

圆环管道中曲率对流动稳定性的影响

李 佳¹, 高 军²

(1. 唐山学院 基础教学部, 河北 唐山 063000;

2. 中国航天科技集团公司 中国航天空气动力技术研究院, 北京 100074)

摘 要: 为了研究圆环管道中曲率对流动稳定性的影响,选取了展向带有曲率的轴向流动和轴向带有曲率的周向流动两种圆环管道模型进行分析.采用线性稳定性理论分别计算了两种模型下不同曲率的稳定性和扰动演化情况,并和槽道流进行比较,从而得到了曲率对基本流动、特征值和特征函数的影响.结果表明:曲率越大,基本流向内侧偏转越大,扰动波流向波数越大,增长率越小,中性曲线的不稳定区域越小,特征函数的对称性越差.因此曲率对边界层内的扰动起着稳定的作用,并且在一定范围内曲率越大,稳定性越好.

关 键 词: 线性稳定性; 曲率; 圆环管道; 槽道流; 轴向流动; 周向流动

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Influence of curvature on flow stability in circular pipe

LI Jia¹, GAO Jun²

(1. Department of Basic Teaching,

Tangshan University, Tangshan Hebei 063000, China;

2. China Academy of Aerospace Aerodynamics,

China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100074, China)

Abstract: In order to research the influence of curvature on flow stability in circular pipe, two circular pipe models of axial flow of spanwise curvature and circumferential flow of axial curvature were studied. For two models, the stabilities and disturbance evolutions of difference curvatures were calculated by the linear stability theory. And the results were compared with channel flow. Then the influences of curvature on basic flow, eigenvalue and eigenfunction were obtained. Result showed that, along with the greater curvature, the basic flow would deflect inside, the axial wavenumber of disturbance wave became greater, the growth rate changed smaller, the unstable region of neutral curve diminished and symmetry of eigenfunction got worse. So curvature has a stabilizing influence on disturbances in boundary layers and the stability will be better when the curvature increases gradually in certain rang.

Key words: linear stability; curvature; circular pipe; channel flow;
axial flow; circumferential flow

随着我国工业的发展,对不带曲率的简单模型如槽道流和平板边界层的研究已远远不够,曲面边界层是比较常见的边界层,因此研究曲面边

界层的流动稳定性特性具有重要的实际意义.

20 世纪初,对于黏性流动,Orr 和 Sommerfeld 建立了平行流稳定性的小扰动 Orr-Sommer-

收稿日期:2016-07-25

基金项目:河北省自然科学基金(A2015105073);河北省高等学校科学技术研究项目(ZC2016054);唐山市科技计划项目(15130262a);唐山学院博士创新基金(tsxybc201305)

作者简介:李佳(1984—),女,河北晋州人,讲师,博士,主要从事流动稳定性及转捩预测研究.

feld(O-S)方程, Tollmien 和 Schlichting 预测了小扰动会以波的形式出现, 这类解被称为 Tollmien-Schlichting(T-S)波, Mack, Brown^[1-2] 采用数值方法求解 O-S 方程, Malik 等^[3] 提出了一种适用于变间距网格的 2 点 4 阶精度的紧致格式, 得到了令人满意的结果, 成为迄今常用的方法. 目前很多方法研究了槽道流的流动计算, 孔玮等^[4-5] 通过局部线性稳定性和数值模拟的方法研究了平均流展向周期变化的槽道流的局部不稳定性、全局不稳定性以及两者之间的关系, 得到了局部线性稳定性理论不能预测整体流动的稳定性问题. 罗纪生、王新军等^[6-8] 直接数值模拟研究了槽道流层流-湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理以及转捩中发卡涡演化与波增长的关系. 王龙等^[9] 采用格子玻尔兹曼方法对槽道流进行了计算, 验证了这种方法有足够的精度模拟边界层的发展以及壁面存在对流动的影响. 针对带曲率的边界层的研究, 李佳等^[10-11] 验证了抛物化稳定性方程在平板和曲面边界层中的适用性. Haynes 和 Reed^[12] 计算了 Ribert 等^[13] 试验中横流涡非线性饱和过程, 系统分析了曲率对横流边界层失稳的影响. 国内, 沈钧涛等^[14] 采用动量积分关系研究了横向曲率对轴对称可压缩层流边界层流动的影响. 何伟等^[15] 计算了不同曲面流动的湍流边界层, 得到了曲率对边界层湍流结构的影响小于旋转的影响. 袁湘江, 周恒^[16] 考虑流向曲率对可压缩边界层稳定性的影响, 得到了凹凸不同, 曲率会产生不同的稳定性机制. 徐国亮等^[17] 系统分析了后掠机翼在多种参数下表面曲率对稳定性的影响, 计算结果表明, 曲率在二次失稳计算中影响不大. 左岁寒等^[18] 采用有限差分法求解考虑模型曲率的线性抛物化稳定性方程, 分析无限展长后掠翼边界层内的横流驻波不稳定, 得到了曲率对边界层内的横流扰动起着稳定的作用, 而非平行性对扰动起不稳定的影响.

