

基于等距 Ease-off 曲面的轮齿啮合仿真分析

魏冰阳¹, 杨建军¹, 仝昂鑫¹, 邓效忠²

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003;

(2. 机械装备先进制造河南省协同创新中心, 河南 洛阳 471003)

摘 要: 提出了一种基于 Ease-off 曲面等距变换的轮齿啮合仿真分析方法. 利用曲面曲挠参数, 给出了 2 阶密切曲面的定义及其拓扑方法; 在 2 阶微分精度范围内, 密切曲面与原曲面贴近, 可以代替散曲面做几何解析. 利用空间坐标变换, 建立了弧齿锥齿轮加工的啮合方程和通用产成模型. 基于啮合等距对应原理, 求解齿面对应点的离差; 利用最小二乘法, 拓扑散曲面, 构建 Ease-off 差齿面的 2 阶密切曲面. 基于 Ease-off 密切曲面参数, 利用齿面接触的等距线、渐近方向, 解析出齿面接触位形、接触路径、传动误差等啮合性能参数. 分析结果表明: 一次性构建 Ease-off 的 2 阶密切曲面, 能够获得轮齿完备的啮合信息, 曲面拓扑精度可到达 $0.1\mu\text{m}$; 与现行的啮合仿真方法相比易于齿面反求、数值计算, 啮合信息的获得也更为便捷.

关键词: 弧齿锥齿轮; 密切曲面; 等距对应; 差齿面; 轮齿接触分析(TCA)

中图分类号: V231; TH132

文献标志码: A

Tooth meshing simulation and analysis based on isometric mapping Ease-off surface

WEI Bing-yang¹, YANG Jian-jun¹, TONG Ang-xing¹, DENG Xiao-zhong²

(1. School of Mechanical and Electrolrical Engineering,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;

2. Collaborative Innovation Center of Machinery Equipment Advanced Manufacturing of Henan Province, Luoyang Henan 471003, China)

Abstract: Based on the isometric transformation of Ease-off surface, a method for the meshing simulation analysis of gear tooth was put forward. By using the parameters of curvature and torsion of surface geometry, both the definition on the 2nd order osculating surface and its topologic method were presented. Within the extent of 2nd order differential precise, the osculating surface was close to the original curve surface, making it possible to carry out the geometric analysis instead of the original scattered curve surface. By using the ordinate system transformation, the derivation of meshing equation and the establishment of universal model on generating spiral bevel gears were done respectively. Based on isometric mapping between two tooth meshing surfaces, the solutions to mismatched size of the relative point at surfaces of tooth were made, then the osculating surface of the Ease-off of tooth surface was set-up by means of the topology of original scattered surface using the least square method. Depending on the parameters of the set-up Ease-off osculating surface, the solving methods were presented on behavior parameters of tooth surface meshing such as

收稿日期: 2015-09-09

基金项目: 国家自然科学基金(51375144)

作者简介: 魏冰阳(1967—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事齿轮啮合原理及制造技术研究.

引用格式: 魏冰阳, 杨建军, 仝昂鑫, 等. 基于等距 Ease-off 曲面的轮齿啮合仿真分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(5): 1259-1265.
WEI Bingyang, YANG Jianjun, TONG Angxing, et al. Tooth meshing simulation and analysis based on isometric mapping Ease-off surface[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(5): 1259-1265.

contact area, contact path and transmission errors by the introduction of the isoheight line and the asymptotic behavior of the tooth surface contact. The results of analysis show that it is able to obtain directly the tooth meshing perfect information of gears by means of one-off constructing Ease-off surface, and increase the topologic precision of curve surface up to 0.1 μm . This presented method is not only more suitable for the reverse engineering and the numerical computing relative to the conventional methods of meshing simulation, but also more convenient for gaining the information of tooth surface contact.

Key words: spiral bevel gears; osculating surface; isometry mapping; Ease-off of tooth flank; tooth contact analysis(TCA)

