

双周期分布式压电分支阻尼对失谐叶盘振动抑制作用分析

李琳^{1,2,3}, 刘久周^{1,2,3}, 李超^{1,2,3}

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191;

3. 北京航空航天大学 航空发动机结构强度北京市重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 将压电分支电路引入失谐叶盘结构, 形成机电耦合系统, 给出了机电耦合系统动力学方程的推导过程, 并从理论上研究了压电分支阻尼对失谐叶盘结构响应放大的抑制效果. 通过构造双周期分布式压电分支电路, 研究了双周期分布式压电分支阻尼对失谐叶盘结构的振动抑制效果, 并与单周期压电分支电路进行了对比, 对比结果显示压电分支阻尼(包括单周期压电分支阻尼以及双周期分布式压电分支阻尼)均能有效降低随机失谐叶盘结构的响应放大, 其中双周期机电耦合系统响应放大因子统计分析结果小于1的概率在99.7%以上, 基本消除了失谐叶盘结构的响应放大现象. 通过合理地设计系统的双周期模式, 能够获得比单周期更好的失谐响应放大抑制效果. 此外, 压电分支阻尼使得随机失谐叶盘结构的失谐“阈值”现象消失, 提高了叶盘结构的失谐鲁棒性.

关 键 词: 压电分支阻尼; 失谐叶盘; 响应放大; 振动抑制; 双周期; 失谐鲁棒性

中图分类号: V231

文献标志码: A

Analysis on vibration suppression of mistuned bladed disk via bi-periodic distributed piezoelectric shunt damping

LI Lin^{1,2,3}, LIU Jiu-zhou^{1,2,3}, LI Chao^{1,2,3}

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China;

3. Beijing Key Laboratory of Aero-Engine Structure and Strength,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A eletromechanical coupling system was established by introducing piezoelectric shunt circuit into mistuned bladed disk. The eletromechanical coupling system dynamic equations were derived, and the suppression effect on the amplitude magnification were analyzed. By constructing bi-periodic distributed piezoelectric shunt circuit, vibration suppression effect of bi-periodic distributed piezoelectric shunt damping was analyzed. The results indicate that, piezoelectric shunt damping (both in single periodic and in bi-periodic) can reduce the amplitude magnification of the mistuned bladed disk effectively, and 99.7% of the

收稿日期: 2015-07-09

基金项目: 国家自然科学基金(51675022)

作者简介: 李琳(1956—), 女, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事航空发动机叶盘结构振动、流固耦合动力学、智能材料结构动力学等研究. E-mail: feililin@buaa.edu.cn

引用格式: 李琳, 刘久周, 李超. 双周期分布式压电分支阻尼对失谐叶盘振动抑制作用分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(3): 666-676. LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Analysis on vibration suppression of mistuned bladed disk via bi-periodic distributed piezoelectric shunt damping[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(3): 666-676.

statistical analysis results show that the amplitude magnification factor of bi-periodic eletro-mechanical coupling system is less than 1, which means the amplitude magnification of mistuned bladed disk can be eliminated almost completely. Bi-periodic distributed piezoelectric shunt circuit outperforms the single one in some proper design. What' more, with the presence of the piezoelectric shunt damping, the threshold value of amplitude magnification factor nearly disappears, which means the mistuning robustness of the bladed disk has been improved obviously.

Key words: piezoelectric shunt damping; mistuned bladed disk; amplitude magnification; vibration suppression; bi-periodic; mistuning robustness

航空发动机中的叶盘结构按理想的设计是周期对称的结构,但实际上由于制造过程中不可避免的误差、材料本身的缺陷,以及使用过程中的磨损等原因,使得实际的叶盘结构并非完美的周期对称,叶盘结构各扇区之间存在着不同程度的差异,这一现象称为“失谐”,尽管“失谐”一般都是小量,但“失谐”会造成叶盘结构的响应放大,使少数几个叶片的振幅大大超过设计许用振幅,进而过早地发生高周疲劳失效^[1-4].

上述问题促使研究人员积极地寻找新型的阻尼技术,特别是针对具有小机械阻尼特点的整体叶盘结构的振动抑制和消减.在这样的背景下,压电阻尼技术受到了广泛关注.20 世纪 90 年代初 Hagood 等人^[5]提出以压电材料作为媒介,将振动系统的机械能通过电路中的阻抗元件转化为热能耗散掉,进而达到减振的目的.这种压电阻尼的思想一经提出便受到了国内外研究人员的广泛关注. Hagood, Zhou 等人^[5-9]将压电分支阻尼技术引入到航空发动机叶盘结构中,研究了压电分支阻尼对“失谐”叶盘结构振动特性及响应特性的影响,并利用遗传算法对电路的失谐形式进行了优化. Yu 等人^[10-12]将压电阻尼技术引入周期对称结构中,在失谐叶盘结构上构建了一种压电网络.研究发现压电网络可以很好地抑制失谐叶盘结构的局部化振动,甚至破坏了失谐结构的振动局部化机理,并对相关理论研究进行了实验验证. FAN Yu 等人^[13]通过在机械场上无关的若干结构之间构建压电网络,对自供能振动抑制思想进行探索,其研究表明即使没有机械关联,一种结构的振动能量也可以通过压电网络转移至另一种结构,并可以被用来对另一个结构进行振动抑制.

如果循环对称结构周向上存在两种不同的子结构,且这种子结构在周向上依然是循环对称的,则该结构被称为“双周期结构”. Cai 等人^[14]利用双 U 变换法对双周期结构的静力和强迫响应问

题进行了研究. Castanier 等人^[15]利用与构建双周期结构类似的思想,对刚度人为失谐的叶盘结构的响应放大现象进行了系统的研究,研究发现叶片刚度的人为失谐能够有效抑制失谐响应放大. WANG Peiyi 等人^[16]对双周期结构在失谐叶盘结构响应放大抑制方面展开了研究,发现双周期结构设计能够对于频率转向区内的失谐响应放大起到抑制作用.

目前,国内外关于双周期结构动力学理论的应用性研究还不多见.主要原因之一是相对单一周期的结构,通过机械加工的方式来实现双周期结构要复杂得多.本文提出通过压电分支电路构造双周期形式,给出形成双周期机电耦合系统的方法,并对其对失谐叶盘结构响应放大的抑制进行了研究.研究的目的是希望借助压电材料的特性,通过构造不同的电路形式形成的双周期结构系统也具有通过机械加工实现的双周期结构的一些优良特性.显然通过不同的电路来实现双周期要比机械加工容易得多.本论文采用叶盘结构的集中参数模型,研究方法如下:首先给出带压电分支电路的叶盘结构集总参数模型,推导系统的机电耦合动力学方程并对其固有特性以及响应特性、包括结构失谐后的响应放大特性进行分析;其次给出了双周期分布式压电分支电路的构建方式;然后分析了双周期分布式压电分支电路对失谐叶盘结构响应放大的抑制作用,以及双周期分布式压电分支电路对叶盘结构的失谐鲁棒性的影响;最后对本文所获得的结论进行了总结.

