

含复杂滚动轴承建模的航空发动机整机 振动耦合动力学模型

陈 果

(南京航空航天大学 民航学院, 南京 211106)

摘 要: 在航空发动机整机振动模型中对滚动轴承进行了详细建模。建立了 5 自由度(DOF)球轴承动力学模型,推导了在 5 自由度复杂变形下的轴承力和力矩表达式;针对圆柱滚子轴承,利用“切片法”,推导了考虑轴承径向变形、圆柱转子凸度、轴承间隙以及轴承倾斜引起的角向变形等复杂因素作用下的圆柱滚子轴承的作用力;将复杂的球轴承模型和滚子轴承模型与 6 自由度的转子和机匣有限元梁模型结合,建立了含复杂滚动轴承建模的航空发动机整机振动模型,并利用数值积分方法进行了动力学方程求解。利用带机匣的转子试验器进行了方法验证,与试验结果对比表明,仿真计算的整机振动前 3 阶固有频率误差在 5%以内,对应振型完全相似。

关 键 词: 航空发动机; 整机振动; 滚动轴承; 动力学建模; 耦合动力学

中图分类号: V231.9 **文献标志码:** A

Whole aero-engine vibration coupling dynamics model including modeling of complex ball and roller bearings

CHEN Guo

(College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing 210016, China)

Abstract: The ball and roller bearings were modeled in detail in whole aero-engine vibration model. The 5 DOF (degrees of freedom) model of ball bearing was established, and the bearing forces and moments were deduced under complex deformations of 5DOF. The cylindrical roller bearing was modeled by means of the “section method”, and the bearing force and moments were deduced considering the radial deformation, degree of convexity of cylindrical roller, bearing clearance, and angular deformation due to the bearing inclination. The complex bearing models were combined with the rotor and casing finite element beam model with 6 DOF, the whole aero-engine vibration model including modeling of complex ball and roller bearings was established, and the dynamic responses were solved by the numerical integral method. The aero-engine rig with casings was used to verify the correctness and effectiveness of the model. Compared with the experiment results and showed that, the errors of the first 3 orders natural frequencies were less than 5%, and the mode shapes were fully similar.

Key words: aero-engine; whole aero-engine vibration; ball and roller bearings; dynamic modeling; coupling dynamics

收稿日期: 2015-08-14
基金项目: 国家自然科学基金(51675263)
作者简介: 陈果(1972—),男,教授、博士生导师,博士,主要从事航空发动机整机振动分析、状态监测与故障诊断研究。
引用格式: 陈果. 含复杂滚动轴承建模的航空发动机整机振动耦合动力学模型[J]. 航空动力学报, 2017, 32(9): 2193-2204. CHEN Guo. Whole aero-engine vibration coupling dynamics model including modeling of complex ball and roller bearings[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(9): 2193-2204.

航空发动机支承系统的结构设计往往采用滚珠轴承和滚柱轴承相结合的方式,用角接触球轴承承受轴向和径向载荷、用滚柱轴承承受径向载荷和容许的轴向变形,因此在航空发动机整机振动建模和分析中,建立详细的滚动轴承动力学模型,对于分析滚动轴承对整机振动的影响规律具有重要意义。

目前,国内外学者主要围绕滚动轴承所存在的变柔性(varying compliance, VC)效应、轴承间隙、表面波纹及表面损伤等非线性因素进行动力学建模,揭示了滚动轴承系统所存在的分叉及混沌现象^[1-7],这些研究所建立的滚动轴承动力学模型仅仅考虑了 xOy 平面的运动,即为 2 自由度模型。为了对滚动轴承进行更为详细的建模,国内外学者提出了考虑 x, y, z 方向平动及绕 x 和 y 方向转动的更为详细的 5 自由度滚动轴承模型^[8-11],研究了轴承间隙、波纹、轴向预紧力和径向预紧力对系统稳定性和动力学特征的影响。为了将滚动轴承动力学模型进一步与航空发动机整机振动相结合,文献[12]建立了转子-滚动轴承-机匣耦合动力学模型,文献[13]对模型进一步进行了模态试验验证,但是,其滚动轴承模型采用的是 2 自由度简单模型,且无法区分滚珠球轴承和圆柱滚子轴承的动力学建模,而且转子和机匣的有限元梁模型的节点仅仅考虑了 4 个自由度,缺乏轴向和扭转自由度,因此无法分析轴向振动和弯扭耦合振动;文献[14-15]建立了某航空发动机双转子-滚动轴承耦合系统,考虑了滚珠球轴承和圆柱滚子轴承的详细模型,然而,其转子模型很简单,且缺乏机匣模型,因此不能研究转子-滚动轴承-机匣的耦合振动。文献[18]研究了转子不对中下的球轴承载荷,并由此分析了不对中故障机理,但是文中未考虑圆柱滚子轴承模型,以及转子与机匣的耦合关系。

由此可见,为了更加详细地分析航空发动机整机振动动力学特征,需要进一步建立详细的复杂滚动轴承模型,区分滚珠轴承和滚柱轴承的建模方法,同时将滚动轴承动力学模型与转子和机匣有限元模型进行耦合,建立详细的转子-滚动轴承-机匣耦合动力学模型。为此,本文在文献[12-13]的基础上,引入了详细的滚珠轴承和滚柱轴承动力学模型,推导了复杂的轴承力表达式,并将转子和机匣的有限元节点自由度推广到 6 个,进行了考虑复杂滚动轴承模型的航空发动机整机振动建模与仿真分析。最后用带机匣的航空发动机转子试验器进行了模型验证。

1 5 自由度滚珠球轴承模型

建立固定坐标系 $Oxyz$,其坐标原点 O 为固定点,位于滚动轴承外圈中心点处, x 为轴向坐标, y, z 为径向坐标。5 自由度球轴承模型包括 x, y, z 方向平动及绕 y 和 z 方向转动的 5 个自由度,是最完善和复杂的模型,设滚珠与内外圈接触满足 Hertz 接触应力理论。这样,第 j 个滚珠对轴承内圈沿法线方向的接触力 Q_j 与其法向变形 δ_j 之间的关系为

$$Q_j = k_n \delta_j^n \tag{1}$$

式中 k_n 为滚珠与内外圈之间的总的载荷-变形系数(单位为 N/m^n), n 为接触指数,对于滚珠轴承可以设为 $n=1.5$ 。由此可见,要求出第 j 个轴承的轴承力,需要分别求出载荷-变形系数 k_n 和法向变形 δ_j 。下面分别推导其求解方法。

1.1 总载荷-变形系数 k_n 的计算

滚珠与内外圈之间的总的载荷-变形系数 k_n ,是由内圈和外圈的载荷-变形系数 k_i, k_o 综合求得,即

$$k_n = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{k_i} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{k_o} \right)^{\frac{1}{n}}} \right]^n \tag{2}$$

