向量为

$$\mathbf{P}_{0i} = \begin{cases} f_1 & i = 1 \\ \{f_i - f_{i-1}\} & i = 2, 3, \cdots, n \end{cases} \tag{6}$$

式(6)对应于统计学中的直方图,其中横坐标

为离散的失效寿命数据 x_{0i} , 纵坐标为各组组中值即 $x_q=x_{0(q-1)}$ 对应的频率 $p_q=p_{0(q-1)}$, $q=2,\cdots,n+1$. 通常将直方图扩展成 $n+2$ 组, 即 $q=1, 2,\cdots,n+2$, 并令 $p_1=p_{n+2}=0, x_1=x_{01}-(x_{02}-x_{01}), x_{n+2}=x_{0n}+(x_{02}-x_{01})$. 这里对直方图的处理有利于后面牛顿法求解最大熵概率密度函数中的拉格朗日乘子.

1.3 最大熵概率分布密度函数

最大熵方法能够对未知的概率分布做出主观偏见为最小的最佳估计. 但是使用最大熵方法获取概率分布的求解过程存在一定的难度, 因此本文提出了收敛性很好的数值计算方法——区间映射的牛顿迭代方法.

设具有最大熵的概率密度函数为

$$f(t)=\exp(\sum_{k=0}^m c_k t^k) \tag{7}$$

式中 m 为原点矩阶数, 一般取 $m=3\sim 8$, 常用 $m=5$; c_k 为第 k 个拉格朗日乘子, $k=0,1,\cdots,m$, 共有 $m+1$ 个.

约束条件为

$$\int_S f(t)dt=1 \tag{8}$$

$$\int_S t^k f(t)dt=m_k; \quad k=1,2,\cdots,m \tag{9}$$

式中 S 为积分区间; m_k 为第 k 阶原点矩.

由式(7)~式(8)解得

$$e^{-c_0}=\int_S \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt \tag{10}$$

故第一个拉格朗日乘子 c_0 为

$$c_0=-\ln\left[\int_S \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt\right] \tag{11}$$

将式(10)对 c_k 进行微分, 得

$$\frac{\partial c_0}{\partial c_k}=-\int_S t^k \exp(c_0+\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt=-m_k \tag{12}$$

将式(11)对 c_k 进行微分, 得

$$\frac{\partial c_0}{\partial c_k}=-\frac{\int_S t^k \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt}{\int_S \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt} \tag{13}$$

与式(12)比较, 得

$$m_k=\frac{\int_S t^k \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt}{\int_S \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt} \tag{14}$$

也即其他 m 个拉格朗日乘子满足

$$g_k=g(c_k)=1-\frac{\int_S t^k \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt}{m_k \int_S \exp(\sum_{k=1}^m c_k t^k)dt}=0$$
$$k=1,2,\cdots,m \tag{15}$$

式(15)可以用向量表示为

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{c})=\{g_k; k=1,2,\cdots,m\}^T=0 \tag{16}$$

且有

$$\boldsymbol{c}=\{c_k; k=1,2,\cdots,m\}^T \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{c}$ 为拉格朗日乘子列向量.

1.3.1 拉格朗日乘子向量的牛顿数值解法

用牛顿法求解拉格朗日乘子向量 $\boldsymbol{c}$, 即有

$$\boldsymbol{c}^{j+1}=\boldsymbol{c}^j-\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{c}^j)^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{c}^j); \quad j=0,1,\cdots \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{c}^j)$ 为迭代到第 j 步的雅可比矩阵.

迭代收敛的范数准则为

$$\|\boldsymbol{G}^{j+1}-\boldsymbol{G}^j\|_1\leqslant \epsilon \tag{19}$$

式中 ϵ 为收敛精度, 一般取 $\epsilon=10^{-12}$.

1.3.2 积分区间的映射

牛顿法虽然收敛速度快, 但其收敛性依赖于初始值的选取, 如果初始值选取不当牛顿法可能会发散. 为便于牛顿法求解能很好地收敛, 可以将原始失效数据序列无量纲化地映射到区间 $[-e, e]$ 中

$$t=ax+b \tag{20}$$

$$x=t/a-b/a \tag{21}$$

$$dx=dt/a \tag{22}$$

$$a=\frac{2e}{x_{n+2}-x_1} \tag{23}$$

$$b=e-ax_{n+2} \tag{24}$$

式中 $e=2.718282$.

值得注意的是, 改变积分区间后, 牛顿迭代法初始值的选取就和原始失效数据无关, 可以将其设为常数, 则用 Matlab 编程计算时初始值向量也即拉格朗日乘子向量的初始值可设为 $c_{k0}=-(k-1)/10\,000, k=1:m$.

第 k 阶原点矩 m_k 的值变为

$$m_k=\sum_{q=1}^{n+2} t_q^k p_q \quad k=0,1,\cdots,m; \quad m_0=1 \tag{25}$$

显然, 积分区间 S 映射为 $[-e, e]$, 积分变量 t 变为 x , 最大熵概率分布密度函数变为

$$f(x)=\exp\left[c_0+\sum_{k=1}^m c_k (ax+b)^k\right] \tag{26}$$

并要求其在整个积分区间内的积分值(即概率)为 1.

对最大熵分布密度函数 $f(x)$ 在区间 $S=[x_{01}, x_{0n}]$ 内积分,得到累积失效概率函数也即失效概率分布函数 F

$$F=\int_S f(x)dx \tag{27}$$

从而,最大熵可靠性估计真值函数为

$$R(x)=1-F \tag{28}$$

由式(28)可计算出相应的可靠度,最终实现可靠性评估.

2 仿真与试验研究

采用最大熵方法建立可靠性模型的基本思想是在所有的可行解中,满足信息熵最大的解是最无偏的.而且采用积分区间的映射及对直方图的特殊处理,是为了便于牛顿法在求解拉格朗日乘子向量时能够更快、更好地收敛,从而求出最大熵分布,最终获得可靠性函数.