本文采用线性稳定性理论研究了两类典型的带曲率圆环管道流动的计算, 考虑了不同曲率对流动稳定性的影响, 为直接数值模拟圆环管道的扰动演化奠定了基础.

1 圆环管道的计算模型和方法

1.1 计算模型

研究了两种圆环管道的流动, 模型 1 是展向带有曲率的轴向流动, 取轴向为 x 方向, 周向为 z 方向, 见图 1(a); 模型 2 是流向带有曲率的周向流动, 选取周向为 x 方向, 轴向为 z 方向, 见图 1(b). O 点为坐标原点, 3 个方向 x, y, z 互相垂直.

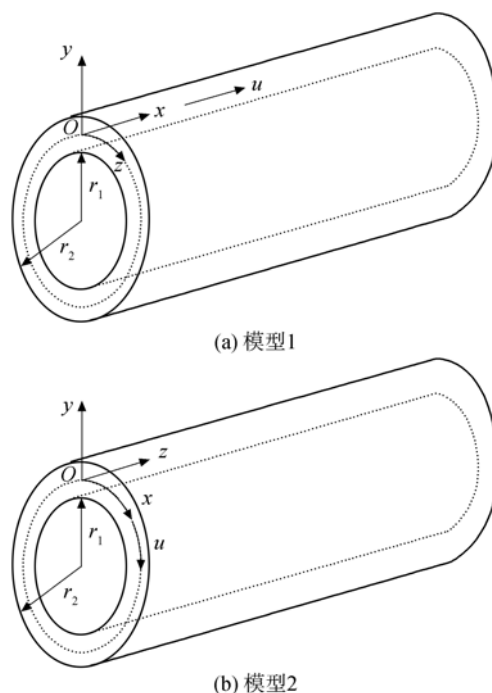


图 1 计算模型

Fig. 1 Calculation model

图 1 中, u 方向为流体的流动方向, 内圆半径为 r_1 , 外圆半径为 r_2 , 用圆环宽度 $h = (r_2 - r_1)/2$ 对长度无量纲化, 无量纲的环中心半径为 $R = (r_2 + r_1)/(r_2 - r_1)$, 此时法向 y 的取值范围为 $[-1, 1]$.

1.2 计算公式

设在一般正交曲线坐标系下, H_1, H_2, H_3 为拉梅系数, 李佳等^[10] 给出了 ∂_i 和 d_{ij} 的定义. 圆环管道模型中, 边界层壁面的法线 y 方向曲率为零, 则 $H_2 = 1$; 在流向 x 、展向 z 上曲率不为零, 则 $H_1 = H_1(x, y), H_3 = H_3(x, y)$.

一般曲线坐标下的线性扰动方程为

$$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + d_{31} u + (d_{12} + d_{32}) v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U}{H_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{H_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{W}{H_3} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + V u d_{12} + U v d_{12} - 2 W w d_{31} =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \cdot \left[\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{H_3^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{H_1} (d_{31} - d_{11}) \frac{\partial u}{\partial x} + (d_{12} + d_{32}) \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\
& \quad \left. \frac{2}{H_1} d_{12} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{H_3} d_{31} \frac{\partial w}{\partial z} + (d_{12} d_{32} + d_{122} + d_{311}) u + (d_{321} + d_{121}) v \right] \\
& \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U}{H_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u}{H_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{H_3} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - 2Ww d_{32} - 2Uud_{12} = \\
& -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{H_3^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{H_1} d_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{H_1} (d_{31} - d_{11}) \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. (d_{12} + d_{32}) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{H_3} d_{32} \frac{\partial w}{\partial z} + (d_{122} + d_{322}) v - (d_{121} + d_{12} d_{31} - d_{312}) u \right] \\
& \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{U}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{H_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{W}{H_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + Uwd_{31} + uWd_{31} + Vwd_{32} + Wvd_{32} = \\
& -\frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{H_3^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{H_3} d_{31} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2}{H_3} d_{32} \frac{\partial v}{\partial z} + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{H_1} (d_{31} - d_{11}) \frac{\partial w}{\partial x} + (d_{12} + d_{32}) \frac{\partial w}{\partial y} + (d_{311} + d_{322} + d_{12} d_{32}) w \right] \quad (1)
\end{aligned}$$

