

基于图论的燃油管路稳态流动计算方法

魏杰立¹, 张净玉^{1,2}, 叶大海¹, 何小民^{1,2}

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学 能源与动力学院 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 基于节点分析法,提出将局部损失并入相应管段的处理方法,推导阻力计算公式,从而得到兼顾沿程和局部损失的稳态流动计算方法。将该计算方法应用于实际的航空发动机燃油管路,采用 VB.NET 语言编写计算软件;同时,对燃油管路开展三维数值模拟计算。结果表明:局部损失对管路的流量分配影响较大;该计算方法得到的流量分配与数值计算结果趋势吻合很好,差别在 $\pm 10\%$ 。

关 键 词: 流动计算; 图论; 燃油管路; 流动损失; 阻抗; 航空发动机

中图分类号: V233.2

文献标志码: A

Stable hydraulic computation method for fuel pipe system based on the graph theory

WEI Jieli¹, ZHANG Jingyu^{1,2}, YE Dahai¹, HE Xiaomin^{1,2}

(1. College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautic and Astronautic, Nanjing 210016, China;

2. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,

College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Using nodal analysis model, a treatment for evaluating the local losses by merging them into relevant pipes was proposed and equations for computing total losses were deduced. Consequently, a method considering both friction and local losses was developed for stable fuel piping system. Then, it was applied to a practical simplified aero-engine fuel piping system. A software based on this algorithm was developed with VB.NET language. Besides, three-dimensional numerical simulations were conducted for the fuel piping system as well. Results showed that local loss affected the flow distribution a lot and directly determined the results. When solutions of the present method and numerical simulation were compared, they presented well agreement with each other with an error of $\pm 10\%$.

Key words: hydraulic computation; graph theory; fuel pipe; flow loss; impedance; aero-engine

航空发动机燃油管路系统一般主要由从燃油泵出口至燃油总管进口的管路、燃油总管和喷油

杆三部分组成。管路形式复杂多变,具有网络特征。管路中含有各种产生局部损失的管路元件。

收稿日期: 2016-03-01

作者简介: 魏杰立(1990—),男,博士生,主要从事主燃烧设计、冷却设计及燃油管路设计的研究。

引用格式: 魏杰立,张净玉,叶大海,等. 基于图论的燃油管路稳态流动计算方法[J]. 航空动力学报,2017,32(10):2344-2354. WEI Jieli,ZHANG Jingyu,YE Dahai,et al. Stable hydraulic computation method for fuel pipe system based on the graph theory[J]. Journal of Aerospace Power,2017,32(10):2344-2354.

实际工程中,管路系统设计或流动计算问题,通常可以分为三类:①已知管路系统的几何尺寸和总流量,确定管路系统的压力分布和流量分配;②已知管路系统的几何尺寸及允许的压力降,确定管路系统的流量分配和压力分布;③根据给定的流量和压力降,确定管路尺寸。虽然分为三类问题,但实质都是管路系统的能量损失计算。任一类问题的求解算法,都可以用来试算其他两类问题。假设已知第一类问题的求解算法,若调节流量或改变管路的几何尺寸进行第一类问题计算,使得管路的压力降满足设计要求,则分别解决了第二类和第三类问题。因此,本文仅对第一类问题开展算法研究。

图论以图为研究对象,描述事物之间的某种特定关系,在网络管路的水力计算中得到广泛应用。祁祖尧^[1]应用图论建立管网的关联矩阵和回路矩阵,构造矩阵形式的定解方程组,并在此基础上利用矩阵求解方法解决给水管网的水力计算问题。分别运用基本回路法和节点分析法对单点压力管网进行稳态水力计算;同时对管网的非稳态流动进行分析。王国明等^[2]由环状管网的两个基本关系矩阵:环-节点矩阵和环-管段矩阵,得到节点-管段矩阵生成方法。龙冀^[3]分析排水管网的网络特性,结合图论的原理和方法,建立水网规划的决策图模型,然后对管网进行优化研究。梅国恒和贾玉贵^[4]针对城市给水管网存在的水力不平衡现象,讨论了环状管网水力计算的方法,建立了环状管网水力平差的计算模型并得到基本关联矩阵和基本回路矩阵的生成方法。陈钢军^[5]在管网水力计算中引入图论,建立了环状管网的图模型,导出未知数和管网环数相等的矩阵方程式,同时构造计算流量的迭代格式。Sarbu^[6]采用节点分析法求解管网流量分配,提出采用优化算法代替传统迭代算法的求解过程。Brkic^[7]针对燃气管网,提出一种结合节点矩阵和回路矩阵求解管网的方法。