1 研究模型及机电耦合系统动力学方程

将压电片布置于叶片靠近叶根的位置(如图 1 所示)可以尽量降低压电片对流场的干扰,同时保证压电片能够产生足够的应变.当叶片由于振

动而产生变形时,压电片也随之产生形变,由于压电材料本身的正压电效应,会在压电片的两个电极之间形成电势差,此时通过在压电片的两个电极之间连接阻抗元件(电阻、电容、电感等)形成压电分支电路,即可将叶盘结构的机械能转化为热能耗散掉,进而达到振动抑制的目的,此即压电分支阻尼减振的基本原理。

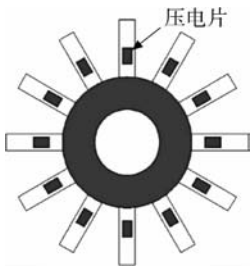


图 1 带有压电分支电路的叶盘结构示意图
Fig. 1 Diagram of bladed disk with piezoelectric shunt circuits

集中参数模型一直被广泛用于叶盘结构的失谐振动机理、振动局部化、响应局部化的基本特性和基本规律的研究中,而且可以较为方便地进行 Monte Carlo 仿真,研究叶盘结构随机失谐时的振动统计特性^[17-18]. 本文采用如图 2 所示的单扇区 3 自由度叶盘结构的集中参数模型,每个扇区中包含两个叶片自由度和一个轮盘自由度,可以

对叶片的某两阶振动模态以及轮盘的某一阶振动模态进行模拟. 各扇区之间利用无质量的弹簧连接来模拟扇区之间的耦合. m_{b1} 和 m_{b2} 分别为两个叶片自由度的等效模态质量, m_d 单扇区轮盘自由度的等效模态质量, c_{b1} 和 c_{b2} 分别为两个叶片自由度的等效机械阻尼系数, c_d 单扇区轮盘自由度的等效机械阻尼系数, k_{b1} 和 k_{b2} 分别对应两个叶片自由度的等效模态刚度, k_d 为轮盘自由度对应的模态刚度, k_c 为扇区间耦合刚度. 图 2 中的 PSC (piezoelectric shunt circuit) 代表压电分支电路,其作用由压电片及其外接电路共同产生,作用在叶片自由度 2 与轮盘自由度之间。

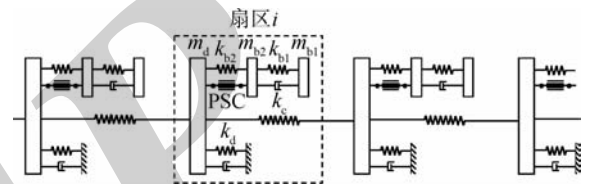


图 2 带有压电分支电路的叶盘结构集中参数模型
Fig. 2 Lumped parameter model of bladed disk with piezoelectric shunt circuit

定义扇区 i 上由于压电分支电路与叶盘结构之间的机电耦合作用而产生的对扇区 i 叶片自由度 2 的作用力为 f_p^i , 对扇区 i 轮盘自由度的作用力为 $-f_p^i$, 因此第 i 扇区的力平衡方程为

$$\begin{cases} m_{b1}\ddot{x}_{b1}^i + c_{b1}\dot{x}_{b1}^i - c_{b1}\dot{x}_{b2}^i + k_{b1}x_{b1}^i - k_{b1}x_{b2}^i = f_{b1}^i(t) \\ m_{b2}\ddot{x}_{b2}^i - c_{b1}\dot{x}_{b1}^i + (c_{b1} + c_{b2})\dot{x}_{b2}^i - c_{b2}\dot{x}_d^i - k_{b1}x_{b1}^i + (k_{b1} + k_{b2})x_{b2}^i - k_{b2}x_d^i + f_p^i(t) = 0 \\ m_d\ddot{x}_d^i - c_{b2}\dot{x}_{b2}^i + (c_{b2} + c_d)\dot{x}_d^i - k_{b2}x_{b2}^i + (k_{b2} + k_d + 2k_c)x_d^i - k_cx_d^{i-1} - k_cx_d^{i+1} - f_p^i(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_{b1}^i, x_{b2}^i 以及 x_d^i 为扇区 i 中的两个叶片自由度和轮盘自由度, $f_{b1}^i(t)$ 表示作用在扇区 i 叶片自由度 1 上的激励力, 叶盘结构不同扇区所受的激励力幅值相等, 只是相差一个固定的相位差, 因此扇区 i 的激励力可以表达为

$$f_{b1}^i(t) = f_{b1}^0 e^{j(\omega t + \varphi_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中 f_{b1}^0 为基本扇区的激励力幅值, ω 为激励频率, j 为虚数单位, N 为叶盘结构的扇区数, φ_i 为扇区 i 的激励力相位, 可以表示为

$$\varphi_i = \frac{2\pi B(i-1)}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中 B 为激励力的激励阶次。

本研究采用的是压电材料的 d_{31} 工作模式, 如图 3 所示, 其中 1 方向表示压电材料的受力方向, 而 3 方向表示压电材料产生的电场方向, 此时可将压电材料的单方向本构方程表示为

$$\begin{bmatrix} D_3 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^s & d_{31} \\ d_{31} & s_{11}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ T_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 D_3 表示压电片在 3 方向电位移, E_3 表示压电片 3 方向电场强度, S_1 表示压电片 1 方向的应变, T_1 表示压电材料 1 方向的应力, ϵ_3^s 为压电材料恒定应力状态下的介电常数, d_{31} 为压电材料的压电常数, s_{11}^e 为压电材料恒定电场强度下的柔度系数. 根据电位移以及电场强度的定义可知

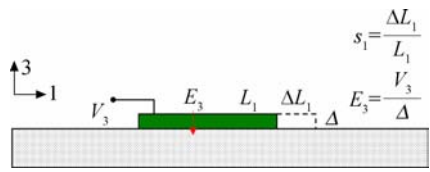


图 3 压电材料 d_{31} 工作模式示意图
Fig. 3 Diagram of transduction mode d_{31} of piezoelectric material

$$D_3 = \frac{q_3}{A_3} \quad E_3 = \frac{V_3}{\Delta} \quad (5)$$

其中 q_3 为压电片在 3 方向表面上的电荷量, A_3 为压电片在 3 方向的截面积, V_3 为压电片在 3 方向的电压, Δ 为压电片在方向上的厚度. 将式(5)代入式(4)中可将压电材料 d_{31} 模式的本构方程变形为

$$\begin{bmatrix} q_3 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{p3}^t & A_3 d_{31} \\ \frac{d_{31}}{\Delta} & s_{11}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ T_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 C_{p3}^t 为压电片在常应力状态下的内置电容大小.