式中 U, V, W, P 为基本流; u, v, w, p 为扰动。

2 圆环管道的基本流

2.1 轴向流动圆环管道的基本流

针对模型 1, 圆环管道轴向流是简单的展向等曲率的流动, 流向和法向没有曲率, 3 个方向的拉梅系数分别为 $H_1 = H_2 = 1, H_3 = 1 + \frac{y}{R}$ 。基本流 U 不随 x 变化, 只随 y 变化, 压差来驱动流动。基本流所满足的方程为

$$\mu \left[\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} \right] = \frac{dP}{dx} \quad (2)$$

边界条件为 $y = -h, U = 0; y = h, U = 0$, 联立边界条件和方程式 (2) 可以得到基本流, 再选取 $\frac{1}{4\mu} \left[-\frac{dP}{dx} \right] \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}$ 作为速度的无量纲参数, 可得到无量纲化的速度分布为

$$\begin{aligned}
U = (1 - y^2) + \frac{R}{2} \left[4 \frac{\ln \left[1 + \frac{y}{R} \right] - \ln \left[1 - \frac{1}{R} \right]}{\ln \left[1 + \frac{1}{R} \right] - \ln \left[1 - \frac{1}{R} \right]} - \right. \\
\left. \frac{1 - y^2}{R} - 2(1 + y) \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

可以看出当曲率半径 $R \rightarrow \infty$ 时, 速度为 $U = 1 - y^2$, 即为平面槽道流的速度分布。

选取了两种不同曲率半径下的展向等曲率圆环管道进行计算, 这两种工况的曲率半径分别为 $R = 100, 10$ 。图 2 显示了两种不同曲率情况和槽道流的基本流分布比较。在 $R = 100$ 曲率半径较大情况下, 和槽道流的结果差别不大, 对于大曲率

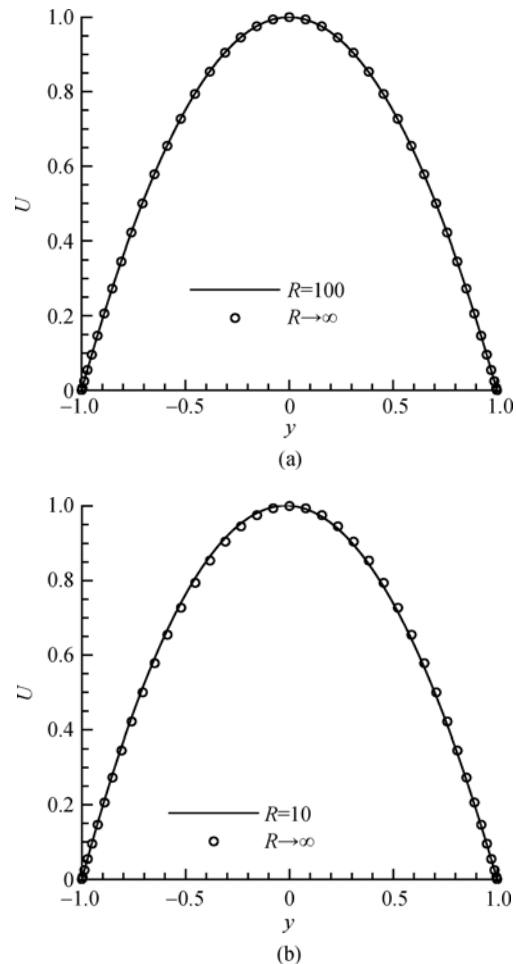


图2 两种情况下的基本流

Fig. 2 Basic flows of two cases

情况 $R = 10$, 基本流相对于槽道流往 $y = -1$ 方向偏转, 即向圆环的内侧偏转。

2.2 周向流动圆环管道的基本流

针对模型 2, 圆环管道周向流是简单的流向

等曲率的流动,可以看成是二维流动,其拉梅系数为 $H_1 = 1 + \frac{y}{R}$, $H_2 = 1$. 选取了3种工况进行计算,曲率半径分别为 $R=100, 20, 10$.