上述研究的方法均针对大型给水排水管网,管路的沿程损失远大于局部损失,可以忽略局部损失,只考虑沿程损失。因此,可直接使用基尔霍夫第一、第二定律^[8]。对于局部损失占主导的管网,图论方法尚未进行大量研究。然而,局部损失影响又不容忽视。景江红^[9]通过实验和数值研究,得到三通管的阻力系数,并将其应用到管网的水力计算。研究发现,对于大型管网, $1/d>1\,000$ 以上,局部损失相对较小可以忽略;但当管路附件

较多或 $1/d<1\,000$,局部损失引起的误差可达到20%甚至更高。而航空发动机燃油管路是典型的局部损失主导的管网,包含三通、突扩、突缩等产生局部损失的管路元件。

由于局部损失的不可忽略,使得传统的只考虑沿程损失的基于图论的算法面临挑战。计算流体力学(CFD)的发展,为解决管路的流动计算提供新的手段。钟贤和等^[10]对烟气的较大流量多支管分配进行实验和数值模拟研究。采用 $k-\epsilon$ 双方程模型进行计算。实验和数值模拟得到的几种管路的流量分配比基本一致。刘进等^[11]使用 $k-\epsilon$ 模型对电站锅炉三通集箱系统流量分配开展计算。缪斌^[12]对并联管组流量分配开展数值模拟和实验研究,标准 $k-\epsilon$ 计算结果与实验测得流量结果相符。可以看出双方程的 $k-\epsilon$ 模型对管路流量分配的预测比较准确。但当管路多变复杂时,CFD方法需要投入大量的时间进行模型建立、网格生成和数值计算,设计的成本较高、周期较长。而图论的工程方法,可以适应多变性,设计的各个环节:建立管路模型和开展计算均省时便捷。

因此,本文基于图论,使用节点分析法并类比电路,将沿程损失类比为电路的线电阻损失,局部损失类比为电路的接触电阻损失,画出流阻图,实现将局部损失并入相应管段。从而,得到同时考虑沿程和局部损失的燃油管路稳态流动计算方法,实现对燃油管路稳态流动的精确计算。

1 图 论

图是图论的研究对象,一个图 G 由非空的顶点集 $V(G)$ 、与 $V(G)$ 不相交的边集 $E(G)$ 及关联函数 Ψ_G 组成,记为 $G=(V(G), E(G), \Psi_G)$ 或 $G=(V(G), E(G))$ 。图可分为无向图和有向图,有向图可表示为 $D=(V(D), A(D))$ 。管路的流动具有方向性,应使用有向图进行表示。图表示了事物间的某种关系,而这种关系可以用一些矩阵对其进行描述和存储。用矩阵表示图时,应先对图进行编号^[13]。

关联矩阵 $\mathbf{B}$ 描述和存储图中边(弧)与点的关系。行代表点,列代表边(弧)。有向图 $D=(V, A)$,且 $V(D)=\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$, $A(D)=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_q\}$,称 $p \times q$ 矩阵 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{p \times q}$ 为有向图 D 的关联矩阵,其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & a_j \in \text{inc}^+(v_i) \\ -1 & a_j \in \text{inc}^-(v_i) \\ 0 & a_j \notin \text{inc}^+(v_i) \cap \text{inc}^-(v_i) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\text{inc}^+(v_i)$ 为以 v_i 为始端的所有弧的集合, $\text{inc}^-(v_i)$ 为以 v_i 为终端的所有弧的集合. 根据数学证明, $\mathbf{B}$ 的秩 $r(\mathbf{B}) = p - 1$, 若在 $\mathbf{B}$ 中划去对应于某一点的行, 则得到以该点为参考点的基本关联矩阵 $\mathbf{B}_i$.