弧齿锥齿轮在机械航空动力传输领域具有广泛的应用,其啮合理论和制造技术一直是各国专家学者研究的热点. 20 世纪 90 年代起,随着计算机数值计算方法的发展,轮齿接触分析(TCA)技术逐渐得到应用^[1-3], TCA 能提供轮齿接触的丰富信息^[4-5],成为齿轮啮合性能预控设计不可或缺的手段. 借助 TCA 方法, Litivin、方宗德等发展了“局部综合”法,预置在参考点 2 阶接触参数^[1-5],以期对轮齿传动误差和齿面印痕进行控制. 唐进元等提出了 TCA 的改进算法^[6],使 TCA 的求解方法更加实用;并进一步发展了基于预定啮合特性的点啮合齿面设计方法^[7-8]. 苏进展、方宗德又进一步利用 TCA 的方法完成了对弧齿锥齿轮接触印痕稳定性与误差敏感性的优化设计与试验研究^[9-10]. 但 TCA 方法需通过繁复计算齿面接触点的矢量和曲率参数,求解齿面的传动误差、接触印痕,不便于齿面重构和反求. 近年来发展起来一种更适宜数值计算的啮合仿真方法—Ease-off 差齿面^[11],尽管所反映的啮合信息不如 TCA 准确完善,但能直观地呈现齿面局部共轭接触特性,易于实现齿面的修正和重构. 吴训成、曹雪梅等^[12-15]利用 Ease-off 差齿面拓扑,发展了“主动设计”,通过预置传动规律,接触线方向,达到对齿面的啮合性能预控的目的. 当前 Ease-off 差齿面仿真为弧齿锥齿轮加工参数的优化^[16-17],齿面结构拓扑设计提供了更大便利性和准确度^[18]. 但当前 Ease-off 差齿面构建方法缺乏统一性和严格的啮合映射,远离中心的区域不仅失真而且极易发散,对齿面啮合仿真产生不利的影响. 因此,当前 Ease-off 差齿面的仿真和设计仍然借助于 TCA 的方法.

鉴于上述啮合仿真方法的不足之处,本文基于密切曲面、等距变换原理提出一种 Ease-off 差齿面拓扑方法,以期更便利和准确完备地获取轮齿的啮合信息. 在微分几何学理论上,给出 2 阶密切曲面的定义和拓扑方法;通过弧齿锥齿轮加工

的产成模型,齿面啮合的等距对应关系,构造 Ease-off 差齿面的密切曲面,籍此确定齿面接触印痕位形、接触迹方向、传动误差等. 本文提出的方法概称为等距 Ease-off 曲面法.

1 密切曲面的定义

设有一个 Σ^2 类曲面(至少存在 2 阶以上连续微商),在它上面的一点 M 处取坐标系(M - xyz),如图 1 所示, x, y 轴在 M 点的切平面上, z 则在 M 点的法线 n 方向. 若曲面 Σ^2 在该坐标系中的方程式为

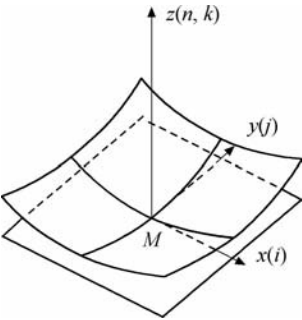


图 1 曲面密切坐标系
Fig. 1 Coordinates system of osculating surface

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

由微分几何可以知道, Σ^2 点的法线 n 可表示为

$$n = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \tag{2}$$

由于 z 轴取为 M 点的法线方向,所以它的 1 阶微分 $f_x = 0, f_y = 0$.

利用马克劳林公式,在 M 点的邻域都可以把式(1)展开成下面的级数:

$$\begin{aligned} z = & f_x \cdot x + f_y \cdot y + \frac{1}{2} f_{xx} \cdot x^2 + f_{xy} \cdot x \cdot y + \\ & \frac{1}{2} f_{yy} \cdot y^2 + \frac{1}{6} f_{xxx} \cdot x^3 + \frac{1}{2} f_{xxy} \cdot x^2 \cdot y + \\ & \frac{1}{2} \cdot f_{xyy} \cdot x \cdot y^2 + \frac{1}{6} \cdot f_{yyy} \cdot y^3 + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

略去 3 阶以上各项,在 M 点的邻域可得到近

似式如下:

$$z = \frac{1}{2}k_x x^2 + \tau_x \cdot x \cdot y + \frac{1}{2}k_y y^2 \tag{4}$$

式中 $k_x = f_{xx}$, $k_y = f_{yy}$; $\tau_x = f_{xy}$, $\tau_y = -f_{xy} = -\tau_x$ 分别为 x 方向($dy=0$)和 y 方向($dx=0$)的法曲率、短程挠率。

式(4)表示的曲面 Σ_d 和原曲面 Σ^2 在 2 阶项上是一致的,它们有相同的曲率参数 k_x, k_y 和 τ_x 。因此,把 Σ_d 称为 Σ^2 的 2 阶密切曲面。它们在任意方向上都有相同的法曲率及短程挠率。

由于 Σ^2 曲面在正常点的邻域中总有式(1)形式的参数表示,所以总存在 1 张 2 阶曲面形如式(4),而且当且仅当它们具有相同的曲率参数。因此,这一论述可作为微分几何的定理给出:对于 Σ^2 类曲面在正常点的邻域内,总存在一张与其紧密相切的 2 阶曲面,当且仅当它们具有相同的曲率参数。依次类推,可以定义 3 阶以上的密切曲面,称为高阶密切曲面。