假定流动是在压差作用下产生的, $V=0$, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ 为常数,基本流满足方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{R+y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{(R+y)^2} U = \\ \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{R}{R+y} \\ UU \frac{1}{R+y} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (4)$$

边界条件为 $y=-h, U=0$; $y=h, U=0$, 联立方程式(4)和边界条件求得基本流 U , 再选取 $U = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} h^2$ 作为速度无量纲参数, 得到无量纲的基本流为

$$U = -(R+y) \cdot \left[\frac{(R-1)^2 \ln(R-1) - (R+1)^2 \ln(R+1)}{4} + R \ln(R+y) \right] + \frac{\ln(R-1) - \ln(R+1)}{4} \cdot \frac{(R+1)^2 (R-1)^2}{R+y} \quad (5)$$

可以计算当曲率半径 $R \rightarrow \infty$ 时, 基本流 $U = 1 - y^2$, 即槽道流的基本流.

图3显示了3种不同曲率半径情况和槽道流基本流的比较.

从图3中可以看出, 在 $R=100$ 的情况下, 圆环管道的基本流和槽道流的结果基本重合, 对于情况 $R=20$ 和 $R=10$, 曲率半径对基本流的影响显示出来, 相对于槽道流来说, 基本流往 $y=-1$ 方向偏转, 即向圆环的内侧方向偏移, 曲率半径越小, 偏转越明显.

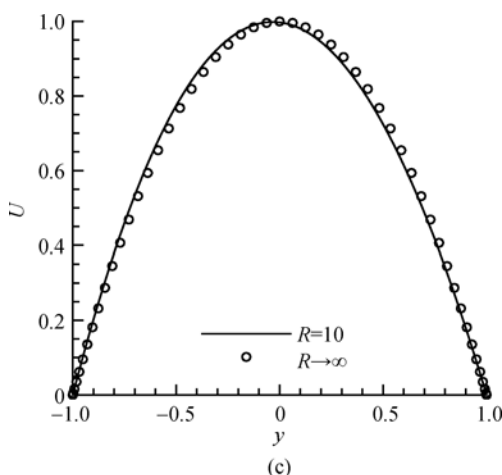
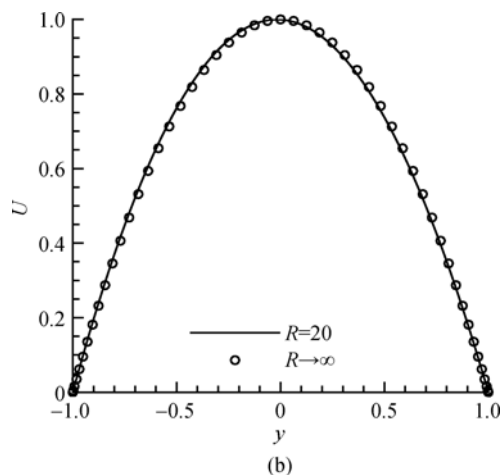
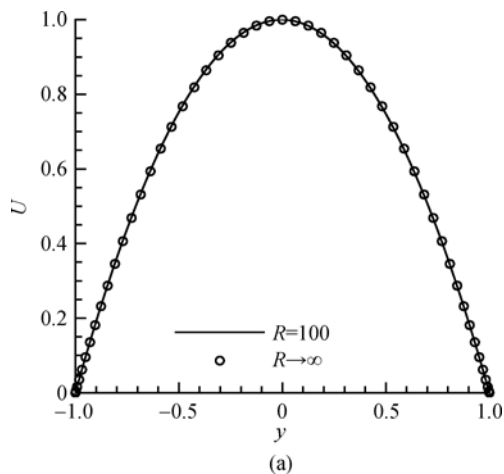


图3 3种情况下的基本流

Fig. 3 Basic flows of three cases

3 稳定性分析

由于两种模型极限情况都是槽道流, 因此在稳定性分析中, 将带曲率的计算结果和槽道流的计算结果相比较, 从而判断曲率对流动的影响.