假设存在如图 1 所示有向图, 节点与弧的编号如图所示, 则关联矩阵 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

当以节点 v_5 作为参考节点时, 基本关联矩阵 $\mathbf{B}_i$ 为

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)

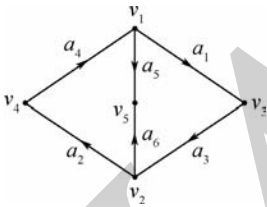


图 1 有向图
Fig. 1 Directed graph

2 流动损失

流动损失包括沿程损失和局部损失. 对应于图论, 可以将沿程损失看作边(弧)的水力特性, 而将局部损失看作节点的水力特性. 而图论的矩阵表示只能处理边的属性而不能表达节点的属性, 因此, 为了计算局部损失, 必须将节点的属性转化为边(弧)的属性, 以使用图论进行求解^[14-15].

2.1 沿程损失

对于图 2 所示的直管段, 其图论模型如图 3 所示. 在 A 截面与 B 截面间使用单位质量流体的伯努利方程

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{u_B^2}{2g} + h_f$$

(4)

式中 z 为高度, p 为静压, u 为截面平均速度, ρ 为流体密度, g 为重力加速度, h_f 为沿程损失. 当忽略高度变化时

$$h_f = \frac{p_A^* - p_B^*}{\rho g}$$

(5)

式中 p^* 为截面的平均总压. 该损失可以由达西公式表示为

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g}$$

(6)

式中 λ 为沿程损失系数, l 为管段长度. 当已知管路的体积流量 Q 时

$$u = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

(7)

将式(7)代入式(6)可得

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}$$

(8)

管道两端压降为

$$\Delta p_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4}$$

(9)

式中 Δp_f 为管段两端的总压损失.

令

$$S_f = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{8\rho}{\pi^2 d^4}$$

(10)

则

$$\Delta p_f = S_f Q^2$$

(11)

式中 S_f 为沿程阻抗, 类似电路中的线电阻, 属于图论的边 a_1 (如图 3) 的属性. 对于弯管有相同的结论. 等直径的直管与弯管相连, 将其看作两段管路, 图论模型为两条边. 对于发生空间扭曲的管路, 可以看作是一种变形的直管或弯管, 也具有类似结论.

对沿程损失系数已开展大研究, 得到一些经验公式^[16-18], 也可以对特定用途的管路进行实验研究, 获得经验关系式.

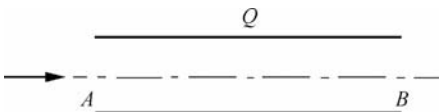


图 2 直管示意图
Fig. 2 Schematic drawing of straight pipe

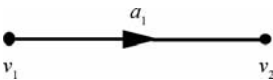


图 3 直管图论模型
Fig. 3 Graph theory model of straight pipe

2.2 局部损失

对于局部损失的计算, 开展了大量研究^[19-21].

王桂秋^[19]总结局部损失计算的方法:当量长度法和阻力系数法。阻力系数法又包括单常数阻力系数法、Hooper 的 2-K 常数法和 3-K 常数法。还可以通过实验研究得到阻力系数关系式。石喜等^[20]对 PVC(polyvinyl chloride)三通管开展数值和实验研究,得到局部阻力系数关于流动和结构参数的关系式。

航空发动机燃油管路系统中,局部损失的流动管件主要有突扩、突缩和三通管等。图 4 为突扩和突缩管路,其图论模型如图 5 所示,两条直管分别对应边 a_1 和 a_2 。