由压电材料的单向拉伸应变与拉伸应力的定义可知

$$S_1 = \frac{x_{b2}^i - x_d^i}{l_1} \quad T_1 = \frac{f_p^i}{A_1} \quad (7)$$

其中 l_1 为压电片在 1 方向上的长度, A_1 为压电片在 1 方向的截面积. 将式(7)代入式(6)中, 可以得到电荷量 q_i 与机电耦合作用力 f_p^i 的表达式为

$$\begin{bmatrix} q_i \\ f_p^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p^s & k_{11}^{sc} d_{31} \frac{l_1}{\Delta} \\ -k_{11}^{sc} d_{31} \frac{l_1}{\Delta} & k_{11}^{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ x_{b2}^i - x_d^i \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 $k_{31} = d_{31} / \sqrt{s_{11}^e \epsilon_{11}^t}$ 为压电材料的机电耦合系数, 表征系统中机械能转化为电能的能力; $k_{11}^{sc} = \frac{A_1}{s_{11}^e l_1}$ 为分支压电材料在 1 方向上的等效刚度;

$k^{oc} = \frac{k_{11}^{sc}}{1 - k_{31}^2}$ 为分支压电材料的开路刚度; $C_p^t = \frac{\epsilon_{33}^t A_3}{\Delta}$ 为压电片在常应力状态下的内置电容; $C_p^s = (1 - k_{31}^2) C_p^t$ 为压电片常应变状态下的内置电容.

压电分支电路的电压边界条件如图 4 所示, 图中 PZT 为压电换能器 (piezoelectric transducer). 分支电路 i 中包含有电感元件 L_i 以及电阻元件 R_i , 压电片两个电极之间的电势差为 V_i , 电路的边界电势差为 $V_{i,out}$, 由 Kirchhoff 定律可知

$$\begin{cases} m_{b1} \ddot{x}_{b1}^i + c_{b1} \dot{x}_{b1}^i - c_{b1} \dot{x}_{b2}^i + k_{b1} x_{b1}^i - k_{b1} x_{b2}^i = f_{b1}^i(t) \\ m_{b2} \ddot{x}_{b2}^i - c_{b1} \dot{x}_{b1}^i + (c_{b1} + c_{b2}) \dot{x}_{b2}^i - c_{b2} \dot{x}_d^i - k_{b1} x_{b1}^i + (k_{b1} + k_{b2} + k^{oc}) x_{b2}^i - (k_{b2} + k^{oc}) x_d^i - k^{mp} q_i = 0 \\ m_d \ddot{x}_d^i - c_{b2} \dot{x}_{b2}^i + (c_{b2} + c_d) \dot{x}_d^i - (k_{b2} + k^{oc}) x_{b2}^i + (k_{b2} + k_d + 2k_c + k^{oc}) x_d^i - k_c x_d^{i-1} - k_c x_d^{i+1} + k^{mp} q_i = 0 \\ L_i \ddot{q}_i + R_i \dot{q}_i + \frac{q_i}{C_p^s} - k^{mp} x_{b2}^i + k^{mp} x_d^i = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式(13)为基于单扇区的机电耦合方程, 利用结构系统的循环对称条件, 可以获得整个系统的

$$V_i + L_i \ddot{q}_i + R_i \dot{q}_i = V_{i,out} \quad (9)$$

根据式(8)可将压电片两电极之间的电势差表示为

$$V_i = \frac{q_i}{C_p^s} - k^{mp} (x_{b2}^i - x_d^i) \quad (10)$$

定义 $k^{mp} = \frac{k_{11}^{sc} d_{31} l_1}{C_p^s \Delta}$ 为机械系统与电路系统的耦合刚度, 表示两个系统之间的耦合程度.

将式(10)代入式(9)中可得电路边界条件表达式为

$$L_i \ddot{q}_i + R_i \dot{q}_i + \frac{q_i}{C_p^s} - k^{mp} x_{b2}^i + k^{mp} x_d^i = V_{i,out} \quad (11)$$

对于压电分支电路 (如图 5 所示), 各扇区电路的边界电势差 $V_{i,out}$ 为零, 因此可得扇区 i 的电路方程为

$$L_i \ddot{q}_i + R_i \dot{q}_i + \frac{q_i}{C_p^s} - k^{mp} x_{b2}^i + k^{mp} x_d^i = 0 \quad (12)$$

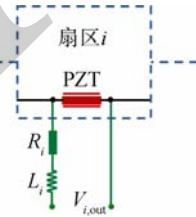


图 4 压电分支电路电压边界条件

Fig. 4 Voltage boundary condition of the piezoelectric shunt circuit

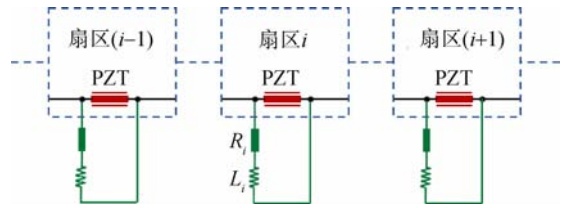


图 5 电阻-电感串联型分支电路

Fig. 5 Series resistance-inductance shunt circuit

由此可得叶盘结构机电耦合系统扇区 i 的动力学方程为

机电耦合方程组. 将自由度的排列顺序定义为 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N, q]^T$, 其中扇区 i 中的机械自由

度为 $\mathbf{x}_i = [x_{b1}^i, x_{b2}^i, x_d^i]^T$, 整个系统的电学自由度为 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$. 同理, 扇区 i 对应的激振力向量为 $\mathbf{f}_i = [f_{b1}^i, 0, 0]^T$, 而系统总激振力向量为 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N, \mathbf{0}]^T$. 这样, 对应系统的总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$, 各子块可以命名为机械刚度矩阵 $\mathbf{K}_m$, 电路刚度矩阵 $\mathbf{K}_p$, 以及耦合刚度矩阵 $\mathbf{K}_{mp}$ 和 $\mathbf{K}_{pm}$. 系统的总体质量矩阵 $\mathbf{M}$, 以及系统的总体阻尼矩阵 $\mathbf{c}$ 均为块对角阵, 并定义机械质量矩阵为 $\mathbf{M}_m$, 机械阻尼矩阵为 $\mathbf{c}_m$, 电路质量矩阵为 $\mathbf{M}_p$, 电路阻尼矩阵为 $\mathbf{c}_p$.