本文中研究的问题是提出只有失效数据而没有概率分布任何先验信息条件下可靠性的乏信息评估方法.并通过仿真研究与试验研究来验证该方法获得的可靠性估计真值函数对现有的已知分布以及未知分布的评估效果.

2.1 仿真研究

本小节主要通过两种仿真方法即反函数仿真法和蒙特卡罗仿真法对常见的威布尔分布、正态分布、指数分布、瑞利分布以及反威布尔分布的失效数据进行随机仿真,以使得到的失效数据具有普遍适用性,有利于最大限度地研究最大熵方法获得的可靠性分布函数对这些已知分布仿真失效数据的可靠性的评估效果,从而验证最大熵方法的理论可行性.

最大熵方法对已知分布失效数据可靠性函数的拟合效果可以在一定程度上反映其对未知分布失效数据的适用性.这是因为该方法对各种已知分布的拟合效果越好,表明其对失效数据的分布类型限制越小,从而可以很好地拟合未知分布;反之,则要谨慎使用.

2.1.1 反函数仿真法

反函数仿真法研究的基本过程是首先利用反函数法生成分别服从威布尔分布、正态分布、指数分布、瑞利分布以及反威布尔分布的随机数,然后利用最大熵方法进行可靠性评估,并将评估结果

$R(x)$ 与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 进行对比.

案例 1 威布尔分布仿真案例

取威布尔分布的 3 个参数为尺度参数 $\eta=30$,形状参数 $\beta=2.5$,位置参数 $\tau=10$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1=[0.9 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.3 \ 0.1]$,由威布尔分布可靠性的反函数 $x=\tau+\eta[-\ln R(x)]^{1/\beta}$ 得到 5 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到小样本条件下($n=5$)最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 1 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的一致性很好,且两者之间最大误差的绝对值仅为 $0.95384-0.87037=0.08347$.

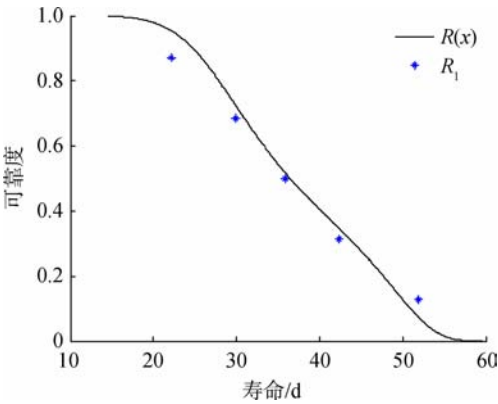


图 1 威布尔分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 1 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of Weibull distribution ($n=5$)

取威布尔分布的 3 个参数为尺度参数 $\eta=30$,形状参数 $\beta=2.5$,位置参数 $\tau=10$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 取值范围为 $0.9\sim 0.1$,间隔为 -0.016 ,由威布尔分布可靠性的反函数 $x=\tau+\eta[-\ln R(x)]^{1/\beta}$ 得到 51 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到大样本条件下($n=51$)最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 2 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值 $\mathbf{R}_1$ 基本完全重合,且两者之间的误差非常小.

案例 2 正态分布仿真案例

取正态分布的参数为位置参数 $\mu=50$,尺度参数 $\sigma=0.01$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1=[0.9 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.3 \ 0.1]$,由正态分布可靠性函数 $R(x)=1-\Phi[(x-\mu)/\sigma]$ 查表得到 5 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到小

样本条件下($n=5$)最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 3 所示。

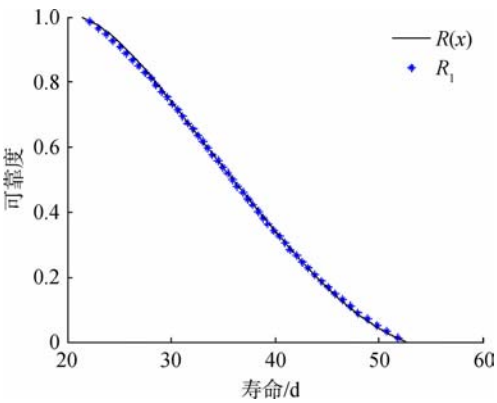


图 2 威布尔分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=51$)

Fig. 2 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of Weibull distribution ($n=51$)

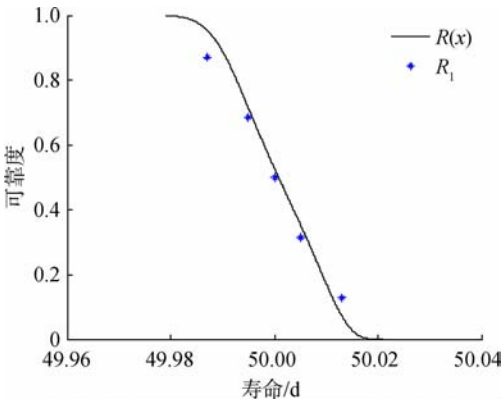


图 3 正态分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 3 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of normal distribution ($n=5$)

取正态分布的参数为位置参数 $\mu=50$, 尺度参数 $\sigma=0.01$, 可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 取值范围为 $0.9\sim0.1$, 间隔为 -0.0159 , 由正态分布可靠性函数 $R(x)=1-\Phi[(x-\mu)/\sigma]$ 查表得到 53 个寿命仿真数据(单位:d), 然后利用最大熵方法, 得到大样本条件下($n=53$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 4 所示。可以看到, 最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 基本重合, 且两者之间的误差非常小。