其中

$$k_i = \left[\frac{32}{9(\delta_i^*)^3 \eta^2 \bar{\rho}_i} \right]^{\frac{1}{2}}, k_o = \left[\frac{32}{9(\delta_o^*)^3 \eta^2 \bar{\rho}_o} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

式中 η 为综合弹性常数

$$\eta = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \mu_o^2}{E_o} \tag{4}$$

式中 μ_i, E_i 分别为内圈的泊松比和弹性模量; μ_o, E_o 分别为外圈的泊松比和弹性模量; δ_i^*, δ_o^* 分别是滚珠与内滚道和外滚道的相对趋近量常数,是与相对曲率 $F(\rho)$ 相关的系数; $F(\rho)_i$ 和 $F(\rho)_o$ 的计算公式分别如式(5)和式(6)所示, δ_i^* 和 δ_o^* 与 $F(\rho)_i$ 和 $F(\rho)_o$ 的关系参见文献[16]。

$$F(\rho)_i = \frac{\frac{2\gamma}{1-\gamma} + \frac{1}{f_i}}{4 + \frac{2\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{f_i}} \tag{5}$$

$$F(\rho)_o = \frac{-\frac{2\gamma}{1+\gamma} + \frac{1}{f_o}}{4 - \frac{2\gamma}{1+\gamma} - \frac{1}{f_o}} \tag{6}$$

式中 f_o 为外圈沟曲率半径系数,取值在 0.515~0.525 之间, f_i 为内圈沟曲率半径系数 f_i ,取值在 0.515~0.525 之间。滚珠与内外圈接触的曲率和 $\bar{\rho}_i$ 和 $\bar{\rho}_o$ 分别是

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{D} \times \left(4 + \frac{2\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{f_i} \right) \quad (7)$$

$$\bar{\rho}_o = \frac{1}{D} \times \left(4 - \frac{2\gamma}{1+\gamma} - \frac{1}{f_o} \right) \quad (8)$$

式中 $\gamma = \frac{D \cos \alpha_0}{d_m}$, 其中 D 为滚珠直径, d_m 为节圆直径, α_0 为初始接触角。

1.2 滚珠轴承法向变形 δ_j 的计算

在固定坐标系 $Oxyz$ 中。作用在滚动轴承上的外载荷和相应的滚动轴承弹性变形分别为 $F = \{F_x, F_y, F_z, M_y, M_z\}$, $q = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \phi_y, \phi_z\}$ 。

对于任意第 j 个滚珠, 正常状态下它与内外圈的接触示意图如图 1 所示, 设置固定坐标系 Oxr , 其中 Ox 为轴向, Or 为径向。 α_0 为滚转与内外圈间的初始接触角, O_i 和 O_o 分别为加载前内外圈沟曲率的中心位置, 加载前内外圈沟曲率中心位置 O_i 和 O_o 之间的初始距离为 A_0 。

轴承产生变形后的滚珠与内外圈的变形示意图如图 1 和图 2 所示。其中 α_0 为初始接触角, α_j 为加载后的接触角, O'_i 为加载后内圈沟曲率的中心位置。因外圈固定, 加载后外圈沟曲率的中心位置仍在 O_o 处, A_j 为 O'_i 和 O_o 之间的距离, δ_j 为第 j 个滚珠在接触法向方向上的总接触变形量, δ_{xj} 为滚珠在轴向的弹性变形量, δ_{rj} 为滚珠在径向的弹性变形量。

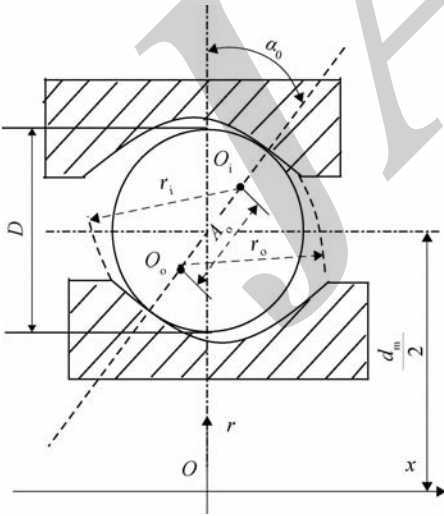


图 1 滚珠与内外圈接触示意图

Fig. 1 Schematic diagram of contact between ball, inner and outer rings

第 j 个滚珠的法向变形为

$$\delta_j = \begin{cases} A_j - A_0, & \delta_j > 0 \\ 0, & \delta_j \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中 $A_0 = (f_o + f_i - 1)D$, 为受负荷前内外圈沟

曲率中心位置之间的初始距离。

滚珠与内外圈相对变形示意图如图 2 所示。滚珠轴承的初始接触角由径向游隙、球与滚道的吻合度共同决定, 设径向游隙为 P_d , 则初始接触角为

$$\alpha_0 = \cos^{-1} \left(1 - \frac{P_d}{2A_0} \right) \quad (10)$$

受载后的距离为

$$A_j = \sqrt{(A_0 \sin \alpha_0 + \delta_{xj})^2 + (A_0 \cos \alpha_0 + \delta_{rj})^2} \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} \delta_{xj} = \delta_x + R_j (\phi_y \sin \phi_j - \phi_z \cos \phi_j) \\ \delta_{rj} = \delta_y \cos \phi_j + \delta_z \sin \phi_j \end{cases} \quad (12)$$

其中 R_j 为内滚道沟曲率中心轨迹半径, 即

$$R_j = \frac{d_m}{2} + \left[f_i D - \frac{D}{2} \right] \cos \alpha_0 \quad (13)$$

式中 ϕ_j 为第 j 个轴承位置角, 设滚珠数为 m , 内圈的旋转速度为 ω_i , 外圈的旋转速度为 ω_o , 外滚道半径为 $R_o = \frac{d_m}{2} + \frac{D}{2} \times \cos \alpha_0$, 内滚道半径为

$R_i = \frac{d_m}{2} - \frac{D}{2} \times \cos \alpha_0$, 由文献[6]可知保持架旋转速度为

$$\omega_c = \frac{(\omega_o \times R_o + \omega_i \times R_i)}{(R_o + R_i)} \quad (14)$$

因此, t 时刻第 j 个轴承位置角 ϕ_j 为

$$\begin{aligned} \phi_j &= \omega_c \times t + \frac{2\pi(j-1)}{m} \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

α_j 为负荷后实际的接触角, 满足

$$\tan \alpha_j = \frac{A_0 \sin \alpha_0 + \delta_{xj}}{A_0 \cos \alpha_0 + \delta_{rj}} \quad (16)$$