3.1 轴向流动圆环管道

针对展向等曲率的轴向流动圆环模型, 对曲率半径 R 分别为 100, 10 两种工况进行稳定性分析.

在计算域入口处加入的扰动由一个三维 T-S 波组成, 形式如下:

$$A[\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y)] \cdot \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)] + \text{c. c.} \quad (6)$$

其中 A 是扰动幅值, α, β 与 ω 分别是流向波数、展向波数和频率; $[\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y)]$ 是特征函数, 由 Orr-Sommerfeld 方程特征值问题得到, 其归一化条件为 $\max |u| = 1$; c. c. 表示共轭.

表1给出了所选两种情况下的计算参数, Re 为雷诺数, α_r 为流向波数的实部, $-\alpha_i$ 为虚部, 表

示扰动波的增长率,增长率越大表明流动越不稳定性.可以看出 $R=10$ 的增长率小于 $R=100$ 的增长率,因此可以看出在流动不分离的情况下,曲率半径越小流动越稳定.

图 4 给出了这两种情况下的特征函数,得到了曲率半径越小,特征函数两边的对称性越差.

表 1 两种情况下的特征值
Table 1 Eigenvalues of two cases

工况	Re	α_r	$-\alpha_i$	β	ω
$R=100$	16 000	0.939 807 5	0.018 740 7	0.1	0.2
$R=10$	16 000	0.940 051 5	0.017 852 1	0.1	0.2

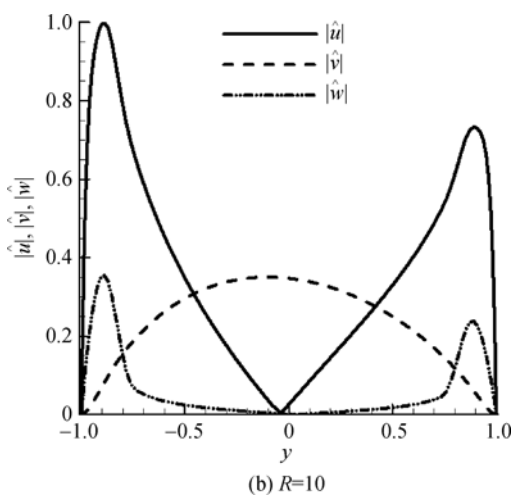
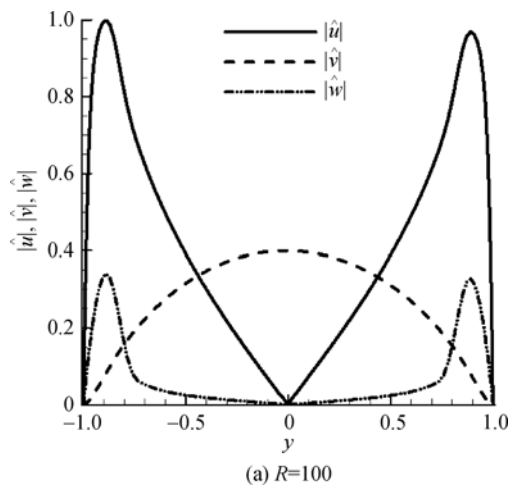


图 4 两种情况下的特征函数
Fig. 4 Eigenfunctions of two cases

图 5 给出的是两种情况下小扰动幅值的演化曲线,给定扰动初始幅值 $A=10^{-4}$,可以看出曲率半径越小,扰动幅值增长幅度也越小,越稳定.