案例 3 指数分布仿真案例

取指数分布的参数为率参数 $\lambda=5$, 可靠性经

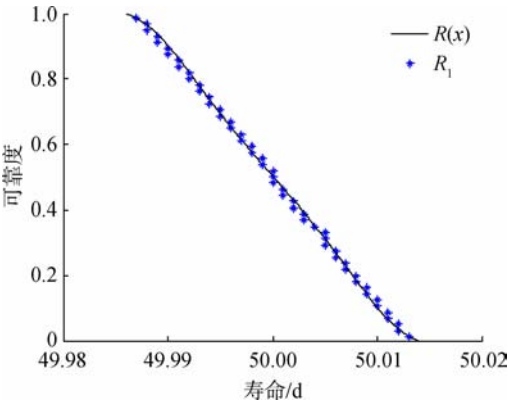


图 4 正态分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=53$)

Fig. 4 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of normal distribution ($n=53$)

验值向量 $\mathbf{R}_1=[0.9\ 0.7\ 0.5\ 0.3]$, 由反函数 $x=-\ln(R)/\lambda$ 得到 5 个寿命仿真数据(单位:d), 然后利用最大熵方法, 得到小样本条件下($n=5$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 5 所示。可以看到, 最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的一致性很好, 两者之间最大误差的绝对值仅为 $0.78602-0.68519=0.10083$ 。

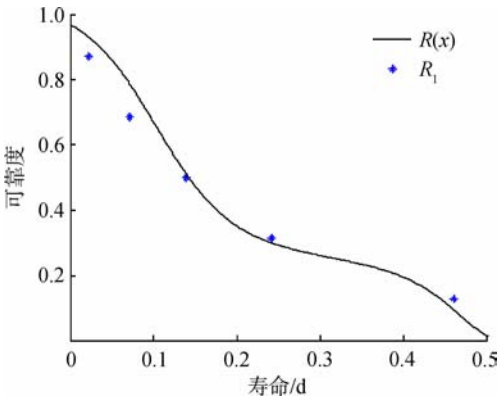


图 5 指数分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 5 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of exponential distribution ($n=5$)

取指数分布的参数为率参数 $\lambda=5$, 可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 取值范围为 $0.9\sim0.1$, 间隔为 -0.016 , 由反函数 $x=-\ln(R)/\lambda$ 到 51 个寿命仿真数据(单位:d), 然后利用最大熵方法, 得到大样本条件下($n=51$)的最大熵可靠性分布函数拟合效果图如图 6 所示。可以看到, 最大熵可靠性函数

$R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 基本完全重合,且两者之间的误差非常小。

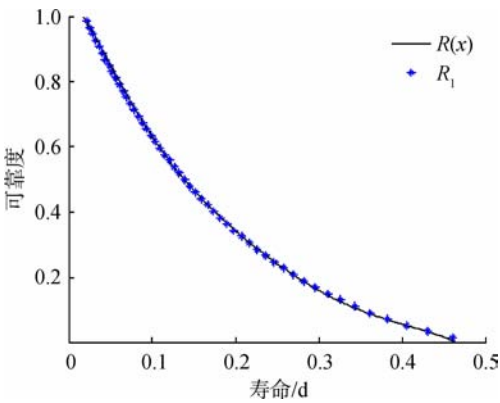


图 6 指数分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图
($n=51$)

Fig. 6 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of exponential distribution ($n=51$)

案例 4 瑞利分布仿真案例

取瑞利分布的参数为尺度参数 $\lambda=1$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1=[0.9\ 0.7\ 0.5\ 0.3\ 0.1]$,由反函数 $x=\lambda[\sqrt{-2\ln(R)}]$ 得到 5 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到小样本条件下($n=5$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 7 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的一致性很好,且两者之间最大误差的绝对值仅为 $0.95315-0.87037=0.08278$ 。

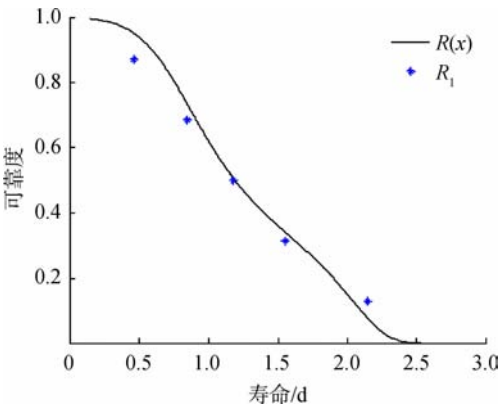


图 7 瑞利分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 7 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of Rayleigh distribution ($n=5$)

取瑞利分布的参数为尺度参数 $\lambda=1$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 取值范围为 $0.9\sim 0.1$,间隔为 -0.016 ,由反函数 $x=\lambda[\sqrt{-2\ln(R)}]$ 得到 51 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到大样本条件下($n=51$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 8 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 基本完全重合,两者之间的误差非常小。

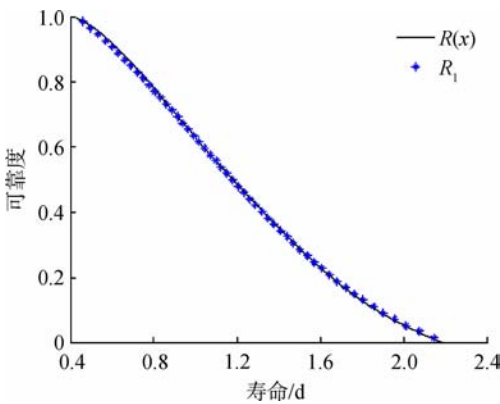


图 8 瑞利分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=51$)

Fig. 8 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of Rayleigh distribution ($n=51$)

案例 5 反威布尔分布仿真案例

取反威布尔分布的参数为尺度参数 $\eta=1$,形状参数 $\beta=2.5$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1=[0.9\ 0.7\ 0.5\ 0.3\ 0.1]$,由反函数 $x=1/\eta[-\ln(1-R)]^{1/\beta}$ 得到 5 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到小样本条件下($n=5$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 9 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的一致性很好,且两者之间最大误差的绝对值仅为 $0.78456-0.68519=0.09937$ 。