系统机械刚度矩阵 $\mathbf{K}_m$ 为块循环矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{K}_m = \text{Bteop}(\mathbf{K}_m, \mathbf{K}_c, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{K}_c) \quad (14)$$

其中 $\text{Bteop}(\cdot)$ 表示块循环矩阵(即矩阵的第 i 行元素由第 $i-1$ 行移动一列获得), 而机械系统扇区刚度矩阵块 $\mathbf{K}_{mi}$ 和机械系统扇区间耦合刚度矩阵块 $\mathbf{K}_{mc}$ 的表达式为

$$\mathbf{K}_{mi} = \begin{bmatrix} k_{b1} & -k_{b1} & 0 \\ -k_{b1} & k_{b1} + k_{b2} + k^{oc} & -(k_{b2} + k^{oc}) \\ 0 & -(k_{b2} + k^{oc}) & k_{b2} + k_d + 2k_c + k^{oc} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_c \end{bmatrix} \quad (16)$$

系统的电路刚度矩阵 $\mathbf{K}_p$ 为对角阵, 其表达式为

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}(k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pN}) \quad (17)$$

其中 $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角阵, 单扇区电路刚度 k_{pi} 的表达式为

$$k_{pi} = \frac{1}{C_p^s} \quad (18)$$

对压电分支阻尼系统, 系统的耦合刚度矩阵 $\mathbf{K}_{mp}$ 和 $\mathbf{K}_{pm}$ 是对称阵, 即 $\mathbf{K}_{pm} = \mathbf{K}_{mp}^T$, 其表达式为

$$\mathbf{K}_{mp} = \text{Bdiag}(\mathbf{K}_{mp}^1, \mathbf{K}_{mp}^2, \dots, \mathbf{K}_{mp}^N) \quad (19)$$

式中 $\text{Bdiag}(\cdot)$ 表示块对角阵, 其中子块 $\mathbf{K}_{mp}^i$ 的表达式为

$$\mathbf{K}_{mp}^i = [0, -k^{mp}, k^{mp}]^T \quad (20)$$

因此系统的总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 可以表示为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_{mp} \\ \mathbf{K}_{pm} & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

系统机械质量矩阵 $\mathbf{M}_m$ 为块对角阵, 其表达式为

$$\mathbf{M}_m = \text{Bdiag}(\mathbf{M}_{m1}, \mathbf{M}_{m2}, \dots, \mathbf{M}_{mN}) \quad (22)$$

机械系统扇区机械质量矩阵块 $\mathbf{M}_{mi}$ 的表达

式为

$$\mathbf{M}_{mi} = \begin{bmatrix} m_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & m_d \end{bmatrix} \quad (23)$$

系统电路质量矩阵为对角阵, 其表达式为

$$\mathbf{M}_p = \text{diag}(m_{p1}, m_{p2}, \dots, m_{pN}) \quad (24)$$

机械系统扇区电路质量 m_{pi} 的表达式为

$$m_{pi} = L_i \quad (25)$$

因此系统的总体质量矩阵 $\mathbf{M}$ 可以表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} \quad (26)$$

系统机械阻尼矩阵 $\mathbf{c}_m$ 为块对角阵, 其表达式为

$$\mathbf{c}_m = \text{Bdiag}(\mathbf{c}_{m1}, \mathbf{c}_{m2}, \dots, \mathbf{c}_{mN}) \quad (27)$$

机械系统扇区机械阻尼矩阵块 $\mathbf{c}_{mi}$ 的表达式为

$$\mathbf{c}_{mi} = \begin{bmatrix} c_{b1} & -c_{b1} & 0 \\ -c_{b1} & c_{b1} + c_{b2} & -c_{b2} \\ 0 & -c_{b2} & c_{b2} + c_d \end{bmatrix} \quad (28)$$

系统电路阻尼矩阵 $\mathbf{c}_p$ 为对角阵, 其表达式为

$$\mathbf{c}_p = \text{diag}(c_{p1}, c_{p2}, \dots, c_{pN}) \quad (29)$$

机械系统扇区电路阻尼 c_{pi} 的表达式为

$$c_{pi} = R_i \quad (30)$$

因此系统的总体质量阻尼 $\mathbf{c}$ 可以表示为

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_p \end{bmatrix} \quad (31)$$

由此可将系统的机电耦合动力学方程组写成如下的一般表达形式:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (32)$$

2 叶盘结构系统特性分析

2.1 理想循环对称叶盘结构的节径型振动

一组典型的叶盘结构集中参数模型的参数取值如表 1 所示, 压电材料的参数取值如表 2 所示. 首先对不考虑压电分支电路的叶盘结构进行分析

表 1 典型叶盘结构集中参数模型的相关参数列表

Table 1 Parameters in the lumped parameter model of typical bladed disk

参数	数值	参数	数值
m_{b1}/kg	0.2	$k_{b2}/10^6(\text{N/m})$	1
m_{b2}/kg	0.3	$k_d/10^5(\text{N/m})$	1
m_d/kg	1.1	$k_c/10^7(\text{N/m})$	3
$k_{b1}/10^6(\text{N/m})$	2	f_{b1}^0/N	10

表 2 压电材料特性参数

Table 2 Parameters of piezoelectric material

参数	数值
$C_p^t/10^{-8} \text{ F}$	9.93
$k^{sc}/10^6 \text{ (N/m)}$	2.4
k_{31}	0.35

析,对于谐调叶片结构,其振动形式表现为节径型振动,如图 6 为叶片自由度为 1 的 4 节径振动模式.考虑压电分支电路时,发现各扇区电路中的电荷也成节径型分布,如图 7 所示,为电荷自由度的 4 节径振动模式.

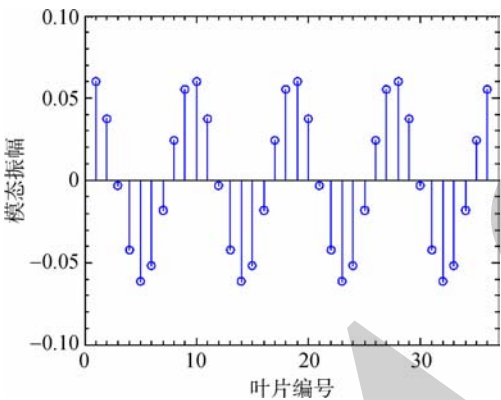


图 6 叶片自由度为 1 的 4 节径振动模式

Fig. 6 Mode of the first degree of bladed freedom with 4 nodal diameters

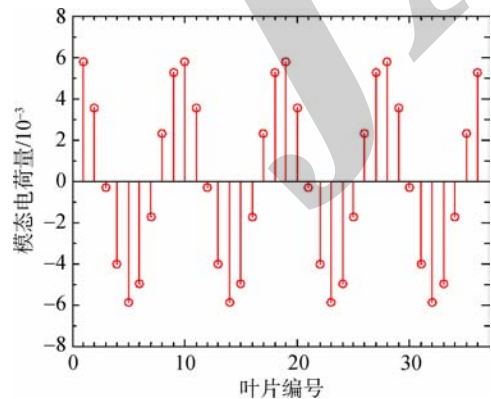


图 7 电荷自由度的 4 节径振动模式

Fig. 7 Mode of the degree of charge freedom with 4 nodal diameters

图 8 所示为叶盘结构的节径-频率图,横坐标为叶盘结构振动的节径数(当叶片数 N 为偶数时,最大节径数为 $N/2$; N 为奇数时,最大节径数为 $(N-1)/2$).纵坐标为叶盘结构各阶固有频率.

图 8 中包含 3 个模态族,其中水平频率迹线表示叶片主导的模式,表示结构的应变能主要在叶片上,节径数的增加对叶片的固有频率影响较小;斜线上的模态代表轮盘主导的模式,表示应变能主要集中在轮盘上,节径数的增加对轮盘固有频率的影响较大.从图 8 中可以看出,叶盘结构的频率迹线在节径数为 2 和节径数为 5 的时候,存在“频率转向”的现象.已有的研究表明,在频率转向区附近,叶盘结构对失谐的敏感度更高,因此在接下来的研究中,把研究的重点放在频率转向区附近.