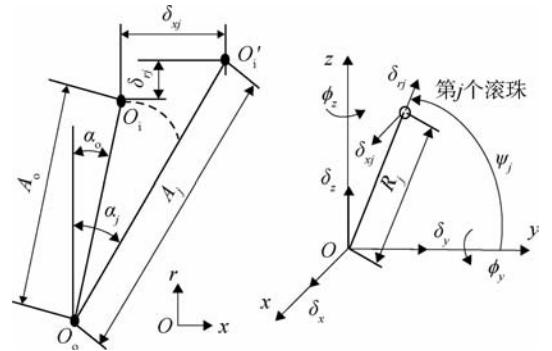


图 2 滚珠与内外圈相对变形示意图

Fig. 2 Schematic diagram of relative deformation of ball and inner and outer rings

1.3 滚珠轴承轴承力的计算

在求出总载荷-变形系数 k_n 和第 j 个滚珠法向变形 δ_j 后, 第 j 个滚珠的弹性接触力 Q_j 可由式(1)得出, 按 5 个自由度方向进行分解, 即可得

到作用在滚动轴承上的外载荷,即

$$F_{xj} = Q_j \sin \alpha_j \tag{17}$$

$$F_{yj} = Q_j \cos \alpha_j \cos \psi_j \tag{18}$$

$$F_{zj} = Q_j \cos \alpha_j \sin \psi_j \tag{19}$$

$$M_{yj} = R_j Q_j \sin \alpha_j \sin \psi_j \tag{20}$$

$$M_{zj} = -R_j Q_j \sin \alpha_j \cos \psi_j \tag{21}$$

则 5 自由度下的轴承力和力矩分别为

$$F_x = \sum_{j=1}^m F_{xj}, F_y = \sum_{j=1}^m F_{yj}, F_z = \sum_{j=1}^m F_{zj},$$

$$M_y = \sum_{j=1}^m M_{yj}, M_z = \sum_{j=1}^m M_{zj}$$

2 圆柱滚子轴承力模型

采用切片法^[17]进行滚子轴承的变形分析,“切片法”假设任何滚子-滚道接触在平行于轴承径向平面内都可以划分为一定数量的“切片”。同时还假定,由于接触变形很小,可以忽略切片间的切应力,仅仅考虑接触变形。设滚子轴承的游隙为 S_d 、滚子数目为 Z 、切片数为 K 、切片宽度 $w=l/K$;

建立与图 1 相同的固定坐标系 Oxr ,与图 2 相同的固定坐标系 $Oxyz$,第 j 个转子的位置定义如图 2 所示, t 时刻第 j 个轴承位置角 ψ_j 仍按式 (15) 进行计算,需要注意的是,对于圆柱滚子轴承,其接触角为 0° 。

当径向载荷作用在不同轴的圆柱滚子轴承上时,在凸度滚子-滚道接触的每个切片上,其变形由 3 个分量组成;①由径向载荷在方位为 j 的滚子处产生的变形 Δ_{rj} ;②由于滚子凸度在第 λ 个切片上产生的变形 c_λ ;③由于轴承不同轴和滚子倾斜在方位为 j 的滚子处产生的变形 $\Delta_{\theta j}$;图 3 中为轴承倾斜示意图、图 4 为变形分量的示意图。

1) 由内外圈径向位移引起的变形

设 y,z 方向的相对径向位移分别为 $\Delta S_y, \Delta S_z$, 则,由 $\Delta S_y, \Delta S_z$ 引起的第 j 个滚子的径向变形分

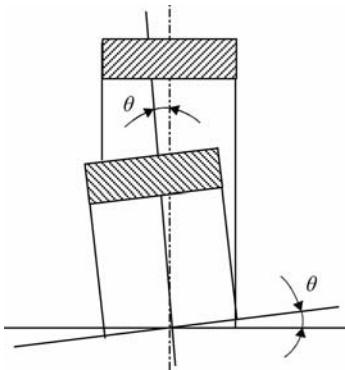


图 3 轴承倾斜示意图

Fig. 3 Schematic diagram of tilted bearing

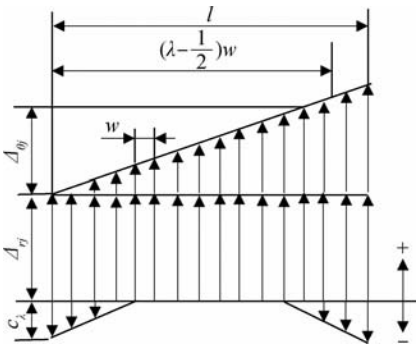


图 4 滚子-滚道接触分量示意图

Fig. 4 Schematic diagram of contact components between roller and race

别如下:

(1) ΔS_y 引起的径向变形

$$\Delta_{ryj} = \frac{1}{2} (\Delta S_y \cdot \cos \psi_j) \tag{22}$$

(2) ΔS_z 引起的径向变形

$$\Delta_{rzj} = \frac{1}{2} (\Delta S_z \cdot \sin \psi_j) \tag{23}$$

2) 由内外圈相对倾斜产生的径向变形

设绕 y 方向、 z 方向的相对径向转角分别为 θ_y, θ_z , 则,由 θ_y, θ_z 引起的第 j 个滚子的径向变形分别如下:

(1) θ_y 引起的径向变形

$$\Delta_{\theta_{lyj}} = \frac{1}{2} \theta_y \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \cdot w \cdot \cos \psi_j \tag{24}$$

(2) θ_z 引起的径向变形

$$\Delta_{\theta_{lzj}} = -\frac{1}{2} \theta_z \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \cdot w \cdot \sin \psi_j \tag{25}$$

3) 由滚子凸度产生的径向变形

滚子和滚道的凸度可以避免导致滚动元件过早疲劳失效的边缘载荷。凸度可以以不同的形式实现。本文采用带有局部凸度的圆柱滚子,即只在滚子轮廓的一部分带有凸度,而其余部分仍然为圆柱面,其示意图如图 5 所示,其中 l 为滚柱轴

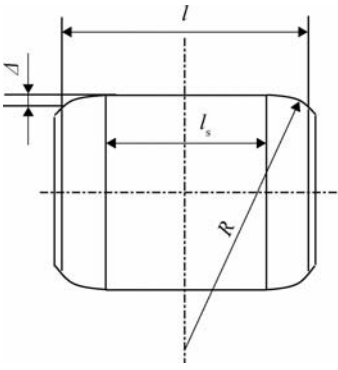


图 5 带局部凸度的滚子示意图

Fig. 5 Schematic diagram of roller with local convex

承滚子的有效长度; η 为直线段长度系数, 直线段长度 $l_s = \eta \cdot l$; Δ 为滚子凸度量。由凸度产生的

$$C_\lambda = \begin{cases} \Delta \cdot \frac{\left(\frac{2\lambda-1}{K} - 1\right)^2 - \left(\frac{l_s}{l}\right)^2}{1 - \frac{l_s}{l}} & \left(\frac{2\lambda-1}{K} - 1\right)^2 - \left(\frac{l_s}{l}\right)^2 > 0 \\ 0 & \left(\frac{2\lambda-1}{K} - 1\right)^2 - \left(\frac{l_s}{l}\right)^2 \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