大量实验表明局部损失 h_ξ 与流动的动能成正比,即

$$h_\xi = \xi_j \frac{u_j^2}{2g} = \xi_j \frac{8Q_j^2}{\pi^2 g d_j^4} \tag{12}$$

式中 ξ 为局部损失系数。

局部总压损失为

$$\Delta p_\xi = \xi_j \frac{8\rho Q_j^2}{\pi^2 d_j^4} \tag{13}$$

令

$$S_\xi = \frac{8\rho\xi_j}{\pi^2 d_j^4} \tag{14}$$

则

$$\Delta p_\xi = S_\xi Q_j^2 \tag{15}$$

式中 S_ξ 为局部阻抗,类似电路接线处的接触电阻,属于图论的节点 v_2 (如图 5)属性。

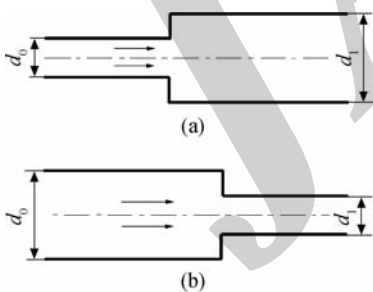


图 4 突扩与突缩元件

Fig. 4 Schematic drawing of variable cross-section pipe

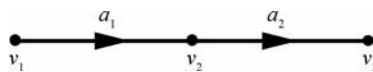


图 5 变截面管图论模型

Fig. 5 Graph theory model of variable cross-section pipe

2.3 总损失

对于管路既有沿程损失又有局部损失,而图论只能计算边上属性的量,即沿程损失。为了在计算中得到两者的总损失,需要将具有图论节点

属性的局部损失转化为图论边上属性的沿程损失。因此,本文作如下规定:

1) 产生局部阻力的管件阻碍流体流入哪条管段,就将局部损失并入哪条管路。

2) 用所并入管路的流动和结构参数计算该局部损失。

由此,如图 4 所示的管路,依据所作规定,类比电路中的电阻图,得到该流动的阻抗图,如图 6 所示(图中黑框表示局部阻抗,白框表示沿程阻抗)。将具有图论节点 v_2 属性的局部阻抗转化为图论边 a_2 属性的沿程阻抗。

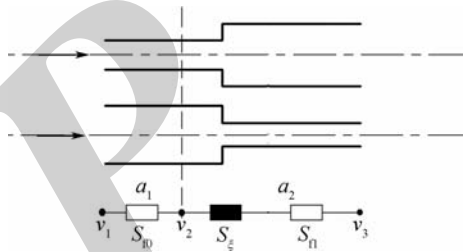


图 6 流动阻抗图

Fig. 6 Impedance of the flow

下面对各典型管路元件推导流动阻力计算公式。

2.3.1 突变截面管路

异径管路的串联形成突扩或突缩流动。元件的几何结构相同,只是流动方式不同,如图 4 所示。两种形式管路的图论模型相同如图 5 所示。根据规定,两种元件的流动阻抗图如图 6 所示,并使用 d_1 管段的参数计算局部损失。

假设实验获得的以 d_0 管段参数表示的突扩和突缩管路的阻力系数的经验关系式分别为

$$\xi_{se} = f_{se}(Re_0, d_1/d_0) \tag{16}$$

$$\xi_{sc} = f_{sc}(Re_0, d_1/d_0) \tag{17}$$

由式(13)可得压力损失

$$\begin{cases} \Delta p_\xi = \xi_{se} \cdot \frac{8\rho Q_0^2}{\pi^2 d_0^4} \\ \Delta p_\xi = \xi_{sc} \cdot \frac{8\rho Q_0^2}{\pi^2 d_0^4} \end{cases} \tag{18}$$

当使用 d_1 管段参数计算局部损失压降

$$\begin{cases} \Delta p_\xi = \xi'_{se} \cdot \frac{8\rho Q_1^2}{\pi^2 d_1^4} \\ \Delta p_\xi = \xi'_{sc} \cdot \frac{8\rho Q_1^2}{\pi^2 d_1^4} \end{cases} \tag{19}$$

由能量守恒,即式(18)与式(19)相等得

$$\begin{cases} \xi'_{se} = \xi_{sc} \frac{d_1^4}{d_0^4} \\ \xi'_{sc} = \xi_{sc} \frac{d_1^4}{d_0^4} \end{cases} \quad (20)$$

以 d_1 管段参数表示的局部阻抗分别为

$$\begin{cases} S_{\xi} = \frac{8\rho}{\pi^2 d_1^4} \xi'_{se} \\ S_{\xi} = \frac{8\rho}{\pi^2 d_1^4} \xi'_{sc} \end{cases} \quad (21)$$

则流体经过突变截面管路的总损失压降为

$$\Delta p = \Delta p_{f1} + \Delta p_{\xi} + \Delta p_{f2} = S_{f0} Q_0^2 + (S_{\xi} + S_{f1}) Q_1^2 \quad (22)$$