选择可激起 5 节径型振动的激励阶次 $B=5$,计算压电分支阻尼对谐调电路形式的振动抑制效果.压电分支阻尼对谐调叶盘结构的振动抑制效果如图 9 所示,图中所示为叶片自由度为 1 的振动幅值(后续的结构均采用叶片自由度为 1 的响应幅值),可以看出压电分支阻尼对谐调叶盘结构

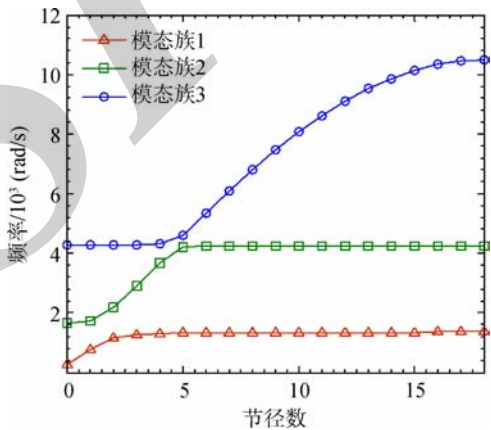


图 8 叶盘结构节径-频率图

Fig. 8 Nodal diameter-frequency diagram of the bladed disk

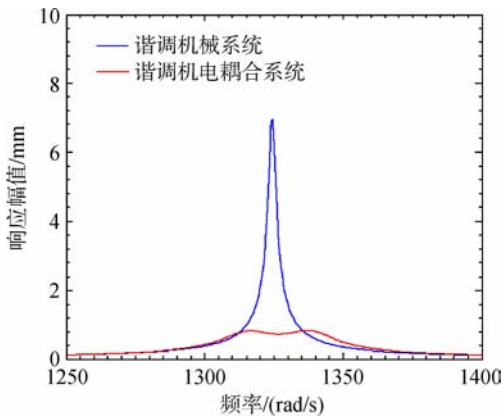


图 9 压电分支阻尼对谐调叶盘的振动抑制效果

Fig. 9 Vibration suppression effect of piezoelectric shunt damping on the tuned bladed disk

的振动具有很好的振动抑制效果。

2.2 随机失谐叶盘结构的振动响应

如前所述,实际的叶盘结构或多或少存在失谐。大量的经验已经证明,失谐会造成叶盘结构局部响应放大,即少数几个叶片的振幅会大大超过设计许用振幅,因而过早地发生高周疲劳失效。

研究中引入的叶盘结构失谐形式为叶片的刚度失谐,其数学表达式为

$$k_{b1,i} = k_{b1}(1 + \delta_{b1,i}) \quad k_{b2,i} = k_{b2}(1 + \delta_{b2,i})$$

(33)

其中 $\delta_{b1,i}$ 和 $\delta_{b2,i}$ 分别为叶片刚度 $k_{b1,i}$ 和 $k_{b2,i}$ 的随机失谐量,为了研究方便,两个叶片的刚度可采用同一组随机失谐量 $\delta_{b1,i} = \delta_{b2,i} = \delta_{b,i}$ 。

图 10 所示为叶盘结构一组参数的随机失谐模式(随机失谐量服从正态分布,随机失谐量的平均值为 0,标准差为 0.02)对应的叶盘结构响应如图 11 所示。可见,虽然叶片刚度的失谐量很小,但

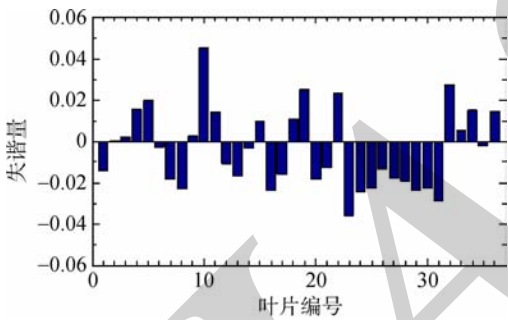


图 10 叶片刚度的一组随机失谐量
Fig. 10 Illustration of a blade stiffness random mistuning

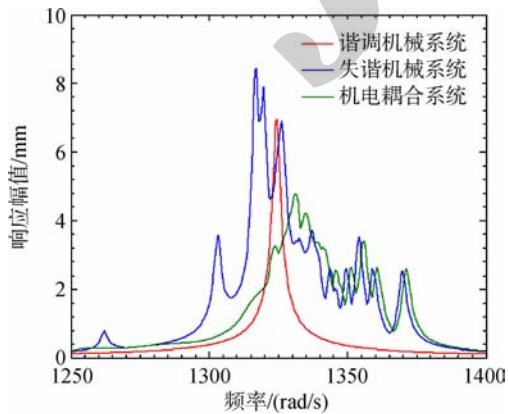


图 11 压电分支阻尼对随机失谐叶盘振动抑制效果
Fig. 11 Vibration suppression effect of piezoelectric shunt damping on the random mistuned bladed disk

是会造成叶盘结构出现严重的响应放大现象。响应放大因子 A_{amf} 被广泛地用于描述这种由于失谐引起的响应放大的程度^[17],响应放大因子定义为:在相同的激振力作用下,叶盘结构失谐后的最大位移响应与谐振情况下的最大位移响应之比。其定义式为

$$A_{amf} = \frac{\max(A_{mistuned})}{\max(A_{tuned})}$$

(34)

在这组随机失谐模式下,叶盘结构的响应放大因子为 1.22。而当在叶盘结构系统中引入压电分支阻尼($R=225\Omega, L=6.80H$)之后,可以使叶盘结构的振动幅值大幅降低(本例降低约为 43%,响应放大因子从 1.22 降低到 0.69)。由此可见,压电分支阻尼能够有效地抑制叶盘结构的响应放大。

实际中,由于叶盘结构的失谐形式是随机的,因此需要对叶盘结构的随机失谐问题进行统计学分析,本文通过 Monte Carlo 方法分析了双周期分布式压电分支阻尼对失谐响应放大的抑制作用的统计学特性, Monte Carlo 方法的基本分析过程如图 12 所示。 Monte Carlo 抽样次数为 5 000,叶片刚度的随机失谐量服从正态分布,随机失谐量的平均值为 0,失谐量的标准差从 0 到 0.1,电路中的电阻 $R=225\Omega$,电感 $L=6.80H$,取置信因子为 99.9%的响应放大因子 A_{amf} 绘制失谐敏感性曲线。