取反威布尔分布的参数为尺度参数 $\eta=1$,形状参数 $\beta=2.5$,可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 取值范围为 $0.9\sim 0.1$,间隔为 -0.016 ,由反函数 $x=1/\eta[-\ln(1-R)]^{1/\beta}$ 得到 51 个寿命仿真数据(单位:d),然后利用最大熵方法,得到大样本条件下($n=51$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 10 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 基本完全重合,且两者之间的误差非常小。

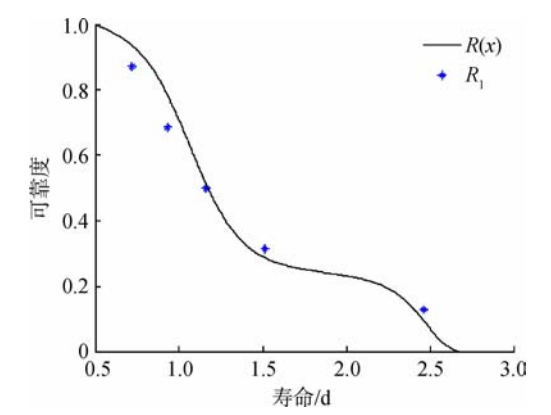


图 9 反威布尔分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 9 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of inverse Weibull distribution ($n=5$)

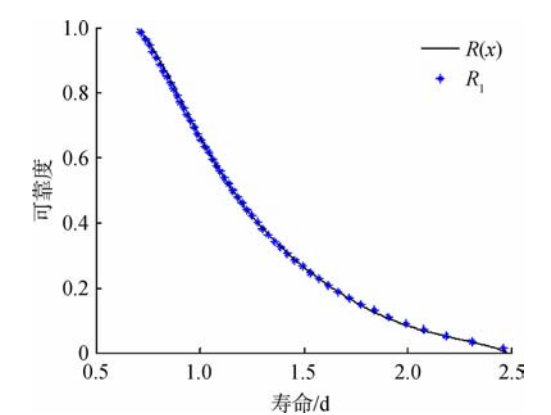


图 10 反威布尔分布仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=51$)

Fig. 10 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for simulation data of inverse Weibull distribution ($n=51$)

从以上 5 个案例中,可以看到小样本条件下,最大熵可靠性分布函数能够很好地拟合威布尔分布、正态分布、指数分布、瑞利分布以及反威布尔分布. 尤其,在大样本条件下,拟合效果更好,特别是对于威布尔分布、指数分布、瑞利分布以及反威布尔分布,可靠性经验值几乎完全落在最大熵可靠性分布函数曲线上. 反函数法仿真案例研究结果表明用最大熵方法可以很好地评估概率分布已知的产品失效数据的可靠性,而且不需要对参数进行估计,避免了参数估计的误差,极大地提高了评估的准确性.

2. 1. 2 蒙特卡罗仿真法

蒙特卡罗仿真法研究的基本过程是首先通过蒙特卡罗仿真法进行正态分布以及瑞利分布的蒙

特卡罗随机数仿真获得相应分布的随机数,并将获得的随机数从小到大进行排序,然后利用最大熵方法进行可靠性评估,并将评估结果 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 进行对比,进而验证最大熵方法的理论可行性.

案例 1 正态分布蒙特卡罗仿真案例

取正态分布的参数为位置参数 $\mu=50$, 尺度参数 $\sigma=0.01$, 通过蒙特卡罗仿真法产生 5 个正态分布寿命仿真数据(单位: d). 并将其从小到大进行排序, 然后利用最大熵方法, 得到小样本条件下($n=5$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 11 所示. 可以看到, 最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的变化趋势一致, 且两者之间最大误差的绝对值仅为 $0.96303-0.87037=0.09266$.

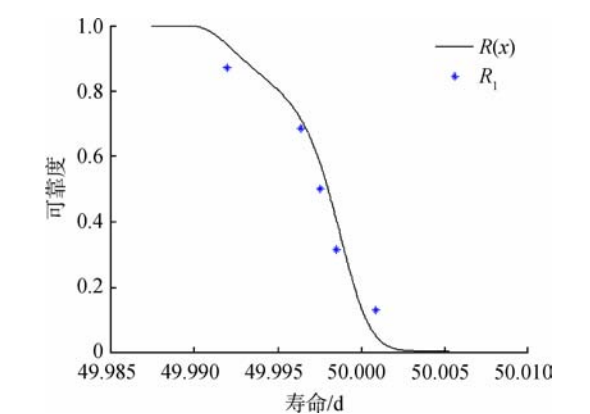


图 11 正态分布蒙特卡罗仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 11 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for Monte Carlo simulation data of normal distribution ($n=5$)

取正态分布的参数为位置参数 $\mu=50$, 尺度参数 $\sigma=0.01$, 通过蒙特卡罗仿真法产生 53 个正态分布寿命仿真数据(单位: d). 并将其从小到大进行排序, 然后利用最大熵方法, 得到大样本条件下($n=53$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 12 所示. 可以看到, 最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的变化趋势基本一致, 两者之间的误差也非常小.

案例 2 瑞利分布蒙特卡罗仿真案例

取瑞利分布的参数为尺度参数 $\lambda=1$, 通过蒙特卡罗仿真法产生 5 个瑞利分布寿命仿真数据(单位: d). 并将其从小到大进行排序, 然后利用最大熵方法, 得到小样本条件下($n=5$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 13 所示. 可以看到,

最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的变化趋势一致,且两者之间最大误差的绝对值仅为 $0.41363-0.31481=0.09882$.