4) 第 j 个滚子、第 λ 个切片的变形

如图 4 所示, 第 j 个滚子、第 λ 个切片的变形由 3 个分量组成, 即: ① 由径向载荷产生的变形 Δ_{rj} ; ② 由于滚子凸度产生的变形 c_λ ; ③ 由于轴承倾斜产生的变形 $\Delta_{\theta j}$ 。另外, 切片变形还将去掉轴承间隙 S_d 的影响部分。因此, 第 j 个滚子、第 j 个切片的总变形 $\delta_{\lambda j}$ 为

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda j} = & \Delta_{rj} + \Delta_{rzj} - \frac{S_d}{4} + \Delta_{\theta yj} + \Delta_{\theta zj} - C_\lambda = \\ & \frac{1}{2}(\Delta S_y \cdot \cos\psi_j) + \frac{1}{2}(\Delta S_z \cdot \sin\psi_j) - \frac{S_d}{4} + \\ & \frac{1}{2}\theta_y\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot w \cdot \cos\psi_j - \frac{1}{2}\theta_z\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \\ & w \cdot \sin\psi_j - C_\lambda \end{aligned} \quad (27)$$

5) 轴承力

首先由第 j 个滚子的 K 个切片变形计算第 j 个滚子的载荷 Q_j , 即

$$Q_j = \frac{w^{-0.89}}{1.24 \times 10^{-5} \times K^{0.11}} \sum_{\lambda=1}^K (\delta_{\lambda j})^{1.11} \quad (28)$$

然后, 可以得到各自由度下的轴承力和力矩, 即

$$F_{xj} = 0, F_x = \sum_{i=1}^m F_{xj} \quad (29)$$

$$F_{yj} = Q_j \cos\psi_j, F_y = \sum_{i=1}^m F_{yj} \quad (30)$$

$$F_{zj} = Q_j \sin\psi_j, F_z = \sum_{i=1}^m F_{zj} \quad (31)$$

$$M_{yj} = 0, M_y = \sum_{i=1}^m M_{yj} \quad (32)$$

$$M_{zj} = 0, M_z = \sum_{i=1}^m M_{zj} \quad (33)$$

显然, 滚柱轴承仅能承受径向载荷, 不能承受轴向力和各方向的力矩。

3 航空发动机整机振动模型

由于滚珠球轴承考虑了 5 个自由度, 因此, 利用文献[12-13]的方法进行航空发动机整机振动建模, 需要将转子和机匣梁单元节点的自由度从 4 个扩展为 6 个。建立坐标系如图 6 所示, 其中 $Oxyz$ 为固定坐标系。变形状态下, 自由度定义:

滚子-滚道接触变形分量为

任意截面相对于固定坐标系的位置按以下方法确定: 横截面沿转子轴向 x 的位移 S_x , 沿径向 y 向位移 S_y 、沿径向 z 向位移 S_z 、绕 x 向旋转 θ_x , 绕 y 向转角 θ_y , 绕 z 向转角 θ_z 。

3.1 转子模型

转子考虑为由若干支承和转盘组成, 转子利用有限元方法离散为普通梁单元, 考虑转子系统的剪切变形、陀螺力矩及转动惯量。转子与其他转子、机匣以及支承之间通过非线性力和力矩耦合。另外转子节点上还将承受来自外部的激励力。图 6 为本文建立的 6 自由度有限元转子动力学模型。

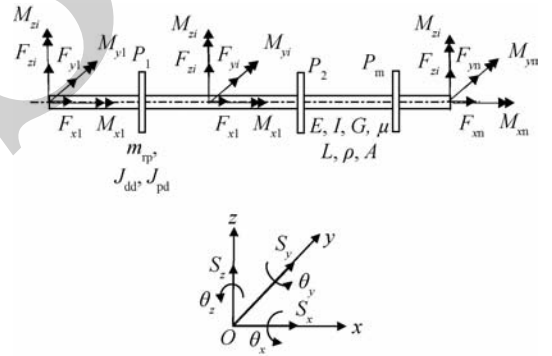


图 6 6 自由度(DOF)有限元转子动力学模型

Fig. 6 Finite element rotor dynamic model with 6 DOFs

转子由分布质量和弹性轴、离散的刚性盘组成, 设转子有 N 个节点和 M 个盘, 如图 6 所示。对每个转轴单元, E, I, G, μ, L, ρ, A 分别为转轴单元的弹性模量、截面惯性矩、切变模量、泊松比、转轴长度、转轴密度、转轴截面积; 对圆盘 P_i , m_{pi}, J_{ddi}, J_{pdi} 为圆盘质量、赤道转动惯量、极转动惯量; F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} 为转子第 i 个节点所受力; M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} 为转子第 i 个节点所受力矩。

3.1.1 刚性盘单元运动方程

设盘的质量为 m_p , 赤道转动惯量为 J_{dd} , 极转动惯量为 J_{pd} , ω 为盘的转动角速度。利用拉格朗日方程可得刚性盘相对固定坐标系的运动方程为

$(\boldsymbol{M}_{td} + \boldsymbol{M}_{rd})\ddot{\boldsymbol{q}}_d - \omega \boldsymbol{G}_d \dot{\boldsymbol{q}}_d = \boldsymbol{Q}_d \tag{34}$

式中 $\boldsymbol{Q}_d$ 为广义外力向量; $\boldsymbol{M}_{td}$ 和 $\boldsymbol{M}_{rd}$ 分别为质量矩阵和质量惯性矩阵; $\boldsymbol{G}_d$ 为陀螺矩阵; $\boldsymbol{q}_d$ 为广义位移向量, $\boldsymbol{q}_d = [S_x, S_y, S_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z]$ 。其中

$$\boldsymbol{M}_{td} = \begin{bmatrix} m_p & & & & & \\ 0 & m_p & & & & \\ 0 & 0 & m_p & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{M}_{rd} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & J_{pd} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{dd} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{dd} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{pd} & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.2 普通梁单元运动方程

设单元弹性模量为 E , 切变模量为 G , 泊松比为 μ , 内径为 d , 外径为 D , 长度为 L , 则截面惯性矩 I

$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$

$$\boldsymbol{M}_{te} = \frac{\rho L}{(1 + \phi_s)^2} \times \begin{bmatrix} M_{z1} & & & & & & & & & \\ 0 & M_{t1} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & M_{t1} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & M_{z2} & & & & & & \\ 0 & 0 & -M_{t4} & 0 & M_{t2} & & & & & \\ 0 & M_{t4} & 0 & 0 & 0 & M_{t2} & & & & \\ M_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{z1} & & & \\ 0 & M_{t3} & 0 & 0 & 0 & M_{t5} & 0 & M_{t1} & & \\ 0 & 0 & M_{t3} & 0 & -M_{t5} & 0 & 0 & 0 & M_{t1} & \\ 0 & 0 & 0 & M_{z4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{z2} \\ 0 & 0 & M_{t5} & 0 & M_{t6} & 0 & 0 & 0 & M_{t4} & 0 & M_{t2} \\ 0 & -M_{t5} & 0 & 0 & 0 & M_{t6} & 0 & -M_{t4} & 0 & 0 & 0 & M_{t2} \end{bmatrix}$$