实现了将节点属性的局部损失并入 d_1 管路中,并用 d_1 管路的参数计算局部损失压降。

2.3.2 三通管

三通管路的共存在四种流动形式,如图 7 所示。本文只考虑前两种形式,其图论模型相同,如图 8 所示。流动的阻抗如图 9 所示。

对图 10 所示的三通形式,0 为流入管段,1 为

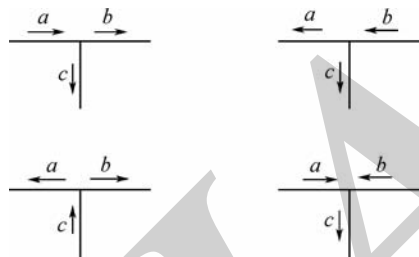


图 7 三通管流动形式

Fig. 7 Flow patterns of T pipe

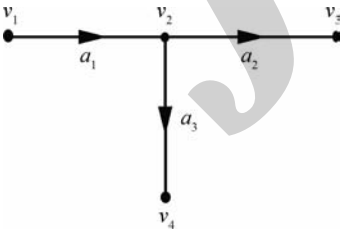


图 8 三通管图论模型

Fig. 8 Graph theory model of T pipe

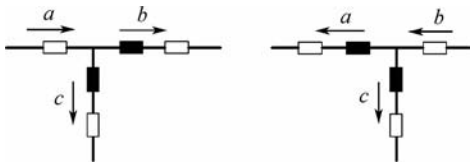


图 9 三通管流动阻抗图

Fig. 9 Flow impedance of T pipe

分流支管,2 为分流直管,张斌^[22]对伯努利方程的应用扩展进行研究,发现对于该情况,仍然可以使用单位重量的伯努利方程。石喜等^[20]对 $d_0 = d_2$ 的 PVC 三通管的研究表明,三通管段的阻力系数与 0 管段的雷诺数、1 管段与 0 管段的流量比和 1 管段与 0 管段的直径比有关。

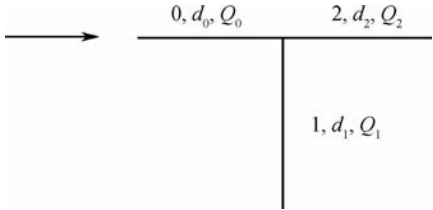


图 10 三通管路示意图

Fig. 10 Schematic drawing of T pipe

针对 $d_0 = d_2$ 的三通管路,定义如下参数:

- 1) ξ_{01}, ξ_{02} 分别为以 0 管段参数为参考的从 0 流向 1 和 0 流向 2 的局部阻力系数。
- 2) ξ_1, ξ_2 为分别以 1 管段和 2 管段参数计算的局部损失系数。
- 3) $\bar{q} = Q_1/Q_0, \bar{d} = d_1/d_0$ 分别为三通节点的流量比和管径比。
- 4) Re_0 为以 0 管段参数计算的雷诺数。

假设由实验获得局部阻力系数关系式

$$\xi_{01} = f_{01}(Re_0, \bar{q}, \bar{d}) \quad (23)$$

$$\xi_{02} = f_{02}(Re_0, \bar{q}, \bar{d}) \quad (24)$$

以 0 管段参数计算的 1 管段和 2 管段的局部损失

$$\begin{cases} \Delta p_{\xi 01} = \xi_{01} \cdot \frac{8\rho Q_0^2}{\pi^2 d_0^4} \\ \Delta p_{\xi 02} = \xi_{02} \cdot \frac{8\rho Q_0^2}{\pi^2 d_0^4} \end{cases} \quad (25)$$

分别以 1 管段和 2 管段参数计算各自局部损失

$$\begin{cases} \Delta p_{\xi 01} = \xi_1 \cdot \frac{8\rho Q_1^2}{\pi^2 d_1^4} \\ \Delta p_{\xi 02} = \xi_2 \cdot \frac{8\rho Q_2^2}{\pi^2 d_2^4} \end{cases} \quad (26)$$

由能量守恒,即式(25)等于式(26)得

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_{01} \frac{d_1^4}{d_0^4} \cdot \frac{Q_0^2}{Q_1^2} = \xi_{01} \frac{\bar{d}^4}{\bar{q}^2} & \bar{q} \neq 0 \\ \xi_2 = \xi_{02} \frac{d_2^4}{d_0^4} \cdot \frac{Q_0^2}{Q_2^2} = \xi_{02} \frac{d_2^4/d_0^4}{(1-\bar{q})^2} & \bar{q} \neq 1 \end{cases} \quad (27)$$