当合理选取 x 和 y 方向,可以使 $\tau_x=0$,这时密切曲面(4)方程变为

$$z = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 \tag{5}$$

式中 k_x, k_y 为 Σ^2 曲面主曲率; x, y 为其主方向。式(5)与欧拉公式的形式一致。

由上述分析可以知道,对于 Σ^2 类曲面总存在一个二次型作为其 2 阶密切曲面。它们在 M 点有完全相同的 2 阶项(曲率参数),因此,在 2 阶项的精度范围内, Σ^2 类曲面在 M 点的邻域内可以由 2 阶密切曲面代替。

齿轮制造中,有时根据齿轮啮合原理求得的理论齿面十分复杂,而且难以表达和加工,此时可以用式(4)或更高阶的密切曲面近似代替理论齿面,不仅能够达到相当高的精度,而且可以很方便地对齿面做修正处理。当前的轮齿接触分析 TCA 大多都在 2 阶精度范围内进行。本文利用上述密切曲面原理进行弧齿锥齿轮 Ease-off 曲面的拓扑和啮合分析。

2 弧齿锥齿轮的产成模型

2.1 小轮齿面 Σ_1 产成及其方程

根据小轮产成原理,建立如图 2 所示的坐标

式中
$$\begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z_p - X_{bl} \cos \gamma_{m1} & -E_{m1} \sin \gamma_{m1} & -x_p \cos \gamma_{m1} \\ E_{m1} \sin \gamma_{m1} & z_p - X_{bl} \cos \gamma_{m1} & x_p - S_{r1} \\ y_p (\sin \gamma_{m1} - m_{p1}) & x_p (m_{p1} - \sin \gamma_{m1}) & E_{m1} \cos \gamma_{m1} \end{bmatrix} \cdot n_p$$

系来描述小轮的产成过程。刀盘坐标系 S_t ($O_t-x_t y_t z_t$) 的原点 O_t 为刀盘中心, $O_t-x_t y_t$ 为刀尖平面(与机床平面重合),并与摇台坐标系 S_p ($O_p-x_p y_p z_p$) 固联,且对应各坐标轴平行。 O_t 在坐标系 S_p 的极坐标(q_1, S_{r1})为角向刀位和径向刀位。 S_p 初始位置与机床坐标系 S_{m1} ($O_{m1}-x_{m1} y_{m1} z_{m1}$) 重合,其任意瞬时相对于 S_p 转角 φ_p ,则小轮对应产成的转角为 φ_1 。即, $\varphi_p = \varphi_1 \cdot m_{p1}$ 。其余参数 γ_{m1} 为轮坯安装角(等于小轮根锥角), $X_{bl} = |O'_m O'_d|$ 为床位, $E_{m1} = |O_{m1} O'_m|$ 为垂直轮位, $X_{d1} = |O'_d O_1|$ 为轴向轮位修正值。小轮产形轮的方程可描述作

$$\begin{aligned} r_p &= \begin{bmatrix} (r_t + u_1 \sin \alpha_1) \cos \theta_1 + S_{r1} \cos q_1 \\ (r_t + u_1 \sin \alpha_1) \sin \theta_1 - S_{r1} \cos q_1 \\ -u_1 \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \\ n_p &= \begin{bmatrix} -\cos \alpha_1 \cos \theta_1 \\ -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 \\ -\sin \alpha_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中 u_1 和 θ_1 为曲面参数, r_t 为刀尖半径, α_1 为刀盘齿形角(外刀取正,内刀取负)。

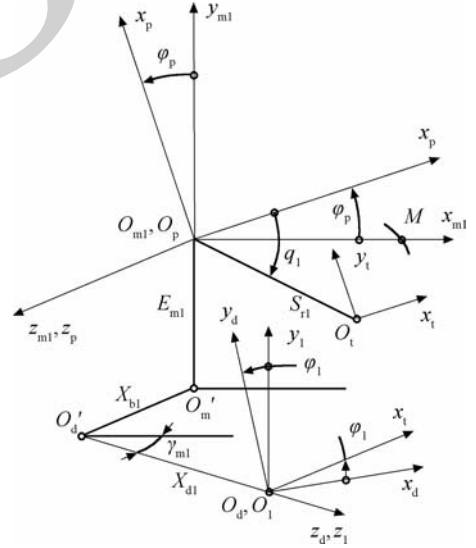


图 2 小轮产成坐标系

Fig. 2 Coordinate system of generating pinion

根据图 2 坐标系中的相应参数可由啮合方程($n_{m1} \cdot v_{m1} = 0$)推出

$$\sin(\varphi_p + c_1) = \frac{W_1}{\sqrt{U_1^2 + V_1^2}}, \quad \tan c_1 = \frac{V_1}{U_1} \tag{6}$$

式(6)作为啮合方程的通用表达式,对所有交叉轴齿轮传动都适用.完成相应 S_p 坐标系到 S_1 的 M_{1p} 齐次坐标变化、 L_{1p} 旋转坐标变换后可确定小轮的齿面 Σ_1 方程