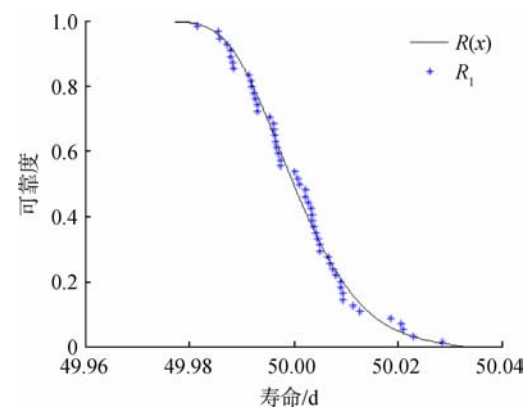


图 12 正态分布蒙特卡罗仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=53$)

Fig. 12 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for Monte Carlo simulation data of normal distribution ($n=53$)

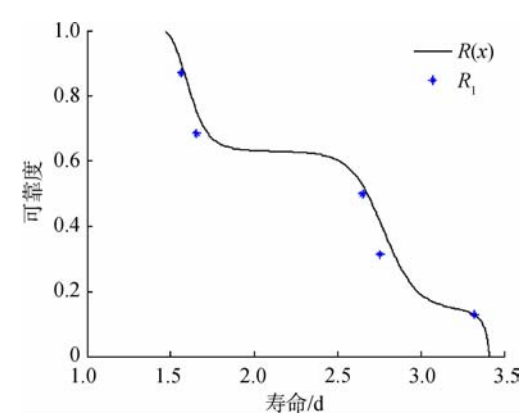


图 13 瑞利分布蒙特卡罗仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=5$)

Fig. 13 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for Monte Carlo simulation data of Rayleigh distribution ($n=5$)

取瑞利分布的参数为尺度参数 $\lambda=1$,通过蒙特卡罗仿真法产生 51 个瑞利分布寿命仿真数据(单位:d),并将其从小到大进行排序.然后利用最大熵方法,得到大样本条件下($n=51$)的最大熵可靠性分布函数的拟合效果图如图 14 所示.可以看到,最大熵可靠性函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的变化趋势基本一致,两者之间的误差非常小.

从以上两种仿真案例中,可以看到无论在小样本条件下还是大样本条件下,最大熵可靠性分

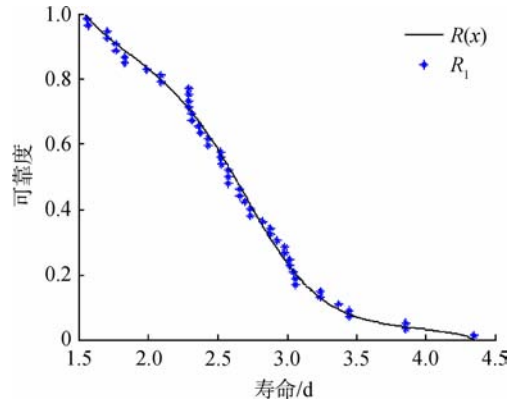


图 14 瑞利分布蒙特卡罗仿真数据最大熵可靠性分布函数拟合图($n=51$)

Fig. 14 Fitting figure of maximum entropy reliability distribution function for Monte Carlo simulation data of Rayleigh distribution ($n=51$)

布函数均能够较好地拟合正态分布以及瑞利分布,然而,在大样本条件下,蒙特卡罗仿真效果相比反函数仿真法略差一点.这是因为蒙特卡罗仿真产生的随机数相对于反函数法手工产生的随机数而言更具随机性,与真实情况更吻合.因而,蒙特卡罗仿真案例研究结果更进一步表明用最大熵方法可以很好地评估概率分布已知的失效数据的可靠性,而且不需要对参数进行估计,与传统评估方法相比,极大地提高了评估的准确性.同时,因为最大熵方法对多种已知分布的良好适用性,表明其在一定程度上能够很好地拟合未知分布的可靠性函数.

2.2 试验研究

本小节主要对最大熵可靠性评估方法进行试验验证研究.

案例 1 这是一个三参数威布尔分布的例子.根据文献[15]的研究,在同一应力水平下测得一组试件的疲劳失效寿命数据 ($n=20$,单位为 10^3 周期,记为 kC)如图 15 所示.

借助于本文建立的最大熵评估模型,进行该

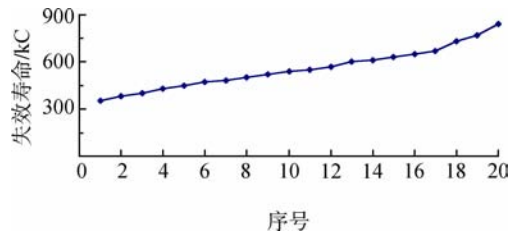


图 15 试件疲劳失效寿命数据
Fig. 15 Data of specimen fatigue life

组试件失效数据可靠性评估的具体过程为:首先,根据可靠性中位秩经验值的计算公式(3),获得寿命数据的可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的经验可靠度取值如表 1 中 $r(x_{0i})$ 所示;其次,利用向量 $\mathbf{R}_1$ 逆推出离散失效频率向量 $\mathbf{P}_{0i}$,如表 1 所示;最后取 $m=5, q=22$,收敛精度 $\epsilon=10^{-12}$,由最大熵方法得到概率密度函数 $f(x)$,再对其积分获得失效概率分布函数,最终得到的可靠性估计真值函数 $R(x)$ 如图 16 所示.