管段 1 和管段 2 的局部阻抗分别为

$$\begin{cases} S_1 = \frac{8\rho\xi_1}{\pi^2 d_1^4} \\ S_2 = \frac{8\rho\xi_2}{\pi^2 d_2^4} \end{cases} \quad (28)$$

流经三通管后,局部损失压降分别为

$$\begin{cases} \Delta p_{\xi 01} = S_1 Q_1^2 \\ \Delta p_{\xi 02} = S_2 Q_2^2 \end{cases} \quad (29)$$

从而实现将局部损失并入各自管路并用该管路的参数进行阻力计算。

3 网络管路稳态流动计算模型

网络管路的流动计算的图论方法主要有解环方法法(loop method)、解节点方程法(node method)和解管段流量法(element method)。这三种方法的基本方程均是非线性方程,需要迭代求解,迭代方法有 hardy-cross 法、newton-raphson 法和 liner theory 法^[1,4,6]。本文采用解节点方程法(node method),迭代方式采用 liner theory 法。

计算模型的基本方程为连续性方程和能量方程。当采用节点分析法时,能量方程为管段压降方程。假设有 p 个节点, q 根管段的单个定压点的网络管路。

3.1 节点连续性方程

对于管网中的任何一个节点,流入节点的流量应该等于流出节点的流量,即

$$\sum_{a_j \in inc^+(v_i)} Q_{a_j} - \sum_{a_j \in inc^-(v_i)} Q_{a_j} - Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (30)$$

式中 Q_{a_j} 为管道 a_j 中的流量; Q_i 为节点 i 的源项或汇项。源项流体流出管网,为负值;汇项流体流入管网,为正值。其矩阵形式为

$$BQ_B = Q \quad (31)$$

式中 Q_B 为管段流量的列向量, Q 为节点源、汇项列向量。

当选择一个参考节点,从该方程中去除该节点后得到连续性方程为

$$B_i Q_B = Q_i \quad (32)$$

式中 Q_i 为除参考节点的其他节点源、汇项列向量。

3.2 管段压降公式

在稳态流动中,管段损失等于管段两端总压降。对于管网中任一管段 j ,管段的起始节点为 i ,终止节点为 k 。其管段损失 $\Delta p_{j,loss}$ 可表示为

$$\Delta p_{j,loss} = \Delta p_{ji} + \Delta p_{jk} = (S_{ji} + S_{jk})Q_j^2 = S_j Q_j^2 \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (33)$$

当考虑流动方向时,式(33)应改写为

$$\Delta p_{j,loss} = \Delta p_{ji} + \Delta p_{jk} = (S_{ji} + S_{jk})|Q_j|Q_j \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (34)$$

当值为负时,表示计算流量流向与假定方向相反。对于不存在局部阻抗的管路, $S_{jk} = 0$ 。

管段两端的总压降 Δp_j 为

$$\Delta p_j = p_i - p_k; \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (35)$$

所以

$$\Delta p_{j,loss} = \Delta p_j \quad (36)$$

式(35)和式(36)用矩阵表示为

$$B_i^T p = \Delta p \quad (37a)$$

$$\Delta p = \Delta p_{loss} \quad (37b)$$

式中 B_i^T 为基本关联矩阵的转置, p 为节点相对参考点压力列向量, Δp 为管段两端总压降列向量, Δp_{loss} 为管段损失列向量。

3.3 边界条件

对于管路系统设计的第一类问题,已知管路的几何结构和进口流量。对于单定压点的管路系统,隐含各出口处流体的静压相同(当动压头不大时,可简化为总压相同)。因此,边界条件为

$$\begin{cases} m_{in} = m_{given} \\ p_{i,out} = p_e \end{cases} \quad (38)$$

式中 m_{in} 为进口质量流量, m_{given} 为给定的进口质量流量数值, $p_{i,out}$ 为第 i 个出口静压, p_e 为管路出口的环境压力。