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u_1, \theta_1, \varphi_1) &= \mathbf{M}_{1p} \cdot \mathbf{r}_p(u_1, \theta_1) \\ \mathbf{n}_1(\theta_1, \varphi_1) &= \mathbf{L}_{1p} \cdot \mathbf{n}_p(\theta_1) \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 大轮齿面 Σ_2 产成及其方程

弧齿锥齿轮大轮加工一般采用双面滚切法.用如图 3 所示的坐标系描述大轮齿面的产成.刀盘坐标系 $S_c(O_c-x_c y_c z_c)$ 位于摇台坐标系 $S_g(O_g-x_g y_g z_g)$ 第 I 象限,绕轴 z 旋转 1.5π . S_g 初始位置与机床坐标系 $S_{m2}(O_{m2}-x_{m2} y_{m2} z_{m2})$ 重合,其任意瞬时相对于 S_{m2} 转角 φ_g ,则大轮对应产成的转角为 φ_2 .其余参数与图 2 相似.大轮在产成过程中满足

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_g + c_2) &= \frac{W_2}{\sqrt{U_2^2 + V_2^2}} \\ \tan c_2 &= V_2/U_2, \quad \varphi_2 = m_{20} \cdot \varphi_g \end{aligned} \quad (8)$$

式中各量形式与式(6)相同,只需要相应变量做替换即可.相应的可以得到大轮的齿面 Σ_2 方程

$$\begin{cases} \mathbf{r}_2(u_2, \theta_2, \varphi_2) = \mathbf{M}_{2g} \cdot \mathbf{r}_g(u_2, \theta_2) \\ \mathbf{n}_2(\theta_2, \varphi_2) = \mathbf{L}_{2g} \cdot \mathbf{n}_g(\theta_2) \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{r}_g, \mathbf{n}_g$ 分别为大轮的产形轮方程

$$\mathbf{r}_g = \begin{bmatrix} (r_c - u_2 \sin \alpha_2) \sin \theta_2 + S_{r2} \cos q_2 \\ -(r_c - u_2 \sin \alpha_2) \cos \theta_2 + S_{r2} \sin q_2 \\ -u_2 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_g = [-\cos \alpha_2 \sin \theta_2 \quad \cos \alpha_2 \cos \theta_2 \quad \sin \alpha_2]^T$$

式中 α_2 作为大轮刀盘齿形角内刀取正,外刀取负.

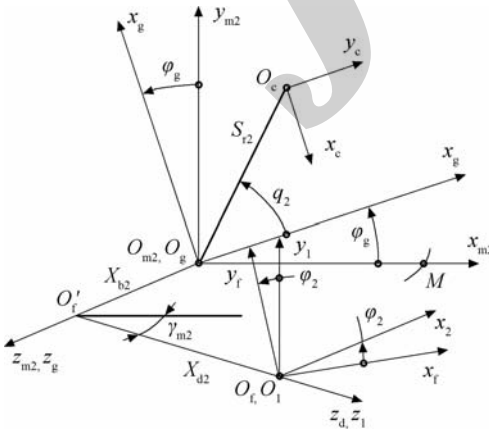


图 3 大轮产成坐标系

Fig. 3 Coordinate system of generating wheel

上述式(6)~式(9)可作为固定安装法弧齿锥齿轮齿面模型的通用表达.

2.3 共轭小轮齿面 Σ_s

利用大轮齿面产成小轮齿面为包络原理,假设大小轮啮合的初始角度为 ϕ_{20} 和 ϕ_{10} ,则任意啮合位置大小轮之间的转角的关系为

$$\begin{aligned} \sin(\phi_2 + c) &= \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad \tan c = \frac{V}{U} \\ \phi_2 - \phi_{20} &= \frac{N_1}{N_2}(\phi_1 - \phi_{10}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中各量形式与式(6)相同,只需替换变量即可.

利用上述关系可得共轭小轮齿面 Σ_s 方程

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s(u_s, \theta_s, \phi_s) &= \mathbf{M}_{12} \cdot \mathbf{r}_2(u_2, \theta_2) \\ \mathbf{n}_s(\theta_s, \phi_s) &= \mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{n}_2(\theta_2) \end{aligned} \quad (11)$$

3 等距曲面 Ease-off 的构建

要想获得真实的 Ease-off 曲面,必需从啮合原理角度实现共轭齿面的等距对应,即一个齿面通过啮合关系变换到另一个齿面上时,其啮合接触的弧长、方向不变,这一原理基于微分几何学上等距变换的概念.下面给出这一齿面啮合关系上的等距对应的变换方法:

1) 求大小轮齿面 Σ_2, Σ_1 和 Σ_s 三者的切触点

由小轮方程(7)、大轮方程(9)、共轭小轮关系式(11)共 6 个非线性方程(6 个未知变量),求出切触点 $M(u_{20}, \theta_{20}, \phi_{20}; u_{10}, \theta_{10}, \phi_{10})$,作为构造差曲面 Ease-off 的坐标原点.