(36)

式中 $M_{z1} = \frac{1}{3}(1 + \phi_s)^2$, $M_{z2} = \frac{J}{3A}(1 + \phi_s)^2$, $M_{z3} = \frac{1}{6}(1 + \phi_s)^2$, $M_{z4} = \frac{J}{6A}(1 + \phi_s)^2$, $M_{t1} = \frac{13}{15} + \frac{7}{10}\phi_s + \frac{1}{3}\phi_s^2$, $M_{t2} = \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60}\phi_s + \frac{1}{120}\phi_s^2\right)L^2$, $M_{t3} = \frac{9}{70} + \frac{3}{10}\phi_s + \frac{1}{6}\phi_s^2$, $M_{t4} = \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\phi_s + \frac{1}{24}\phi_s^2\right)L$,

截面极惯性矩 J

$J = 2I = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

剪切变形系数 $\phi_s = \frac{12EI}{GA_sL^2}$

横截面面积 A

$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

有效抗剪面积 A_s

$A_s = \frac{A}{\frac{10}{9}\left(1 + \frac{1.6D \times d}{D^2 + d^2}\right)}$

或

$A_s = \frac{A}{\frac{7 + 6\mu}{6(1 + \mu)}\left[1 + \frac{20 + 12\mu}{7 + 6\mu}\left(\frac{D \times d}{D^2 + d^2}\right)^2\right]}$

每个梁单元具有两个节点, 12 个自由度. 每个节点具有 6 个自由度, 即 x, y, z 方向及绕它们的转角. 由拉格朗日方程, 可得梁单元相对于固定坐标的运动方程

$(\boldsymbol{M}_{te} + \boldsymbol{M}_{re})\ddot{\boldsymbol{q}}_e + (-\omega \boldsymbol{G}_e)\dot{\boldsymbol{q}}_e + (\boldsymbol{K}_{be} - \boldsymbol{K}_{ae})\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{Q}_e \tag{35}$

式中 $\boldsymbol{Q}_e$ 为广义外力向量; $\boldsymbol{M}_{te}$ 和 $\boldsymbol{M}_{re}$ 分别为质量矩阵和质量惯性矩阵; $\boldsymbol{G}_e$ 为陀螺矩阵; $\boldsymbol{K}_{be}$ 为单元弯曲和剪切刚度矩阵; $\boldsymbol{K}_{ae}$ 为单元拉伸刚度矩阵; $\boldsymbol{q}_e$ 为广义位移向量, 由梁单元两个节点的广义位移组成, 即

$\boldsymbol{q}_e = [S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}, S_{2x}, S_{2y}, S_{2z}, \theta_{2x}, \theta_{2y}, \theta_{2z}]$

其中

$$M_{t5} = \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\phi_s + \frac{1}{24}\phi_s^2\right)L, M_{t6} = -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60}\phi_s + \frac{1}{120}\phi_s^2\right)L^2。$$

$$\mathbf{M}_{re} = \frac{\rho L}{(1 + \phi_s)^2} \left(\frac{r_\rho}{L}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & M_{r1} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & M_{r1} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -M_{r4} & 0 & M_{r2} & & & & & & \\ 0 & M_{r4} & 0 & 0 & 0 & M_{r2} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -M_{r1} & 0 & 0 & 0 & -M_{r4} & 0 & M_{r1} & & & \\ 0 & 0 & -M_{r1} & 0 & M_{r4} & 0 & 0 & 0 & M_{r1} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -M_{r4} & 0 & M_{r3} & 0 & 0 & 0 & M_{r4} & 0 & M_{r2} \\ 0 & M_{r4} & 0 & 0 & 0 & M_{r3} & 0 & -M_{r4} & 0 & 0 & 0 & M_{r2} \end{bmatrix}$$

(37)

式中 $M_{r1} = \frac{6}{5}, M_{r2} = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\phi_s + \frac{1}{3}\phi_s^2\right)L^2, M_{r3} = \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\phi_s + \frac{1}{6}\phi_s^2\right)L^2, M_{r4} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_s\right)L,$
 $r_\rho = \sqrt{\frac{I}{A}}。$

$$G_e = \frac{\rho}{15L} \left(\frac{r_\rho}{1 + \phi_s}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & G_1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & -G_2 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & -G_2 & 0 & G_4 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & G_1 & 0 & -G_2 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & -G_2 & 0 & G_1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -G_2 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_2 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & G_4 & 0 \end{bmatrix}$$

(38)

式中 $G_1 = 36, G_2 = 3L - 15L\phi_s, G_3 = L^2 + 5L^2\phi_s - 5L^2\phi_s^2, G_4 = 4L^2 + 5L^2\phi_s + 10L^2\phi_s^2。$

$$\mathbf{K}_{be} = \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} K_{z1} & & & & & & & & & & \\ 0 & K_{b1} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & K_{b1} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & K_{z2} & & & & & & & \\ 0 & 0 & -K_{b4} & 0 & K_{b2} & & & & & & \\ 0 & K_{b4} & 0 & 0 & 0 & K_{b2} & & & & & \\ -K_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{z1} & & & & \\ 0 & -K_{b1} & 0 & 0 & 0 & -K_{b4} & 0 & K_{b1} & & & \\ 0 & 0 & -K_{b1} & 0 & K_{b4} & 0 & 0 & 0 & K_{b1} & & \\ 0 & 0 & 0 & -K_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{z2} & \\ 0 & 0 & -K_{b4} & 0 & K_{b3} & 0 & 0 & 0 & K_{b4} & 0 & K_{b2} \\ 0 & K_{b4} & 0 & 0 & 0 & K_{b3} & 0 & -K_{b4} & 0 & 0 & 0 & K_{b2} \end{bmatrix}$$

(39)

式中 $K_{z1} = \frac{AL^2}{I}$, $K_{z2} = \frac{GJL^2}{EI}$, $K_{b1} = \frac{12}{1+\phi_s}$, $K_{b2} = \left(\frac{4+\phi_s}{1+\phi_s}\right)L^2$, $K_{b3} = \left(\frac{2-\phi_s}{1+\phi_s}\right)L^2$, $K_{b4} = \left(\frac{6}{1+\phi_s}\right)L$.

$$\mathbf{K}_{ae} = \frac{H}{30L(1+\phi_s)^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & K_{a1} & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & K_{a1} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -K_{a4} & 0 & K_{a2} & & & & & & \\ 0 & K_{a4} & 0 & 0 & 0 & K_{a2} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -K_{a1} & 0 & 0 & 0 & -K_{a4} & 0 & K_{a1} & & & \\ 0 & 0 & -K_{a1} & 0 & K_{a4} & 0 & 0 & 0 & K_{a1} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -K_{a4} & 0 & K_{a3} & 0 & 0 & 0 & K_{a4} & 0 & K_{a2} \\ 0 & K_{a4} & 0 & 0 & 0 & K_{a3} & 0 & -K_{a4} & 0 & 0 & 0 & K_{a2} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \\ \\ \text{称} \end{matrix} \quad (40)$$

式中 $K_{a1} = 36 + 60\phi_s + 30\phi_s^2$, $K_{a2} = 4L^2 + 5L^2\phi_s + 2.5L^2\phi_s^2$; $K_{a3} = -(L^2 + 5L^2\phi_s + 2.5L^2\phi_s^2)$; $K_{a4} = 3L$.