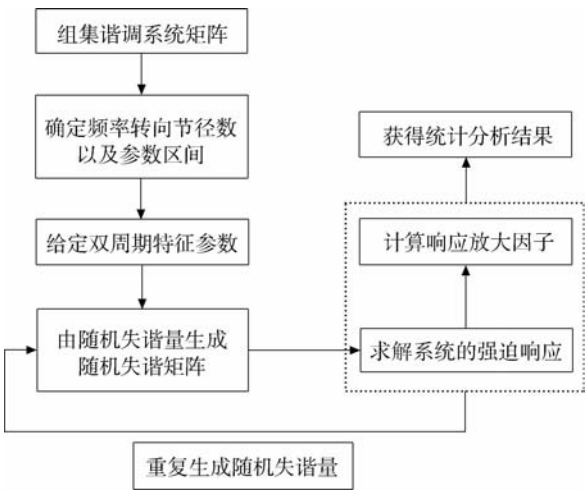


图 12 Monte Carlo 方法分析的流程图
Fig. 12 Flow chart of the Monte Carlo method

图 13 所示为计算获得的失谐敏感性曲线。图 14 所示为对应失谐量的标准差为 0.02 时的响应放大因子的概率密度曲线,其横坐标为响应放大因子,而纵坐标为响应放大因子在统计分析中出

现的次数,即响应放大因子的概率密度.从图 13 中没有压电分支阻尼的纯机械系统的失谐敏感性曲线可以看出,随着叶片随机失谐量标准差的增加,响应放大因子会有明显的先增大后减小的现象,即存在所谓的失谐“阈值”现象,也就是当机械系统的失谐量标准差小于失谐“阈值”的时候,响应放大因子随着失谐量的增大而增大,而当失谐量标准差超过失谐“阈值”的时候,响应放大因子将随着失谐量标准差的增大而减小.

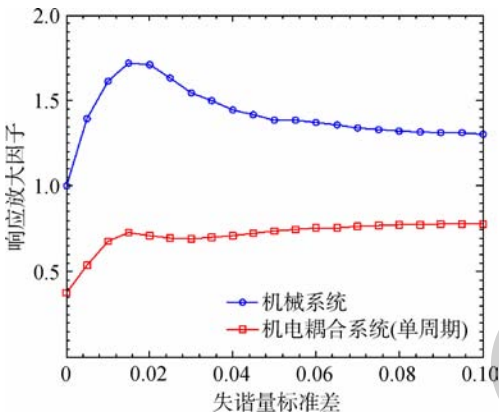


图 13 失谐敏感性曲线

Fig. 13 Amplitude magnification factor as a function of the standard deviation of blade mistuning

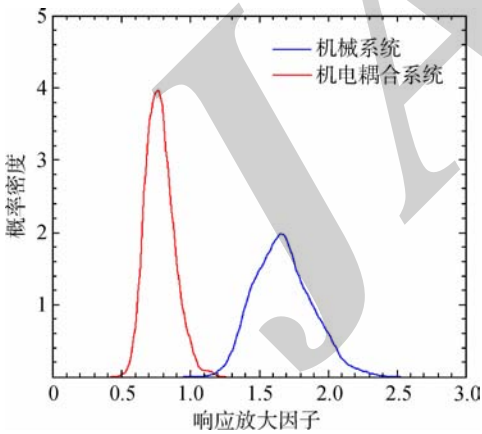


图 14 响应放大因子的概率密度曲线

Fig. 14 Probabilistic density function of the amplitude magnification factor

而在压电分支阻尼的作用下,失谐叶盘结构的失谐敏感性曲线发生了明显的变化.首先可以看出,压电分支阻尼对随机失谐叶盘结构的响应放大具有明显的振动抑制效果($A_{mf} < 0.82$);其次可以看出,在压电分支阻尼的作用下,失谐敏感性曲线不再存在明显的失谐“阈值”现象,当失谐量标准差较小的时候(对于本算例为小于 1.5%)

的时候)响应放大因子随着失谐量标准差的增加而增加,但是当失谐量标准差继续增加的时候,失谐敏感性曲线相较于纯机械系统更加“平缓”,响应放大因子几乎不再变化.这表明压电分支阻尼在对随机失谐叶盘结构的响应放大具有明显振动抑制效果的同时,还提高了随机失谐叶盘结构的失谐鲁棒性,即在实际中,当失谐叶盘结构带有压电分支阻尼时,可通过尽量降低机械结构的失谐量标准差(比如通过降低公差)而实现降低失谐响应放大的目的,而不必担心在某个范围由于机械失谐量标准差的降低反而会增大失谐响应放大的问题.

3 双周期分布式压电分支电路的构建

对于周期数为 N 的循环对称结构,如果每隔 r 个扇区改变一个或多个电学参数(如电感 L 或者电阻 R),则形成了双周期分布式压电分支电路系统,该结构新增的周期数为 $p = N/r$,双周期分布式压电分支电路系统的示意图如图 15 所示.本文的研究中,通过分支电路中的电感值 L 来构造双周期电路,在每个小周期中电感值按余弦规律变化,这样扇区 i 的电感值可以表示为

$$L_i = L_0 \left\{ 1 + s \cos \left[\frac{2\pi p \text{mod}(i, r)}{N} \right] \right\} \quad (35)$$

其中 L_0 为基础电感值, s 为双周期强度(即双周期电路中电感值“偏离”单周期设计电感值的比值), $\text{mod}(i, r)$ 表示的是 i 对 r 取余数.

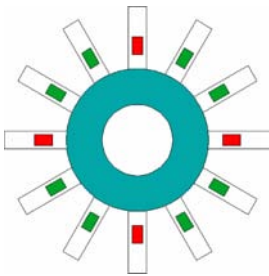


图 15 带双周期分布式压电分支电路的叶盘结构示意图

Fig. 15 Diagram of bladed disk with bi-periodic distributed piezoelectric shunt circuits

对于本文所取扇区数 $N = 36$ 的叶盘结构, r 的取值可以为 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 因此对应的双周期数 p 可以为 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2. 如图 16 给出了双周期强度 $s = 0.05$ 时,不同双周期数下对应的各分支电路中电感值的分布情况.相对于原始

单周期结构,双周期分布式电路可以被认为是一种人为“非谐”形式.显然,利用电路参数来实现双周期结构比通过机械加工方式实现双周期结构要方便得多.

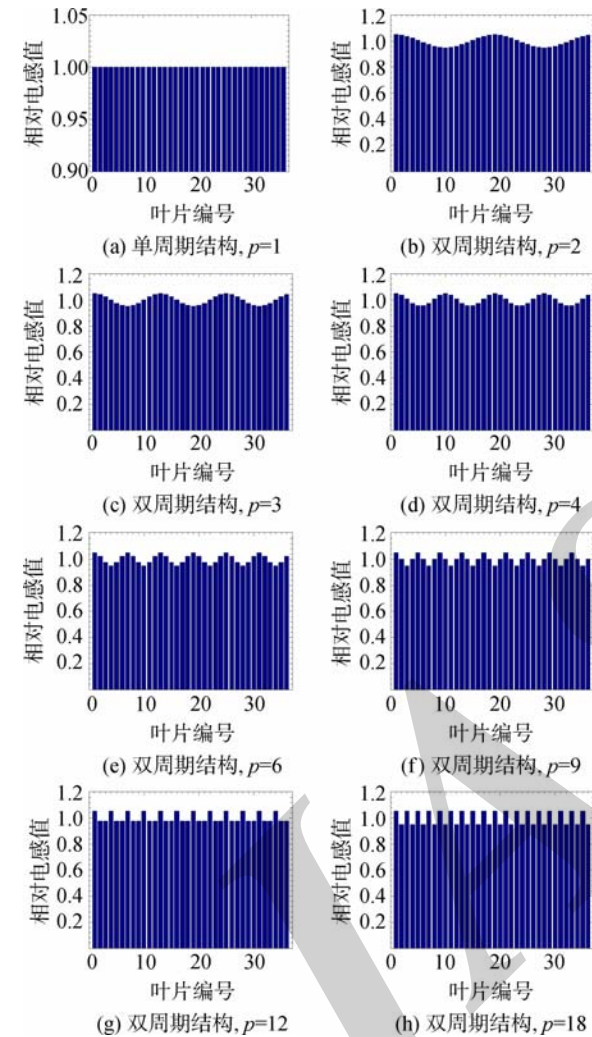


图 16 不同的双周期数下电感值的分布情况
Fig. 16 Inductance distribution of different bi-periodic numbers