2) 划分网格节点

以大轮 $M(u_{20}, \theta_{20})$ 为中心,以曲纹坐标 Δu 和 $\Delta \theta_2$ 为增量向外拓展划分网格节点 $n_1 \times n_2$ 个,网格节点统一为曲纹坐标的弧长参数,即

$$\begin{aligned} P(u_2, v_2)_{(i,j)}; \quad (i = 1 \sim n_1, j = 1 \sim n_2) \\ v_2 = \Delta \theta_2 \cdot (r_c - u_2 \sin \alpha_2) \end{aligned}$$

网格节点步长、数量可根据计算精度要求确定.

计算大轮 Σ_2 对应点的坐标 $P(x_2, y_2, z_2)_{(i,j)}$,共轭小轮 Σ_s 对应点的坐标 $P(x_s, y_s, z_s)_{(i,j)}$.

3) 齿面离差

在齿面 Σ_1 和 Σ_s 之间按照同方向、等弧长做等距对应,计算网格节点 P 处对应点的距离为 $|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|$,即齿面 Σ_1 对应点的离差 $\Delta_{(i,j)}$

$$\Delta_{(i,j)} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1) \quad (12)$$

式(12)大于零时表示失切,小于零时表示干涉.

4) 绘制 Ease-off 图

计算大轮 Σ_2 对应点 $P(x_2, y_2, z_2)_{(i,j)}$ 旋转投影坐标($R = z_2, L = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$),同时做旋转、平

移,最后以切触点 $M(x_0, y_0)$ 为坐标原点,根锥、齿高方向分别为 x 轴、 y 轴方向, $\Delta_{(i,j)}$ 为 z 轴坐标,即

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos \gamma_2 - L \cdot \sin \gamma_2 - x_0 \\ y = R \cdot \cos \gamma_2 + L \cdot \sin \gamma_2 - y_0 \\ z = \Delta_{(i,j)} \end{cases} \quad (13)$$

基于二次式(4),利用最小二乘法,对式(13)所得到的 $n_1 \times n_2$ 个散点做切近. 根据文中第 1 节的分析,可以知道必然存在形如(4)的二次式为 Ease-off 的密切曲面 Σ_d .

以表 1 中的某对航空弧齿锥齿轮(正交,齿数为 41/11,模数为 4.3 mm,螺旋角为 35° ,按美国齿轮制造协会 AGMA2005-D03 标准设计)加工参数为例建立如图 4 所示的 Ease-off 曲面,图 4(a)为正面,顺时针;图 4(b)为反面,逆时针. Ease-off 曲面在 15×9 个散点(实点“.”标示)拟合的基础上对曲面做了拓扑. 在 M 邻域内 k_x 和 k_y 分别为 Ease-off 曲面沿齿长、齿高方向的曲率,反映了小轮纵向、横向的离差. 齿面离差图 4 包含了丰富的轮齿啮合信息:齿面接触印痕(contact pattern)、接触路径

表 1 加工参数
Table 1 Settings of machine-tool

参数	大轮	小轮	
		正面	反面
刀盘齿形角 $\alpha_i / (^\circ)$	21.5, -18.5	18.5	-21.5
刀尖半径 r_i / mm	75.4, 77.0	74.9	77.07
径向刀位 S_r / mm	70.462	68.211	72.925
角向刀位 $q / (^\circ)$	62.377	65.961	58.240
机床根锥角 $\gamma_m / (^\circ)$	70.65	13.333	13.333
垂直轮位 E_m / mm	0	-0.590	0.808
水平轮位 X_g / mm	0	-1.774	1.982
床位 X_b / mm	0	0.408	-0.456
滚比 m_i	1.0332	3.7340	3.9804

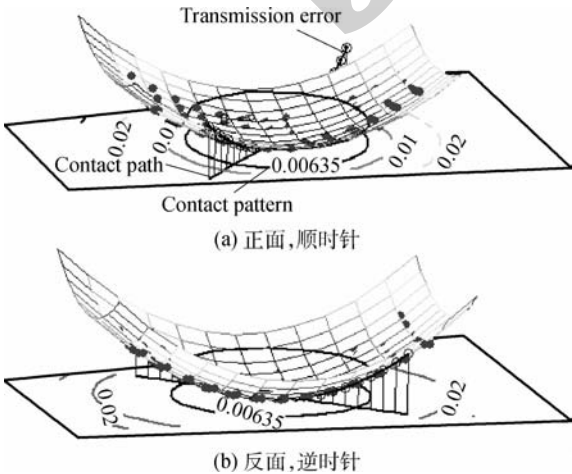


图 4 Ease-off 密切面分析

Fig. 4 Osculating surface analysis of Ease-off

(contact path)、传动误差(transmission error). 但这些量需要对 Ease-off 曲面解析得到.