3.2 周向流动圆环管道

针对模型 2 流向等曲率的周向流动圆环模

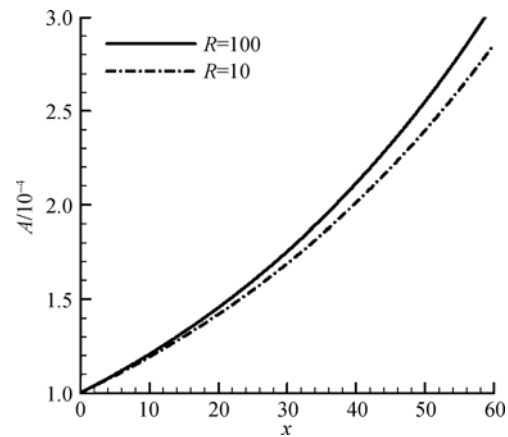


图 5 两种情况下的幅值演化曲线
Fig. 5 Amplitude evolution curves of two cases

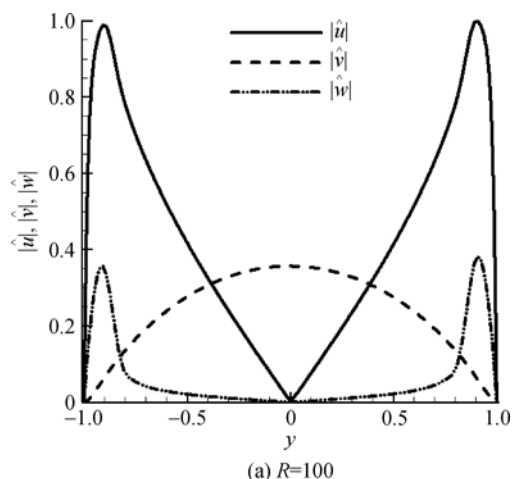
型,对曲率半径围 $R=100, 20, 10$ 的 3 种工况进行稳定性分析.

表 2 给出了 3 种工况的特征值,并和 $R \rightarrow \infty$ 的槽道流结果进行比较.可以看出 $R=100$ 得到的特征值和槽道流的相差很小;情况 $R=20$ 和 $R=10$ 的特征值和槽道流相差较大.同时可以看出曲率半径越小,流向波数越大,相应的流向波长越小,扰动波的增长率越小,流动越稳定.

表 2 3 种情况下的特征值
Table 2 Eigenvalues of three cases

工况	Re	α_r	$-\alpha_i$	β	ω
$R \rightarrow \infty$	35 000	0.810 636 6	0.029 580 4	0.1	0.14
$R=100$	35 000	0.810 762 2	0.029 473 2	0.1	0.14
$R=20$	35 000	0.813 773 7	0.026 937 6	0.1	0.14
$R=10$	35 000	0.823 099 6	0.019 454 6	0.1	0.14

图 6 显示 3 种情况下的特征函数, $R=100$ 计算得到的特征函数基本上是对称的, $R=20$ 和 $R=10$ 的特征函数明显不对称,曲率半径越小不



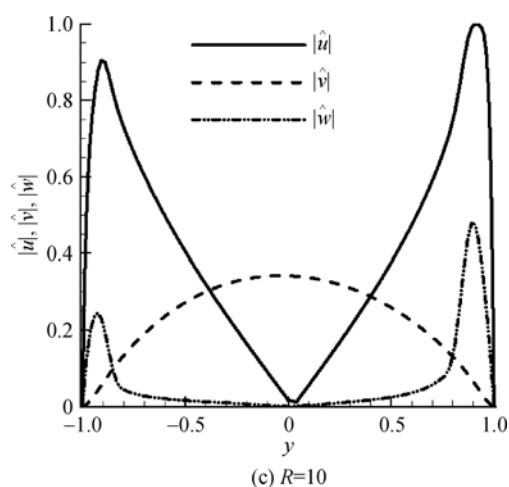
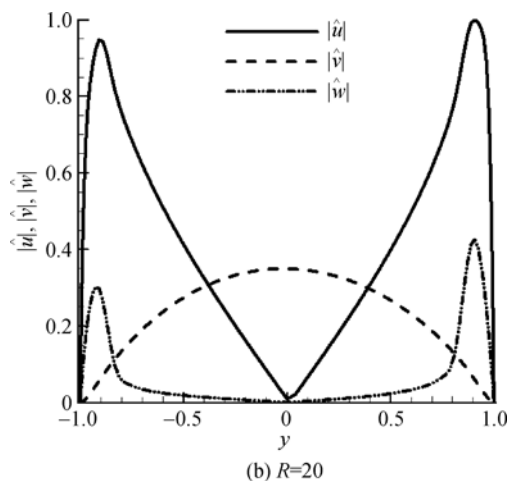


图6 3种情况下的特征函数

Fig. 6 Eigenfunctions of three cases

对称性越大。

图7显示的是槽道流和3种情况的中性曲线,中性曲线内部的波是不稳定的,中性曲线外部的是稳定波。图7(a)显示 (ω, β) 平面内的中性曲线,图7(b)显示 (Re, ω) 平面内的中性曲线。对于 $Re=35000$,曲率半径越小不稳定区域越小;对于