表 1 试件疲劳失效寿命数据的经验可靠度及失效概率
Table 1 Empirical reliability and failure probabilities of specimen fatigue life

序号 i	经验可靠度 $r(x_{0i})$	失效概率 P_{0i}	序号 i	经验可靠度 $r(x_{0i})$	失效概率 P_{0i}
1	0.96569	0.03431	11	0.47549	0.04902
2	0.91667	0.04902	12	0.42647	0.04902
3	0.86765	0.04902	13	0.37745	0.04902
4	0.81863	0.04902	14	0.32843	0.04902
5	0.76961	0.04902	15	0.27941	0.04902
6	0.72059	0.04902	16	0.23039	0.04902
7	0.67157	0.04902	17	0.18137	0.04902
8	0.62255	0.04902	18	0.13235	0.04902
9	0.57353	0.04902	19	0.083333	0.04902
10	0.52451	0.04902	20	0.034314	0.04902

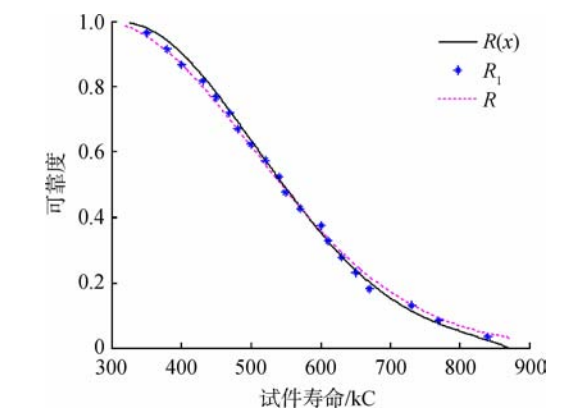


图 16 试件疲劳寿命数据的可靠性估计函数
Fig. 16 Estimated reliability function of specimen fatigue life data

由图 16 可以看出,最大熵可靠性估计真值函数 $R(x)$ 得到的可靠度与可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 之间几乎完全重合,通过计算得到 $R(x)$ 的取

值与 $\mathbf{R}_1$ 之间最大误差的绝对值仅为 0.03777. 为了方便对比分析,图 16 中还显示了文献 [16]借助于自助加权范数法获得的可靠性估计真值函数 R 以及可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$. 可以看到最大熵方法获得的可靠性估计真值函数 $R(x)$ 与自助加权范数法获得的可靠性估计真值函数 $\mathbf{R}$ 两者得到的可靠度对可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的一致性都很好.

由最大熵方法获得的可靠性估计真值结果向量为

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 0.98083 & 0.94215 & 0.90542 & 0.83603 \\ 0.78129 & 0.72461 & 0.69389 & 0.63499 \\ 0.57447 & 0.51649 & 0.48805 & 0.43271 \\ 0.35457 & 0.32877 & 0.28268 & 0.23949 \\ 0.20184 & 0.11424 & 0.07490 & 0.02349 \end{bmatrix}$$

由自助加权范数方法获得的可靠性估计真值结果向量为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.95603 & 0.90814 & 0.86921 & 0.80186 \\ 0.75101 & 0.69905 & 0.67098 & 0.61716 \\ 0.56179 & 0.50870 & 0.48266 & 0.43204 \\ 0.36067 & 0.33709 & 0.29484 & 0.25490 \\ 0.21955 & 0.13344 & 0.092474 & 0.04476 \end{bmatrix}$$

根据文献[16]的研究,自助加权范数法的估计结果优于现有的可靠性估计方法(概率加权矩法)的结果,更接近寿命真实值和可靠性真值,且自助加权范数方法可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}_1$ 误差绝对值的波动范围为 0.00089~0.03818,而最大熵方法的可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}_0$ 与 $\mathbf{R}_1$ 误差绝对值的波动范围为 0.00034~0.03777,接近自助加权范数法的误差绝对值波动范围. 可见最大熵方法获得的可靠性估计真值函数 $R(x)$ 得到的可靠度对可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 的拟合效果跟自助加权范数法的估计结果基本一致. 因此,用最大熵方法获得的可靠性估计真值函数评估机械产品的可靠性是有效且可行的.

通过表 1 中可靠性期望经验值 $r(x_{0i})$ 以及最大熵方法的可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}_0$ 与自助加权范数方法的结果向量 $\mathbf{R}$,可以计算出最大熵可靠性估计真值向量 $\mathbf{R}_0$ 与可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 之间的标准差为 $s_0=0.016588$;自助加权范数法可靠性估计真值向量 $\mathbf{R}$ 与可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 之间的标准差为 $s=0.01557$. s_0 与 s

之间的差值非常小仅为 0.001018,再次证明用最大熵方法获得可靠性估计真值函数评估机械产品的可靠性是有效且可行的.

案例 2 这是一个三参数威布尔分布的例子. 直升机部件 206-011-154-005 的失效数据($n=13$,单位:h)如图 17 所示.

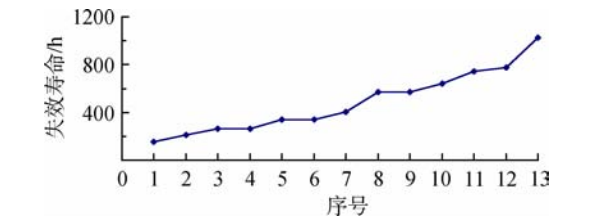


图 17 直升机部件失效数据

Fig. 17 Failure data of helicopter component

借助于最大熵方法($m=5,q=15$),直升机部件可靠性的估计结果如图 18 中的 $R(x)$ 所示. 假设失效寿命 $x=164.4\text{ h}$,则根据图 18 可知,可靠性取值为 $R=R(164.4)=95.10\%$,也就是直升机部件 206-011-154-005 的累积失效概率为 $1-95.10\%=4.90\%$.

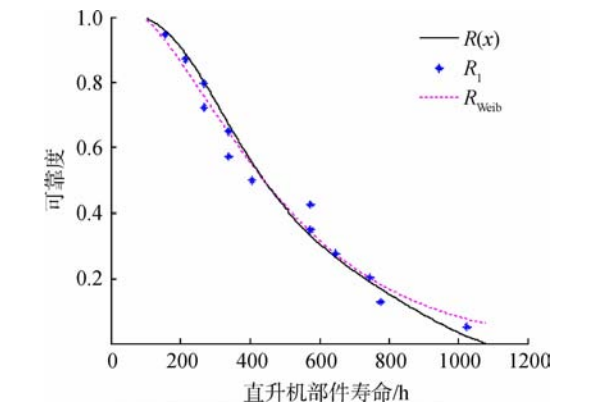


图 18 直升机部件失效数据的可靠性估计函数

Fig. 18 Estimated reliability function of failure data of helicopter component

根据文献[17]的研究,借助于三参数威布尔分布参数的贝叶斯估计方法,可以获得 3 个参数的值即尺度参数 $\eta=520.2$,形状参数 $\beta=1.6726$ 以及位置参数 $\tau=86$.由图 18 可知,当 $x=164.4\text{ h}$ 时,三参数威布尔分布可靠性的取值为 $R=91.70\%$.很显然,两个可靠性取值 95.10% 和 91.70% 之间的差值绝对值很小仅为 $95.10\%-91.70\%=3.40\%$.