4 Ease-off 曲面的啮合解析

4.1 齿面接触印痕

利用式(4)可以很容易求得 Ease-off 曲面的主曲率、主方向

$$\begin{cases} k_{(1,2)} = k_x \cos^2 \theta + \tau_x \sin 2\theta + k_y \sin^2 \theta \\ \tan 2\theta_{(1,2)} = \frac{2\tau_x}{k_y - k_x}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta_1 \end{cases} \quad (14)$$

式中 θ 为 Ease-off 曲面主方向同 x 轴方向的夹角. 其主方向对应接触区的长、宽方向 x_a 和 y_b , 则 Ease-off 曲面可表示为椭圆曲面

$$\frac{1}{2} k_1 x_a^2 + \frac{1}{2} k_2 y_b^2 = z_d \quad (15)$$

由于 Ease-off 曲面由啮合齿面等距对应求出, 其等距线(即 z 坐标等高线)不仅反映了齿面的离差, 而且能够直接反映出齿面接触区的扩展状况, 因此, 令 $z_d = 6.35 \mu\text{m}$, 由式(15), 在图 4 中可得 1 条 z_d 坐标的等距线, 该曲线为 1 条二次闭曲线, 其形状一般近似为一椭圆形, 代表了齿面接触印痕. 容易求得接触印痕椭圆长 a 、短轴 b 的长度为

$$a = 2\sqrt{2z_d/k_1}, \quad b = 2\sqrt{2z_d/k_2} \quad (16)$$

4.2 接触路径

两齿面啮合运动中接触点的运动方向可以在 Ease-off 曲面上反映出来. 引入微分几何渐近方向概念, 则齿面啮合时的渐近方向即齿面的接触路径方向, 该方向可由 Ease-off 曲面 Σ_d 的主曲率、主方向确定

$$q = \tan^{-1} \sqrt{k_2/k_1} \quad (17)$$

该角度称为 Ease-off 曲面渐近方向角, 其含义表示接触路径方向同 Ease-off 曲面第 1 主方向 x_a 的夹角. 那么与根锥方向的夹角则为 $\psi = q + \theta_1$.

4.3 传动误差

在渐近方向, Ease-off 曲面的法曲率 k_s 反映了齿面沿接触路径方向的离差, 即大小轮啮合瞬时法向加速度的大小, 它可转化为传动比函数的 1 阶导数 $m'_{12}(\phi_1)$. 图 4 中渐近方向的法截线为 1 条抛物线, 表示了齿面传动的法向误差. 即

$$\begin{aligned} k_s &= k_1 \cos^2 q + k_2 \sin^2 q \\ z_s &= \frac{1}{2} k_s s^2, \quad s = x_a \cos q + y_b \sin q \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)同 TCA 分析中的传动误差曲线存在满映射, 可通过几何计算实施转换.

经几何解析,上述各参数可集中在图 4 中表示.也可以转化为二维坐标形式,用图 5 的形式清晰的表示出来.沿接触路径的法截线弓形反映了啮合法向角加速度的大小(图 5 中为长度单位),转换为角加速度则可以同图 6 的 TCA 分析得到的传动误差大小做对比.接触斑点内接菱形端点 AB 的距离表示了齿面接触斑点的长度,菱形边长 AD 表示了齿面接触线(contact line)的长度,也即瞬时接触椭圆长轴的长度.等距线则表示了齿面该位置失切离差的大小.因此利用 Ease-off

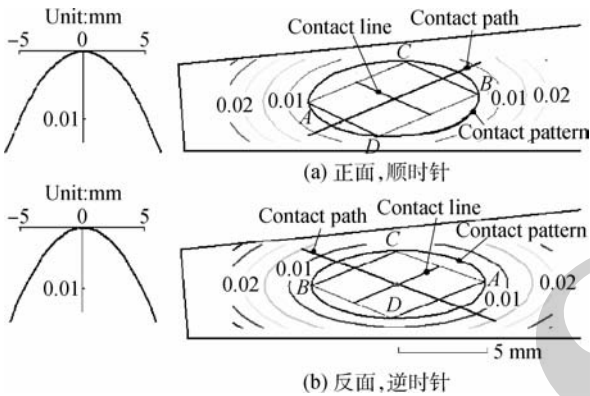


图 5 Ease-off 信息图

Fig. 5 Information mapping of Ease-off

曲面分析的方法,图 5 中 1 个等距线图可全面反映齿面的接触区、接触路径、传动误差 3 个特征量.