3.1.3 转子系统运动方程

将单元的运动方程进行组装,可得到转子系统运动方程,即

$(\mathbf{M}_s)\ddot{\mathbf{q}}_s + (\mathbf{C}_s - \omega\mathbf{G}_s)\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{K}_s\mathbf{q}_s = \mathbf{Q}_s$ (41)

式中 $\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s$ 为广义位移、速度和加速度向量; $\mathbf{Q}_s$ 为系统广义外力向量; $\mathbf{M}_s$ 为系统质量矩阵; $\mathbf{G}_s$ 为系统陀螺矩阵; $\mathbf{K}_s$ 为系统刚度矩阵; $\mathbf{C}_s$ 为系统阻尼矩阵。将 $\mathbf{C}_s$ 假设为比例阻尼,即 $\mathbf{C}_s = \alpha_0\mathbf{M}_s + \alpha_1\mathbf{K}_s$, 其中 α_0, α_1 为常数,可由模态试验得到。

3.2 机匣模型

对于机匣,同文献[12-13],将机匣处理为不旋转的梁,与转子模型的处理方法相同。

3.3 支承模型

同文献[12-13],同样可以定义了多种支承连接方式,即:转子-机匣间的支承连接、转子间联轴器连接、转子间中介轴承联结、机匣间螺栓连接以及机匣安装节连接等。多种连接方式可以自由组合从而形成复杂的转子-支承-机匣结构。在支承结构的离散集总参数建模中,轴承力模型需要用本文滚珠轴承和滚柱轴承力模型替代,轴承外圈和轴承座不考虑其转动自由度,仅考虑其轴向振动和径向振动,需要在支撑连接中增加轴向连接刚度和阻尼。

3.4 模型求解

同文献[12-13],采用 Newmark- β 法和翟方法[19]相结合的方法对微分方程组进行求解。其中利用 Newmark- β 法对容易形成矩阵的转子和机匣有限元模型进行求解,利用翟方法对不需要

形成矩阵的支承连接部件进行求解。该方法的特点是只需要组装单个转子或机匣部件的动力学矩阵,而不需要形成整个系统庞大的矩阵,求解效率很高。

4 模型验证

4.1 带机匣的航空发动机转子试验器动力学参数

针对带机匣的航空发动机转子试验器,进行整机振动建模和模态试验验证,其中转子和机匣的参数与文献[13]相同,不相同的地方在于:①转子机匣的有限元节点自由度增加为 6 个;②压气机端的前支承为圆柱滚子轴承、涡轮端的后支承为深沟球轴承。表 1 为 6206 深沟球轴承详细参数;表 2 为 N206EM 圆柱滚子轴承详细参数。

表 1 深沟球轴承型号及参数
Table 1 Type number and parameters of deep groove ball bearing

参数	数值及说明
型号	6 206 RZ
内径/mm	30
外径/mm	62
滚动体个数	9
球直径/mm	9.5
径向游隙/mm	0.1
弹性模量/ 10^{11} Pa	2.1
泊松比	0.3
内圈沟曲率半径系数	0.52
外圈沟曲率半径系数	0.52
轴向力/N	1 000

表 2 圆柱滚子轴承型号及参数
Table 2 Type number and parameters of
cylindrical roller bearing

参数	数值及说明
型号	N206 EM
内径/mm	30
外径/mm	62
滚动体个数	12
滚子长度/mm	7
滚子直径/mm	6
径向游隙/mm	0.01
凸度量/mm	0.02
切片数	10

4.2 模态试验验证

为了验证整机振动模型的正确性,进行了安装条件下的试验器振动模态测试,在转子上选取 7 个测点,试验示意图如图 7 所示,其中激振点安装在南京航空航天大学振动工程研究所研制的 HEV-500 型高能电动式激振器,在点 1~点 7 依次布置 7 个 B&K 4508 型 ICP(integrated circuit piezoelectric)加速度传感器,其中测点 1,2,6,7 容易布置传感器,可以将塑料底座用 502 胶水黏贴到测点,而测点 3,4,5 由于机匣的包容,测点需要将机匣上的口盖打开,方能布置传感器.正弦激励力通过安装在激振器顶杆和结构之间的阻抗头测量,经过数据采集得到正弦激励力和振动加速度响应信号,从而得到频响函数矩阵中的 1 列,即: $H_{11}(f), H_{21}(f), H_{31}(f), H_{41}(f), H_{51}(f), H_{61}(f), H_{71}(f)$. 测点布置图分别如图 8、图 9、和图 10 所示,图中 f 表示频率。

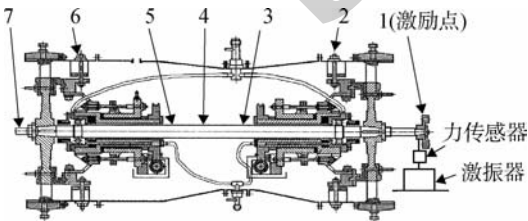


图 7 模态实验示意图

Fig. 7 Schematic diagram of modal experiment

与试验模态方法相同,利用本文计算模型,在转子的对应节点进行正弦激励,在对应的转子测点获取加速度响应。将模态试验数据和模态仿真数据均输入到模态分析软件,即可计算得到的激励点和测试点间的频率响应函数。



图 8 测点布置图 1

Fig. 8 Lay-out diagram test point 1

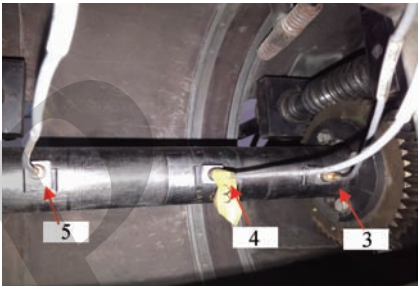


图 9 测点布置图 2

Fig. 9 Lay-out diagram test point 2

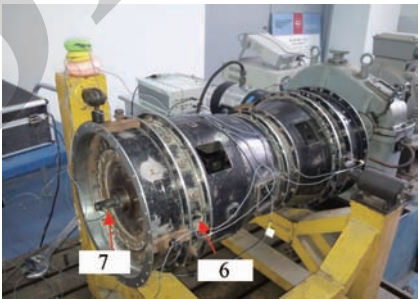


图 10 测点布置图 3

Fig. 10 Lay-out diagram point 3

在本文模型仿真计算中,Newmark- β 和 翟方法中的参数均为 $\alpha=0.25, \beta=0.5$,通过数值仿真试验,得到了保证数值仿真计算稳定性的积分步长为 10^{-5} 。系统响应初始值均设为 0。