该案例的可靠性期望经验值向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 = & \\ & [0.94776 \quad 0.87313 \quad 0.79851 \quad 0.72388 \\ & 0.64925 \quad 0.57463 \quad 0.50000 \quad 0.42537 \\ & 0.35075 \quad 0.27612 \quad 0.20149 \quad 0.12687 \\ & 0.052239] \end{aligned}$$

由最大熵方法获得的可靠性估计真值结果向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 = & \\ & [0.95886 \quad 0.88954 \quad 0.80517 \quad 0.80345 \\ & 0.67436 \quad 0.67256 \quad 0.55221 \quad 0.33393 \\ & 0.33293 \quad 0.26737 \quad 0.19014 \quad 0.18944 \\ & 0.022661] \end{aligned}$$

由贝叶斯估计方法获得的可靠性估计真值结果向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & \\ & [0.92809 \quad 0.84268 \quad 0.76007 \quad 0.75851 \\ & 0.64776 \quad 0.64627 \quad 0.54560 \quad 0.34458 \\ & 0.34358 \quad 0.27731 \quad 0.20143 \quad 0.20079 \\ & 0.07593] \end{aligned}$$

通过可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 以及最大熵方法的可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}_0$ 与贝叶斯估计方法的可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}$,可以计算出最大熵可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}_0$ 与可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 之间的标准差为 $s_0=0.031337$;贝叶斯估计方法的可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}$ 与可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 之间的标准差为 $s=0.026463$. s_0 与 s 之间的差值非常小仅为 0.004874,再次证明用最大熵方法获得可靠性估计真值函数评估机械产品的可靠性是有效且可行的.

案例 3

这是一个小样本且概率分布未知的例子. 试验设备来自河南科技大学与恩梯恩(中国)投资有限公司共建轴承材料实验研究室的 $\phi 12$ 点接触寿命试验机. 试验加载的接触应力为 5.88 GPa,驱动轮回转速度为 4080 r/min. 材料试样为 $\phi 12\text{ mm}$ 的 GCr15 圆柱滚子. 试验所得圆柱滚子失效数据($n=5$,单位:h)如图 19 所示.

借助于最大熵方法($m=5,q=7$),圆柱滚子失效数据可靠性的估计结果如图 20 中的 $R(x)$ 所示. 假设失效寿命 $x=22.079\text{ h}$,则根据图 20 可知,可靠性取值为 $R=R(22.079)=95.03\%$,也就是圆柱滚子的累积失效概率为 $1-95.03\%=4.97\%$.

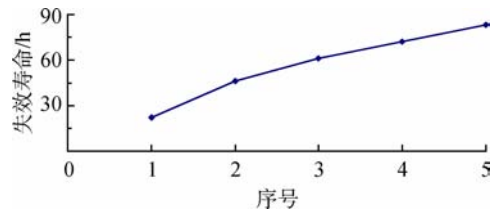


图 19 圆柱滚子失效数据

Fig. 19 Failure data of cylindrical roller

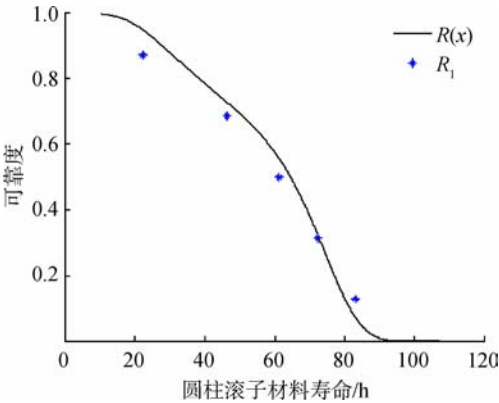


图 20 圆柱滚子失效数据的可靠性估计函数

Fig. 20 Estimated reliability function of failure data of cylindrical roller

该案例的可靠性期望经验值向量为

$$\mathbf{R}_1 =$$

$$[0.87037 \quad 0.68519 \quad 0.5 \quad 0.31481 \quad 0.12963]$$

由最大熵方法获得的可靠性估计真值结果向量为

$$\mathbf{R}_0 = [0.94867 \quad 0.73001 \quad 0.57182 \\ 0.32038 \quad 0.071499]$$

通过可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 以及最大熵方法的可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}_0$, 可以计算出最大熵可靠性估计真值结果向量 $\mathbf{R}_0$ 与可靠性期望经验值向量 $\mathbf{R}_1$ 之间的标准差很小为 $s_0 = 0.022168$. 研究结果表明用最大熵方法获得的可靠性估计真值函数评估概率分布未知的失效数据的可靠性是有效且可行的. 而且该方法也弥补了现有方法只能解决概率分布已知的可靠性评估问题的缺陷.

从上面的试验案例很容易看出最大熵方法能够有效地分析小样本且概率分布已知或未知情况下的可靠性, 且能够很好地弥补现有可靠性分析理论的不足. 在仅有失效数据而没有概率分布任何先验信息的条件下, 最大熵方法能够较好地估计出可靠性函数, 而且在寿命给定时, 最大熵方法获得的可靠度与已知分布获得的可靠度之间的差值非常小仅为 3.4%.