表 2 给出了表 1 中的弧齿锥齿轮 Ease-off 曲面的分析计算结果.其拓扑精度可以使用平均误差(m_z)和标准差(σ_z)来衡量,统称为密切误差.密切误差小于 $1.0\mu\text{m}$,完全能够满足齿面接触分析的要求.如果想进一步提高 Ease-off 曲面的分析精度,可保留式(3)的高次项对曲面做拓扑.

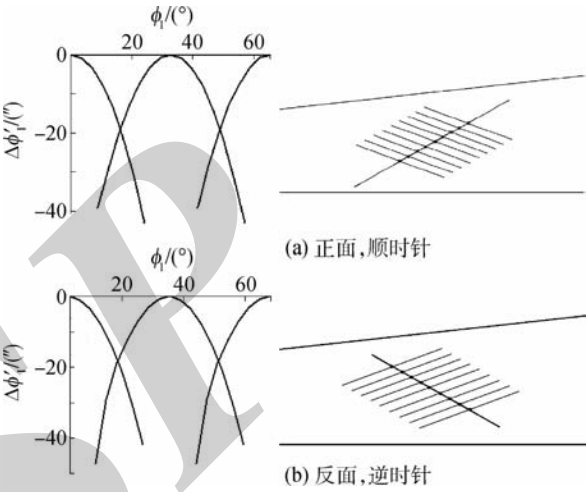


图 6 轮齿接触分析图

Fig. 6 Mapping of TCA

表 2 Ease-off 曲面参数分析

Table 2 Parameters analysis of Ease-off

曲面	$k_x/10^{-4}\text{ mm}^{-1}$	$\tau_x/10^{-4}\text{ mm}^{-1}$	$k_y/10^{-4}\text{ mm}^{-1}$	$k_s/10^{-4}\text{ mm}^{-1}$	$m_z/\mu\text{m}$	$\sigma_z/\mu\text{m}$
正面	1.18	-5.23	5.51	5.78	0.253	0.164
反面	1.03	0.67	6.75	7.09	0.766	0.316

5 与 TCA 方法的比较

为了证明上述计算方法的准确性,对表 1 的算例做常规 TCA 分析,结果如图 6 所示(小轮转角 ϕ_1 ,大轮转角误差 $\Delta\phi'_1$).图 5 和图 6 比较接触区非常相似.传动误差数值统一转换为相对角加速度(ϵ),提取接触区长(a)、宽度(b)、接触线长度(l)、接触路径对角(ψ)结果列在表 3 中.从表 3

的对比结果看,两种方法计算得到的接触参数数值基本接近,应用于啮合仿真误差完全可以接受.由于接触线长(l)、接触路径对角(ψ)、相对角加速度(ϵ)由 Ease-off 曲面间接得到,且存在一定的拓扑误差,因此表 3 中这 3 个量常规 TCA 计算结果更准确;对于接触区长(a)、宽度(b)参数,根据 Ease-off 曲面等距线得到的结果更可信.

综上所述,Ease-off 曲面呈现了完备的齿面

表 3 Ease-off 曲面与 TCA 对比

Table 3 Comparison between Ease-off surface and TCA

方法	a/mm		b/mm		l/mm		$\psi/^\circ$		$\epsilon/(\text{rad/s}^2)$	
	顺时针	逆时针	顺时针	逆时针	顺时针	逆时针	顺时针	逆时针	顺时针	逆时针
Ease-off	12.4	11.2	4.6	4.2	5.5	6.6	36.1	155.1	0.045	0.081
TCA	12.7	12.3	5.2	5.2	6.5	7.4	38.2	148.5	0.042	0.075

接触信息,由 Ease-off 曲面等距线可拓扑接触区,渐近方向代表接触路径切方向,其法截线即代表传动误差曲线.

6 结 论

针对现有的轮齿啮合仿真方法的不足之处,

给出了等距 Ease-off 密切曲面啮合解析方法. 从 2 阶密切曲面的微分几何定义出发, 给出了密切曲面的构建与拓扑方法. 在 2 阶精度范围内, 密切曲面与原有曲面具有相同的微分几何属性, 贴近程度达到 $0.1\mu\text{m}$, 可以替代原有曲面分析.

通过弧齿锥齿轮加工的产成模型的变换关系, 构建了等距 Ease-off 曲面, 利用等距线、渐近方向确定了齿面接触区、接触路径方向、传动误差等啮合性能参数, 仿真精度高于 $1.0\mu\text{m}$. 通过一次性构建 Ease-off 曲面, 能够获得完备的轮齿啮合信息, 与现行的啮合仿真方法相比更加适宜数值计算. 为轮齿啮合仿真、性能预控、齿面反求奠定了理论基础, 提供了更便利的技术手段.