图 11、图 12 和图 13 分别为频率响应函数 (FRF) $H_{11}(f), H_{51}(f), H_{71}(f)$ 的计算结果和试验结果的比较,同时,在图 11、图 12 和图 13 中,也将本文文结果与文献[13]的结果进行了比较。图 14 和图 15 为前 3 阶模态振型的计算结果和试验结果的比较。

从模态分析的结果可以看出,前 3 阶的仿真和试验模态非常接近,第 1 阶为转子俯仰,固有频率 f_n 为 43.4 Hz(试验结果)、44.9 Hz(仿真结果);第 2 阶为转子平移,固有频率为 46.5 Hz(试验结果)、48.1 Hz(仿真结果);第 3 阶为转子弯曲,

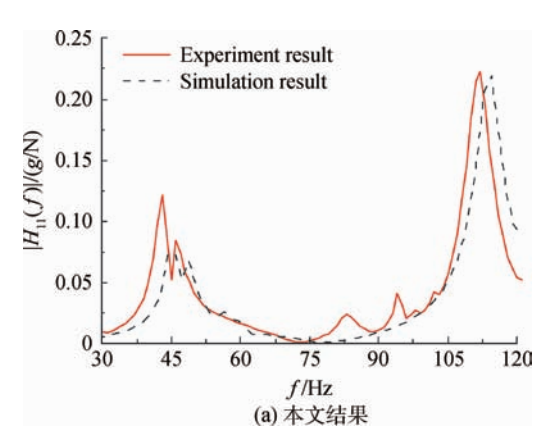


图 11 幅频响应函数比较(测点 1)
Fig. 11 Comparison of FRFs (test points 1)

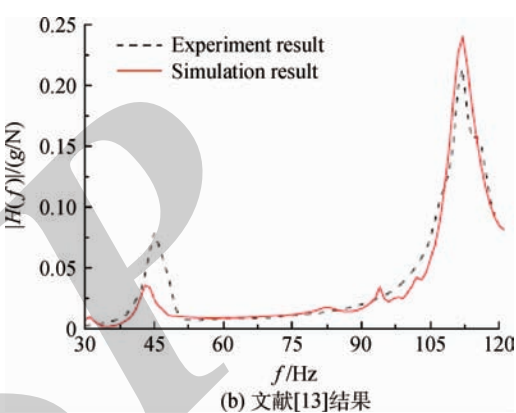
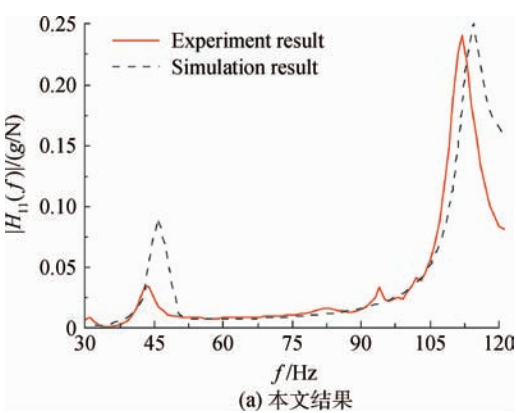
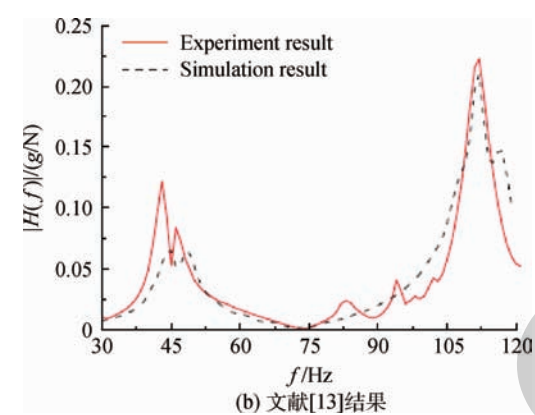


图 13 幅频响应函数比较(测点 7)
Fig. 13 Comparison of FRFs (test points 7)

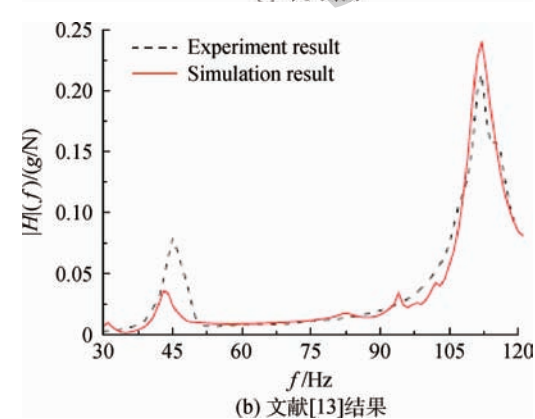
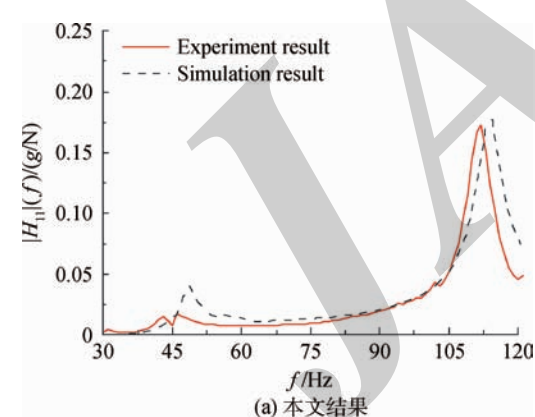


图 12 幅频响应函数比较(测点 5)
Fig. 12 Comparison of FRFs (test points 5)

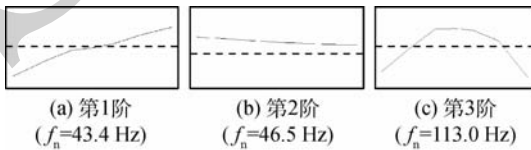


图 14 前 3 阶振型(试验结果)
Fig. 14 The first 3 orders modal shapes (experiment results)

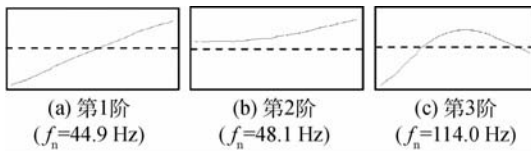


图 15 前 3 阶振型(仿真结果)
Fig. 15 The first 3 orders modal shapes (simulation results)