3.4 经验公式录入

基本管路单元的流动损失推导中,均假设一定形式的流动损失通用公式。建立具体的网络管路稳态流动计算模型时,需要录入具有通用公式形式(即包括其中的影响因素)的具体的流动损失经验公式。可以由文献、实验或数值模拟等方式得到。这些公式的准确性及适用性将直接影响计算结果。

3.5 迭代格式

由于管段压降方程为关于管段流量的非线性方程,采用 liner theory 法进行迭代求解。

令

$$r_{jj} = S_j |Q_j|; \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (39)$$

式中 r_{jj} 为 $q \times q$ 矩阵 r 的对角线上元素,其余元素为 0。则

$$\Delta p_{loss} = rQ_B \quad (40)$$

设

$$c_{jj} = \frac{1}{r_{jj}} = \frac{Q_j}{\Delta p_{j,loss}} = \frac{Q_j}{\Delta p_j} \quad (41)$$

所以

$$Q_j = c_{ji} \Delta p_j$$

(42)

矩阵形式为

$$\boldsymbol{Q}_B = \boldsymbol{c} \Delta \boldsymbol{p}$$

(43)

式中 $\boldsymbol{c}$ 矩阵为

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1 |Q_1|} & & & \\ & \frac{1}{S_2 |Q_2|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{S_q |Q_q|} \end{bmatrix}$$

式中阻抗 S_j 同时包括沿程阻抗和局部阻抗。

将式(43)代入式(32)得

$$\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{c} \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}_f$$

(44)

将式(37)代入式(44)得

$$\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{c} \boldsymbol{B}_i^T \boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}_f$$

(45)

式(45)为以节点压力为自变量的连续性方程,且为线性表达式。由于矩阵 $\boldsymbol{c}$ 中含有管段流量向量 $\boldsymbol{Q}_B$,因此需要迭代计算。迭代流程如图 11 所示。采用高斯-赛德尔迭代法求解压力列向量 $\boldsymbol{p}^{[23-24]}$ 。