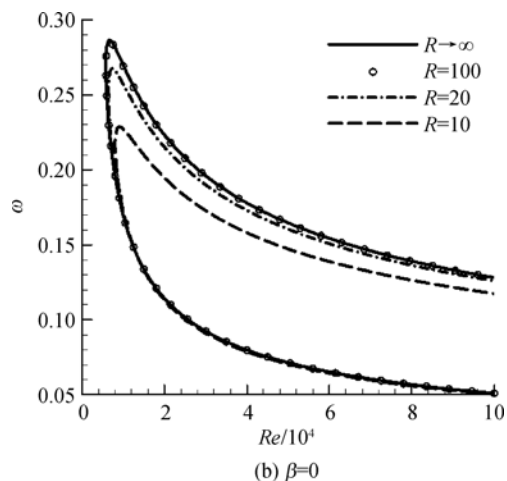
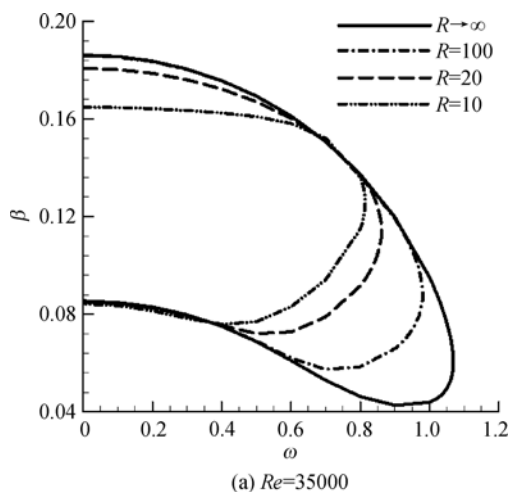


图7 3种情况下的中性曲线

Fig. 7 Neutral curves of three cases

$\beta=0$, $R=100$ 和槽道流的中性曲线基本重合, $R=20$ 和 $R=10$ 的不稳定区域小于槽道流, 曲率半径越小, 不稳定区域越小。通过两个平面内的中性曲线比较可以得到, 曲率半径越小, 不稳定区域越小, 可激发出来增长波的范围越小, 流动越稳定。

图8计算3种情况下小扰动幅值的演化, 给定扰动初始幅值 $A=10^{-4}$, 可以看出曲率半径越小, 扰动幅值增长越小, 越稳定。

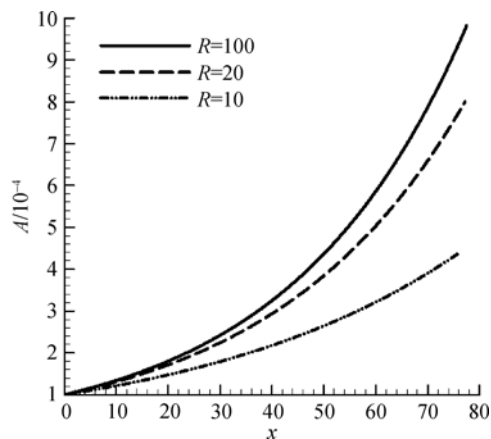


图8 3种情况下的幅值演化曲线

Fig. 8 Amplitude evolution curves of three cases

4 结 论

本文采用一般正交曲线坐标下的线性稳定性方程研究了两种圆环管道流动模型, 分别为展向带曲率的轴向流动和流向带曲率的周向流动, 分别从基本流、特征值、特征函数、中性曲线等方面显示了不同曲率半径下的计算结果, 并和曲率半径为无穷大的槽道流比较, 两种模型得到了类似

的结论

1) 曲率半径不同,基本流的分布不同,不同曲率半径下的基本流均向内侧偏转,曲率半径越小,偏转越大。

2) 曲率半径不同,扰动波的特征值不同,即流向波数和增长率不同,曲率半径越小流向波数越大,流向波长越小,增长率越小,中性曲线的不稳定区域越小,说明可激发出的不稳定波的范围小,流动越稳定。

3) 曲率半径不同,扰动波的特征函数不同,曲率半径越小,特征函数的对称性越差。

参考文献:

- [1] Mack L M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition [J]. AIAA Journal, 1975, 13 (3): 278-289.
- [2] Brown W B. Exact solution of the stability equations for laminar boundary layers in compressible flow[J]. Boundary Layer and Flow Control: Its Principles and Application, 1961, 2: 1033-1048.
- [3] Malik M R, Chuang S, Hussaini M Y. Accurate numerical solution of compressible linear stability equations [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 1982, 33 (2): 189-201.
- [4] 孔玮, 罗纪生. 展向周期变化槽道流中全局稳定性的数值模拟[J]. 天津大学学报, 2015, 48(3): 246-254.
KONG Wei, LUO Jisheng. Numerical simulation of global stability investigation on channel flow with periodical spanwise variation [J]. Journal of Tianjin University, 2015, 48(3): 246-254. (in Chinese)
- [5] KONG Wei, LUO Jisheng. Global instability of stokes layers for whole wave numbers[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(8): 999-1012.
- [6] LUO Jisheng, WANG Xinjun, ZHOU Heng. Inherent mechanism of breakdown in laminar-turbulent transition of plane channel flows[J]. Science China Physics Mechanics & Astronomy, 2005, 48(2): 228-236.
- [7] 王新军, 罗纪生. 槽道流转捩中发卡涡演化与波增长的关系[J]. 天津大学学报, 2010, 43(2): 126-131.
WANG Xinjun, LUO Jisheng. Relationship between evolution of hairpin vortex and increase of waves in channel flow transition[J]. Journal of Tianjin University, 2010, 43(2): 126-131. (in Chinese)
- [8] LUO Jisheng, WANG Xinjun, ZHOU Heng. On the eddy viscosity model of periodic turbulent shear flows[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 19(5): 470-475.
- [9] 王龙, 宋文萍. 基于 LBM 的槽道流直接数值模拟[J]. 西北工业大学学报, 2011, 29(4): 520-523.
WANG Long, SONG Wenping. On feasibility of direct numerical simulation of channel flow based on LBM[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2011, 29 (4): 520-523. (in Chinese)
- [10] 李佳, 罗纪生. 抛物化稳定性方程在曲面边界层中的应用[J]. 航空动力学报, 2015, 30(12): 2976-2982.
LI Jia, LUO Jisheng. Application of the parabolized stability equation in curved surfaces boundary layers[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(12): 2976-2982. (in Chinese)
- [11] LI Jia, LUO Jisheng. Application of parabolized stability equation to predict the transition position in boundary layers[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2012, 33(6): 643-650.
- [12] Haynes S T, Reed L H. Simulation of swept-wing vortices using nonlinear parabolized stability equations[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 405(4): 325-349.
- [13] Reibert M S, Saric W S, Carrillo R B, et al. Experiments in nonlinear saturation of stationary crossflow vortices in a swept-wing boundary layer[R]. Reno, NV: The 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 1996.
- [14] 沈钧涛, 孙天凤. 横向曲率对轴对称可压缩层流边界层的影响[J]. 力学学报, 1966, 9(2): 150-172.
SHEN Juntao, SUN Tianfeng. Effect of transverse curvature on axisymmetric compressible laminar boundary layer [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1966, 9(2): 150-172. (in Chinese)
- [15] 何伟, 沈天耀. 曲率对边界层湍流结构的影响[J]. 水动力学研究与进展, 1992, 7(3): 331-335.
HE Wei, SHEN Tianyao. Effect of curvature on the structure of turbulent boundary layers[J]. Journal of Hydrodynamics, 1992, 7(3): 331-335. (in Chinese)
- [16] 袁湘江, 周恒. 考虑流向曲率和压力梯度的可压缩边界层稳定性分析[J]. 空气动力学学报, 1998, 16(3): 276-281.
YUAN Xiangjiang, ZHOU Heng. Stability analysis for compressible boundary layers with streamwise curvature and pressure gradient [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 1998, 16(3): 276-281. (in Chinese)
- [17] 徐国亮, 符松. 曲率对机翼边界层二次失稳的影响[J]. 力学学报, 2010, 42(6): 995-1004.
XU Guoliang, FU Song. The effect of curvature on the swept wing boundary layer secondary instability[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(6): 995-1004. (in Chinese)
- [18] 左岁寒, 杨永, 李栋. 基于线性抛物化稳定性方程的后掠翼边界层内横流稳定性研究[J]. 计算物理, 2010, 27(5): 665-670.
ZUO Suihan, YANG Yong, LI Dong. Stability research of cross flow in sweepback wing boundary layers based on linear parabolized stability equations[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 27(5): 665-670. (in Chinese)

(编辑: 叶 青、王碧琚)