参考文献:

- [1] Litvin F L. Local synthesis and tooth analysis of face-milled of spiral bevel gears[R]. NASA CR4342, 1990.
- [2] Litvin F L. Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled formate generated spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5): 441-459.
- [3] Litvin F L, Fuentes A. Gear geometry and applied theory [M]. 2ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2004.
- [4] 方宗德, 刘涛, 邓效忠. 基于传动误差设计的弧齿锥齿轮啮合分析[J]. 航空学报, 2002, 23(3): 226-230.
FANG Zongde, LIU Tao, DENG Xiaozhong. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on the design of transmission error[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(3): 226-230. (in Chinese)
- [5] 曹雪梅, 张华, 方宗德. 航空弧齿锥齿轮承载传动误差的分析与设计[J]. 航空动力学报, 2009, 24(11): 2618-2624.
CAO Xuemei, ZHANG Hua, FANG Zongde. Design and analysis of loaded transmission errors for aviation spiral bevel gears [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(11): 2618-2624. (in Chinese)
- [6] 唐进元, 卢延峰, 周超. 螺旋锥齿轮齿面接触分析改进算法研究[J]. 航空动力学报, 2009, 24(1): 189-195.
TANG Jinyuan, LU Yanfeng, ZHOU Chao. Research on improved tooth contact analysis algorithm of spiral bevel gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(1): 189-195. (in Chinese)
- [7] 周凯红, 唐进元, 严宏志. 基于预定啮合特性的点啮合齿面设计方法[J]. 航空动力学报, 2009, 24(11): 2612-2617.
ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan, YAN Hongzhi. Research on meshing characteristics-based design of point-contact tooth surface[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(11): 2612-2617. (in Chinese)
- [8] 周凯红, 唐进元, 曾韬. 基于预定啮合特性的点啮合齿轮的 CNC 制造技术研究[J]. 机械工程学报, 2009, 45(9): 173-182.
ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan, ZENG Tao. Research on CNC manufacture of meshing characteristics-based design point-contact tooth surface[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(9): 173-182. (in Chinese)
- [9] 苏进展, 方宗德. 弧齿锥齿轮印痕稳定性优化设计与试验[J]. 航空动力学报, 2012, 27(12): 2622-2682.
SU Jinzhan, FANG Zongde. Optimization design and test of stability of contact patterns of spiral bevel gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(12): 2622-2682. (in Chinese)
- [10] 苏进展, 方宗德. 弧齿锥齿轮误差敏感性优化设计[J]. 航空动力学报, 2012, 27(1): 183-189.
SU Jinzhan, FANG Zongde. Optimization design of the error sensitivity for spiral bevel gears[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(1): 183-189. (in Chinese)
- [11] Stadtfeld H J. What "Ease-off" shows about bevel and Hypoid Gears[J]. Gear Technology, 2001(9/10): 18-23.
- [12] 吴训成, 毛世民, 吴序堂. 点啮合齿面主动设计研究[J]. 机械工程学报, 2000, 36(4): 70-72.
WU Xuncheng, MAO Shimin, WU Xutang. On function-oriented design of point-contact tooth surfaces[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(4): 70-72. (in Chinese)
- [13] 曹雪梅, 方宗德, 张金良. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计[J]. 机械工程学报, 2007, 43(8): 155-158.
CAO Xuemei, FANG Zongde, ZHANG Jingliang. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(8): 155-158. (in Chinese)
- [14] 曹雪梅, 方宗德, 许浩. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计及试验验证[J]. 机械工程学报, 2008, 44(7): 209-214.
CAO Xuemei, FANG Zongde, XU Hao. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears and experimental tests[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7): 209-214. (in Chinese)
- [15] 曹雪梅, 邓效忠, 聂少武. 基于共轭齿面修正的航空弧齿锥齿轮高阶传动误差齿面拓扑结构设计[J]. 航空动力学报, 2015, 30(1): 195-200.
CAO Xuemei, DENG Xiaozhong, NIE Shaowu. Ease-off flank topography design for aviation spiral bevel gears with higher-order transmission errors by modification of conjugate[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(1): 195-200. (in Chinese)
- [16] Simon V. Optimal machine-tool settings for the manufacture of face-hobbed spiral bevel gears[J]. Journal of Mechanics Design, 2014, 136(8): 1004-1012.
- [17] Simon V. Optimal tooth modifications in face-hobbed spiral bevel gears to reduce the influence of misalignments on elastohydrodynamic lubrication[J]. Journal of Mechanics Design, 136(7): 071007. 1-071007. 9, 2014.
- [18] 曹雪梅, 邓效忠, 耿龙龙. 弧齿锥齿轮齿面曲率干涉检验新方法 with 实验验证[J]. 航空动力学报, 2015, 30(2): 491-497
CAO Xuemei, DENG Xiaozhong, GENG Longlong. An invariant approach for tooth surface curvature inference analysis of spiral bevel gears and experiment test[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(2): 491-497. (in Chinese)