4 双周期分布式压电分支电路的作用效果

4.1 对特定失谐模式的响应放大抑制效果

对于给定的叶片刚度的随机失谐模式(如图 10 所示),计算不同双周期强度 s 以及不同双周期数 p 下叶盘模型的响应情况,并与单周期压电分支电路($p=1$)的响应放大抑制效果进行对比,对比结果如图 17 所示.

图 17 的纵坐标表示双周期分布式压电分支阻尼的减振效果与单周期压电分支阻尼的响应放

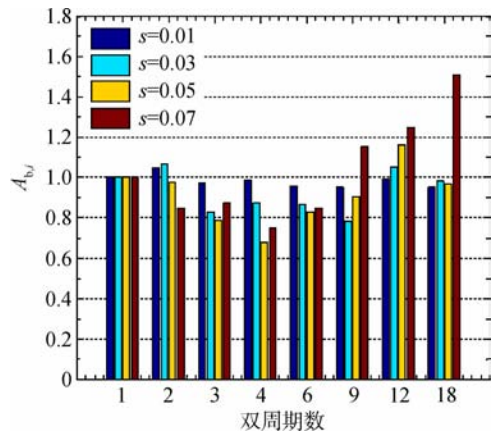


图 17 不同双周期模式下压电分支电路的振动抑制效果

Fig. 17 Vibration suppression effect of piezoelectric shunt circuit in different bi-periodic numbers

大抑制效果对比,其数学表达式为

$$A_{b,i} = \frac{\max(A_{bi\text{-periodic}})}{\max(A_{si\text{-periodic}})} \quad (36)$$

当 $A_{b,i} < 1$ 时,表示双周期分布式压电分支电路的失谐响应放大抑制效果优于单周期压电分支电路;反之,当 $A_{b,i} > 1$ 时,表示双周期分布式压电分支电路的失谐响应放大抑制效果不如单周期压电分支电路.

从图 17 中可以看出,在该组随机失谐模式下,电路的双周期强度 s 以及双周期数 p 会对随机失谐叶盘结构的响应放大抑制作用产生明显的影响.在某些双周期数下以及双周期强度下,压电分支电路的响应放大抑制效果会得到明显的提高,如双周期数 $p=4$,双周期强度 $s=0.05$ 时,会使压电分支电路的响应放大抑制效果明显提高($A_{b,i}=0.68$),振动抑制效果的对比如图 18 所示.但是在某些双周期模式下,会带来压电分支电路失谐响应放大抑制效果的下降,例如双周期数 $p=12$,双周期强度 $s=0.07$ 时,会使压电分支电路的响应放大抑制效果下降($A_{b,i}=1.25$),振动抑制效果的对比如图 19 所示.由此可见,在工程应用中,通过构造适当的电路双周期模式,可使压电分支电路针对特定失谐模式的失谐响应放大抑制效果得到较为明显的提升.

4.2 统计分析结果

根据图 12 所示的流程,对电路双周期强度 $s=0.05$,双周期数 $p=6$ 的情况进行统计分析.取 Monte Carlo 抽样次数为 5 000,叶片刚度的随机失谐量服从正态分布,随机失谐量的平均值为 0,

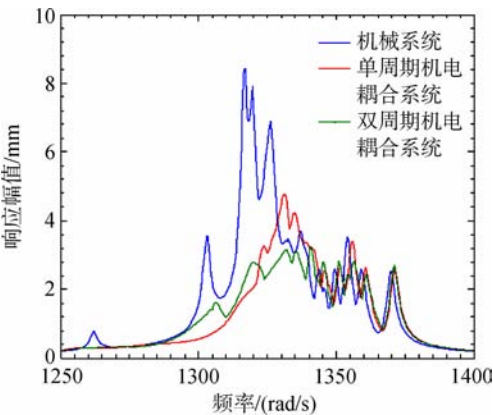


图 18 单周期与双周期压电分支电路振动抑制效果对比($p=4,s=0.05$)

Fig. 18 Comparison of vibration suppression effect between single periodic and bi-periodic piezoelectric shunt circuits ($p=4,s=0.05$)

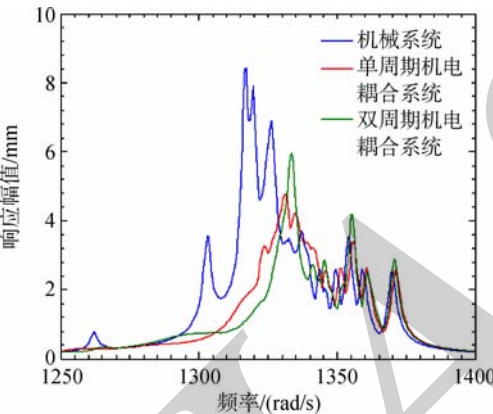


图 19 单周期与双周期压电分支电路振动抑制效果对比($p=12,s=0.07$)

Fig. 19 Comparison of vibration suppression effect between single periodic and bi-periodic piezoelectric shunt circuits ($p=12,s=0.07$)

失谐量标准差从 0 到 0.1,电路中的电阻值 $R=225\,\Omega$,电感值 $L=6.80\,\text{H}$,取置信因子为 99.9% 的响应放大因子绘制失谐敏感性曲线.

图 20 为利用 Monte Carlo 分析获得的失谐敏感性曲线.图 21 为对应于机械失谐量标准差为 0.02 时的响应放大因子的概率密度曲线.从图 20 中可以看出,双周期分布式压电分支阻尼对于随机失谐叶盘的响应放大振动抑制效果优于单周期压电分支电路系统,同时依然能够很好地提高失谐叶盘结构的失谐鲁棒性.图 21 的响应放大因子概率密度分布曲线表明,失谐机械系统和机电耦合系统(包括单周期和双周期)的响应放大因子概率分布都近似服从正态分布,且后者的均值远远

低于前者.单周期机电耦合系统响应放大因子小于 1 的概率在 97.2% 以上,且分布更为集中,这表明压电分支阻尼已基本消除了失谐叶盘结构的响应放大现象.同为机电耦合系统,按双周期分布的压电分支阻尼比按单周期分布的压电分支阻尼工况的响应放大因子的均值更低,且双周期机电耦合系统响应放大因子小于 1 的概率在 99.7% 以上.由此可见,在统计意义上,通过构造适当的电路双周期模式,可使压电分尼电路对随机失谐的失谐响应放大抑制效果得到进一步提升.