由以上两种仿真案例研究和试验案例研究, 可以看到最大熵可靠性评估方法不仅适用于一些已知的经典分布, 同时也适用于未知的分布. 对于已知分布的可靠性, 最大熵方法获得的结果和现有方法获得的结果一致; 但是分布未知时, 现有方法无法进行可靠性评估, 而本文提出的最大熵方法却能够有效地进行可靠性评估.

3 结 论

以可靠性经验值公式为基础, 获得离散失效频率向量, 也即统计学中的直方图.

提出失效数据可靠性分析的最大熵模型, 得到了概率分布未知的乏信息条件下失效数据可靠性估计真值函数.

对仿真案例与试验案例的研究表明最大熵方法获得的可靠性估计真值函数可以真实有效地评估现有的已知分布以及未知分布的乏信息失效数据的可靠性, 是对现有可靠性理论的一种有益补充.

参考文献:

[1] 杨晓松, 武小悦. 基于 DSPN 的航天测控系统任务可靠性仿真建模[J]. 航空动力学报, 2014, 29(1): 233-240.
YANG Xiaosong, WU Xiaoyue. Mission reliability simulation modeling of space TT&C system based on DSPN[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(1): 233-240. (in Chinese)

[2] 朱磊, 左洪福, 蔡景. 基于 Wiener 过程的民用航空发动机性能可靠性预测[J]. 航空动力学报, 2013, 28(5): 1006-1012.
ZHU Lei, ZUO Hongfu, CAI Jing. Performance reliability prediction for civil aviation aircraft engine based on Wiener process[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(5): 1006-1012. (in Chinese)

[3] 荣吉利, 宋乾强, 张涛, 等. 冗余航天火工装置可靠性评估方法及应用[J]. 宇航学报, 2013, 34(7): 1021-1026.
RONG Jili, SONG Qianqiang, ZHANG Tao, et al. Reliability assessment method for redundant aerospace pyrotechnic devices and its application[J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(7): 1021-1026. (in Chinese)

[4] 王学, 高普云, 冯志刚, 等. 飞船降落伞系统的可靠性建模[J]. 宇航学报, 2011, 32(7): 1645-1649.
WANG Xue, GAO Puyun, FENG Zhigang, et al. Reliability modeling for parachute system of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(7): 1645-1649. (in Chinese)

[5] 徐美萍, 于健, 王若. 威布尔分布中尺度参数的最短区间估计[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(3): 226-228.
XU Meiping, YU Jian, WANG Ru. The estimation of

shortest confidence interval for scale parameter of Weibull distribution[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Sciences Edition, 2014, 38(3): 226-228. (in Chinese)

[6] 芦凌飞, 李金玉. 定时截尾和缺失数据下瑞利分布参数的估计与检验[J]. 统计与决策, 2014(22): 27-29.

LU Lingfei, LI Jinyu. Parameter estimation and test of Rayleigh distribution with timing truncation and missing data[J]. Statistics and Decision, 2014(22): 27-29. (in Chinese)

[7] 卢安平, 赵林, 郭增伟, 等. 基于 Monte Carlo 法的极值分布类型及其参数估计方法比较[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2013, 45(2): 88-95.

LU Anping, ZHAO Lin, GUO Zengwei, et al. A comparative study of extreme value distribution and parameter estimation based on the Monte Carlo method[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(2): 88-95. (in Chinese)

[8] 郑锐. 三参数威布尔分布参数估计及在可靠性分析中的应用[J]. 振动与冲击, 2015, 34(5): 78-81.

ZHENG Rui. Parameter estimation of three-parameter Weibull distribution and its application in reliability analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(5): 78-81. (in Chinese)

[9] 王华伟, 吴海桥. 基于信息融合的航空发动机剩余寿命预测[J]. 航空动力学报, 2012, 27(12): 2749-2755.

WANG Huawei, WU Haiqiao. Residual useful life prediction for aircraft engine based on information fusion[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(12): 2749-2755. (in Chinese)

[10] 蔡忠义, 陈云翔, 项华春, 等. 基于无失效数据的加权 E-Bayes 可靠性评估方法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(1): 219-223.

CAI Zhongyi, CHEN Yunxiang, XIANG Huachun, et al. Method for evaluation of weight expected-Bayesian reliability based on zero-failure data[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(1): 219-223. (in Chinese)

[11] Johnson L G. Theory and technique of variation research [M]. New York: Elsevier, 1970.

[12] Nelson W. Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[13] 夏新涛, 陈晓阳, 张永振, 等. 滚动轴承乏信息试验分析与评估 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[14] XIAO Ningcong, LI Yanfeng, WANG Zhonglai, et al. Bayesian reliability estimation for deteriorating systems with limited samples using the maximum entropy approach [J]. Entropy, 2013, 15(12): 5492-5509.

[15] 赵新攀, 吕震宙, 王维虎. 基于概率加权矩的三参数 Weibull 分布母体百分位值和可靠度置信限估计的新方法 [J]. 西北工业大学学报, 2010, 38(3): 470-475.

ZHAO Xinpan, LÜ Zhenzhou, WANG Weihu. A practical and effective method for estimating confidence limits of population percentile and reliability of three-parameter Weibull distribution on probability weighted moment [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2010, 38(3): 470-475. (in Chinese)

[16] 夏新涛, 徐永智, 金银平, 等. 用自助加权范数法评估三参数威布尔分布可靠性最优置信区间 [J]. 航空动力学报, 2013, 28(3): 481-488.

XIA Xintao, XU Yongzhi, JIN Yinping, et al. Assessment for optimum confidence interval of reliability with three-parameter Weibull distribution using bootstrap weighted-norm method [J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(3): 481-488. (in Chinese)

[17] XIA Xintao, JIN Yinping, XU Yongzhi, et al. Hypothesis testing for reliability with a three-parameter Weibull distribution using minimum weighted relative entropy norm and bootstrap [J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE C: Computer & Electronics, 2013, 14(2): 143-154.

(编辑: 秦理曼)