固有频率为 113.0 Hz(试验结果)、114.0 Hz(仿真结果)。显然,试验结果和仿真结果达到了很好的一致性。充分验证了本文建立的滚珠轴承模型和圆柱滚子模型是正确有效的,轴承刚度的计算结果是合理的。

在与文献[13]的比较中,可以看出,两种方法对航空发动机转子试验器的振动模态计算结果均与试验结果表现了很好的一致性,这也间接表明

了本文建模方法的正确性,然而,本文方法比文献[13]更为完善,具体表现在:文献[13]的方法具有如下缺陷:①滚动轴承为 2 自由度模型,即滚动轴承动力学模型仅仅考虑了 xOy 平面的运动,即为 2 自由度模型。②不区分滚珠轴承和滚子轴承建模;③转子和机匣的有限元梁单元节点的自由度数为 4 个。本文方法的高进表现在:①滚动轴承考虑为 5 自由度模型,包括 x, y, z 方向平动及绕 y 和 z 方向转动的 5 个自由度,是最完善和复杂的模型;②区分滚珠轴承和滚子轴承建模,即两种轴承的轴承力计算方法不相同;③转子和机匣的有限元梁单元节点的自由度数为 6 个。因此本文方法具有更强的仿真能力,比如,本文考虑复杂滚动轴承建模的航空发动机整机振动模型还可以研究由于转子和轴承故障所引发的转子轴向振动、弯扭耦合振动等问题,限于篇幅,这些工作将在以后的研究中开展。

5 结 论

1) 考虑了实际航空发动机的支承系统上采用滚珠轴承和滚子轴承配合使用的设计特点,建立了球轴承和圆柱滚子轴承的详细模型。首先,建立了 5 自由度球轴承动力学模型,推导了在 5 自由度复杂变形下的轴承力和力矩表达式;然后,针对圆柱滚子轴承,利用“切片法”,推导了考虑轴承径向变形、圆柱转子凸度、轴承间隙以及轴承倾斜引起的角向变形等复杂因素作用下的圆柱滚子轴承的作用力;

2) 在文献[12-13]研究的航空发动机整机振动模型基础上,进一步增加了转子和机匣的轴向振动和扭转振动自由度,将有限元节点自由度从 4 个扩展为 6 个。并在此基础上,在支承建模中引入复杂的球轴承和圆柱滚子轴承模型,改进了现有航空发动机整机振动模型。

3) 利用带机匣的航空发动机转子试验器,建立了考虑复杂滚动轴承建模的整机振动模型,通过数值仿真分析得到了试验器的前 3 阶计算模态,同时,利用模态试验得到了试验器的前 3 阶模态,仿真与试验的比较结果验证了本文考虑复杂滚动轴承建模的航空发动机整机振动模型的正确有效性。

参考文献:

[1] MEVEL B,GUYADER J L. Routes to chaos in ball bearings[J]. Journal of Sound and Vibration,1993,162(3):

471-487.
[2] TIWARI M, GUPTA K. Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings [J]. Journal of Sound and Vibration,2000,238(5):757-779.
[3] HARSHA S P,SANDEEP K,PRAKASH R. The effect of speed of balanced rotor on nonlinear vibrations associated with ball bearing[J]. International Journal of Mechanical Sciences,2003,45(4):725-740.
[4] HARSHA S P,KANKAR P K. Stability analysis of a rotor bearing system due to surface waviness and number of balls [J]. International Journal of Mechanical Science,2004,46(7):1057-1081.
[5] LIOULIOS A N,ANTONIADIS I A. Effect of rotational speed fluctuations on the dynamic behavior of rolling element bearings with radial clearance[J]. International Journal of Mechanical Sciences,2006,48(8):809-829.
[6] CHEN G,LI C G,WANG D Y. Nonlinear dynamic analysis and experiment verification of rotor-ball bearings-support-stator coupling system for aeroengine with rubbing coupling faults [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power,2010,132(6):022501. 1-022501. 9.
[7] CHEN G. Study on nonlinear dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearing[J]. Journal of Vibration and Acoustics,2009,131(6):061001. 1-061001. 9.
[8] DE MUL J M,VREE J M,MAAS D A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction:Part I general theory and application to ball bearings[J]. Journal of Tribology,1989,111(1):142-148.
[9] LIEW A,FENG N,HAHN E J. Transient rotordynamic modeling of rolling element bearing systems[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power,2002,124(4):984-991.
[10] JANG G H,JEONG S W. Nonlinear excitation model of ball bearing waviness in a rigid rotor supported by two or more ball bearings considering five degrees of freedom[J]. Journal of Tribology,2002,124(1):82-90.
[11] BAI Changqing,XU Qingyu. Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness[J]. Journal of Sound and Vibration,2006,294(1/2):23-48.
[12] 陈果. 航空发动机整机振动耦合动力学新模型及其验证 [J]. 航空动力学报,2012,27(2):241-254.
CHEN Guo. A coupling dynamic model for whole aero-engine vibration and its verification[J]. Journal of Aerospace Power,2012,27(2):242-254. (in Chinese)
[13] CHEN G. Vibration modeling and verification for whole aero-engine[J]. Journal of Sound and Vibration,2015,349(4):163-176.
[14] 邓四二,贺凤祥,杨海生,等. 航空发动机双转子-滚动轴承耦合系统的动力特性分析 [J]. 航空动力学报,2010,25(1):1-10.
DENG Sier,HE Fengxiang,YHANG Haisheng,et al. Analysis on dynamic characteristics of a dual rotor-rolling

bearing coupling system for aero-engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(1): 1-10. (in Chinese)

[15] 邓四二, 付金辉, 王燕霜, 等. 航空发动机滚动轴承-双转子系统动态特性分析[J]. 航空动力学报, 2013, 28(1): 195-204. DENG Sier, FU Jinhui, WANG Yanshuan, et al. analysis on dynamic characteristic of aero-engine rolling bearing/dual-rotor system[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(1): 195-204. (in Chinese)

[16] HARRIS T A, KOTZALAS M N. 滚动轴承分析: 第 1 卷 轴承技术的基本概念[M]. 5 版. 罗继伟, 马伟, 杨威启, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2015.

[17] HARRIS T A, KOTZALAS M N. 滚动轴承分析: 第 2 卷 轴承技术的高等概念[M]. 5 版. 罗继伟, 马伟, 杨威启, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2015.

[18] 王美令. 不对中转子系统的动力学机理及其振动特性研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2013. WANG Meiling. Study on dynamic mechanics and vibration characteristics of misalignment rotors[D]. Shenyang: Northeastern University, 2013. (in Chinese)

[19] ZHAI W M. Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(24): 4199-4214.

(编辑: 王碧琚)