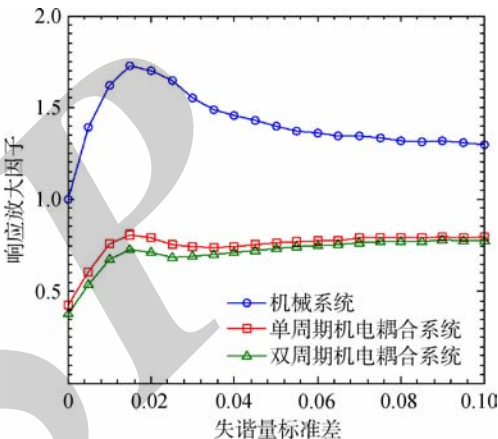


图 20 机械系统、单周期机电耦合系统、双周期机电耦合系统失谐敏感性曲线对比($p=6$)

Fig. 20 Comparison of amplitude magnification factor as a function of the standard deviation of blade mistuning in mechanical system, single periodic and bi-periodic eletromechanical coupling systems ($p=6$)

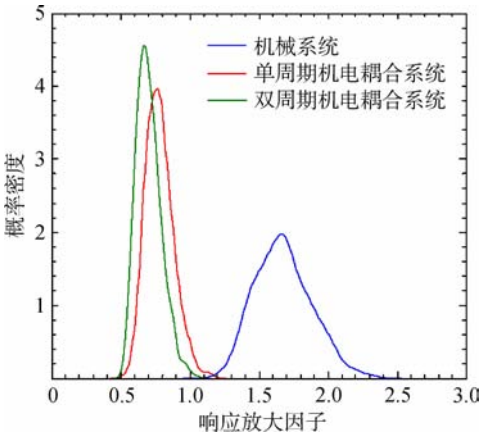


图 21 机械系统、单周期机电耦合系统、双周期机电耦合系统响应放大因子的概率密度曲线对比

Fig. 21 Comparison of probabilistic density function of the amplitude magnification factor in mechanical system, single periodic and bi-periodic eletromechanical coupling systems

5 结 论

通过在失谐叶盘结构中引入压电分支电路,形成一个机电耦合系统,从理论上研究了压电分支电路对失谐叶盘结构响应放大的抑制效果.提出了相比于机械加工更容易实现的利用压电分支电路构造双周期叶盘结构的思想,研究了双周期分布式压电分支电路对失谐叶盘结构的振动抑制效果,并与单周期压电分支电路的振动抑制效果进行了对比,得到如下结论:①压电分支阻尼能够有效降低叶盘结构的随机失谐响应放大,双周期分布式压电分支电路同样能够有效地抑制叶盘结构的失谐响应放大;②在某些双周期模式下,压电分支电路的响应放大抑制效果会得到明显提升,而在某些双周期模式下,压电分支电路的响应抑制效果会下降,通过合理设计系统的双周期模式,能够获得比单周期压电分支电路更好的振动抑制效果;③压电分支阻尼(包括单周期压电分支阻尼以及双周期压电分支阻尼)使得随机失谐叶盘结构的失谐“阈值”现象消失,提高了叶盘结构的失谐鲁棒性.

参考文献:

- [1] Castanier M P, Pierre C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: current status and emerging directions[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2006, 22(2): 384-396.
- [2] 王建军, 姚建尧, 李其汉. 刚度随机失谐叶盘结构概率模态特性分析[J]. *航空动力学报*, 2008, 23(2): 256-262.
WANG Jianjun, YAO Jianyao, LI Qihan. Probability characteristics of vibratory mode of bladed disk assemblies with random stiffness mistuning[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(2): 256-262. (in Chinese)
- [3] 廖海涛, 王建军, 李其汉. 随机失谐叶盘结构失谐特性分析[J]. *航空动力学报*, 2010, 25(1): 160-168.
LIAO Haitao, WANG Jianjun, LI Qihan. Mistuning characteristics analysis of mistuned bladed disk assemblies[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2010, 25(1): 160-168. (in Chinese)
- [4] 王培屹, 李琳. 叶盘结构盘片耦合振动特性的参数敏感性研究[J]. *航空动力学报*, 2014, 29(1): 81-90.
WANG Peiyi, LI Lin. Parametric sensitivity for coupling vibration characteristic of bladed disk[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2014, 29(1): 81-90. (in Chinese)
- [5] Hagood N W, von Flotow A. Damping of structural vibra-

tions with piezoelectric materials and passive electrical networks[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 146(2): 243-268.

- [6] Zhou B, Thouverez F, Lenoir D. A nonlinear vibration absorber based on nonlinear shunted piezoelectrics [R]. ASME Paper GT2012-69322, 2012.
- [7] Zhou B, Thouverez F, Lenoir D. Essentially nonlinear piezoelectric shunt circuits applied to mistuned bladed disks [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9): 2520-2542.
- [8] Zhou B, Thouverez F, Lenoir D. An adaptive control strategy based on passive piezoelectric shunt techniques applied to mistuned bladed disks[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013, 246(5): 289-300.
- [9] Zhou B, Thouverez F, Lenoir D. Vibration reduction of mistuned bladed disks by passive piezoelectric shunt damping techniques[J]. *AIAA Journal*, 2014, 52(6): 1194-1206.
- [10] Yu H, Wang K W, Zhang J. Piezoelectric networking with enhanced electromechanical coupling for vibration delocalization of mistuned periodic structures: theory and experiment[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295(1): 246-265.
- [11] Yu H, Wang K W. Piezoelectric networks for vibration suppression of mistuned bladed disks[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2007, 129(5): 559-566.
- [12] Yu H, Wang K W. Vibration suppression of mistuned coupled-blade-disk systems using piezoelectric circuitry network[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2009, 131(2): 1-12.
- [13] FAN Yu, LI Lin. Vibration dissipation characteristics of symmetrical piezoelectric networks with passive branches [R]. ASME Paper GT2012-69208, 2012.
- [14] Cai C W, Chan H C, Cheung Y K. Exact method for static and natural vibration analyses of bi-periodic structures[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(8): 836-841.
- [15] Castanier M P, Pierre C. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors[J]. *AIAA Journal*, 2002, 40(10): 2077-2086.
- [16] WANG Peiyi, LI Lin. Vibration of bi-periodic bladed disk [R]. ASME Paper GT2014-26597, 2014.
- [17] 王建军, 李其汉. 航空发动机失谐叶盘振动减缩模型与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- [18] 王培屹. 航空发动机叶盘结构流致振动抑制的机理研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2014.
WANG Peiyi. Research on vibration suppression theory of bladed disk of aeroengine under fluid excitation[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014. (in Chinese)

(编辑: 陈 越)