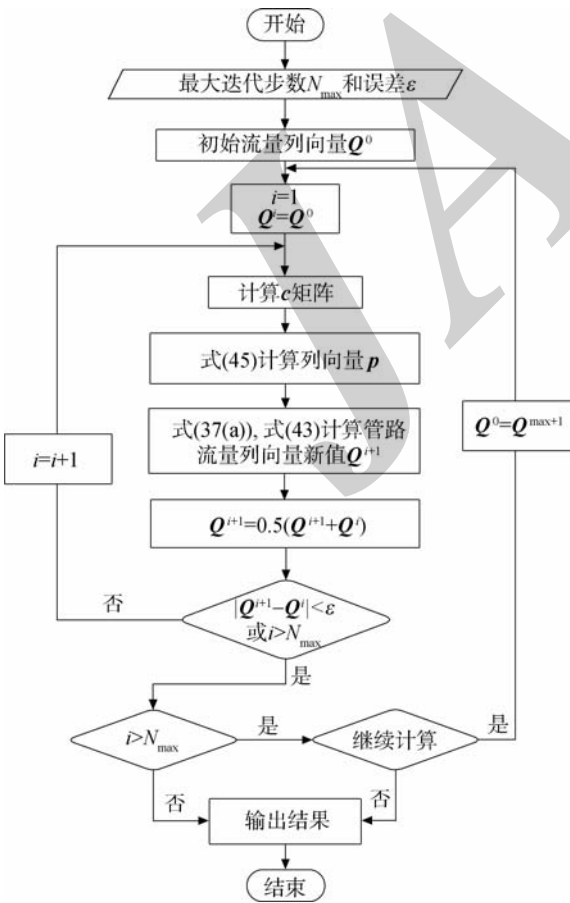


图 11 迭代流程图
Fig.11 Iterative flow chart

4 应用算例

采用 VB. NET 语言编写计算软件,界面如图 12 所示。由简单的管路元件根据图论模型组装出实际的管路系统,然后,开展稳态流动计算。

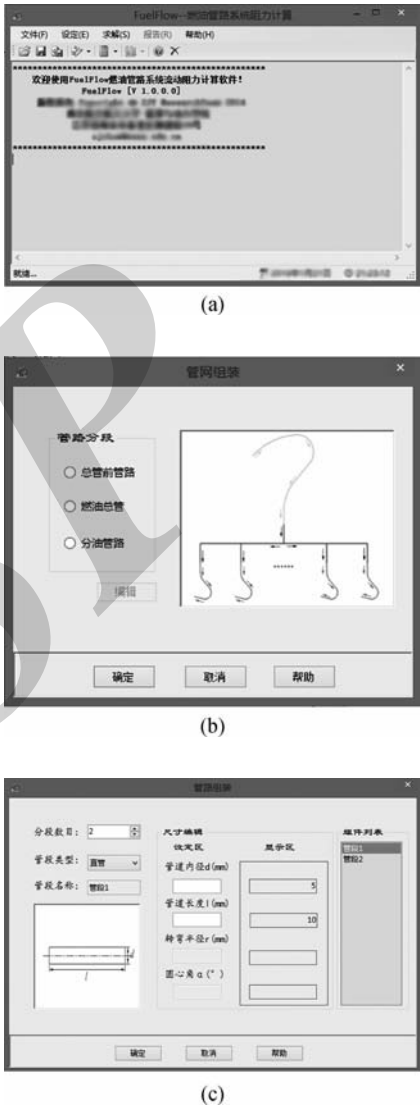


图 12 自编程计算软件界面
Fig.12 Interfaces of the self-programming software

软件中,计算模型录入的基本管路单元的流阻经验公式由叶大海^[25]经数值模拟整理得到并通过实验验证。由于算法推导中不依赖于具体的经验公式,因此,算法的验证,采用由数值模拟方法得到的基本管路单元的经验公式,对实际管路进行计算;同时,对该管路开展数值模拟;然后对比两者的计算结果。若两者的趋势一致且误差满足要求,则可以认为算法是合理的。

图 13 为简化的某航空发动机燃油总管模型,具有一定的几何对称性,尺寸如图 14 所示。

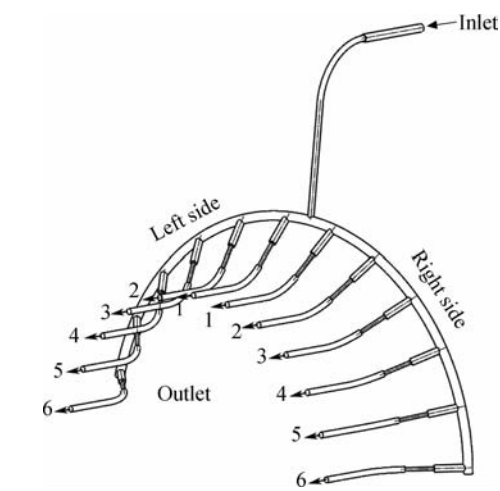


图 13 总管模型

Fig. 13 Sketch map of a manifold model

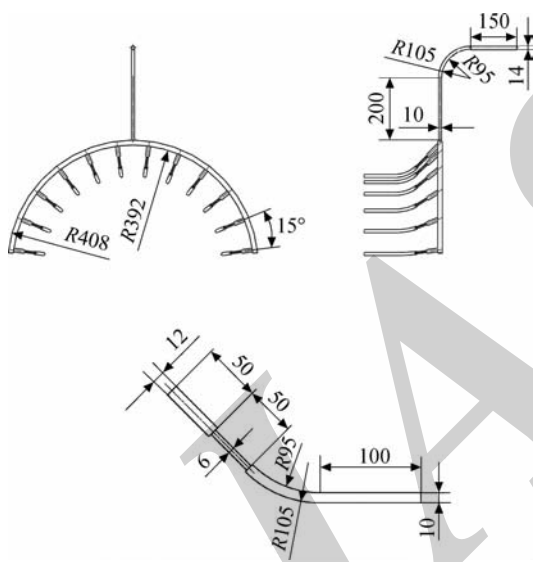


图 14 总管模型尺寸(单位:mm)

Fig. 14 Dimensions of the manifold model (unit:mm)

管路由直管、弯管、三通、突扩管路和突缩管路组成。对该管路进行传统的流量分配计算(只考虑沿程损失)、本文提出的同时考虑沿程和局部损失方法的流量分配计算和数值模拟计算。工程计算中假设管路两侧流量对称分布。

采用 Fluent 软件开展管路的数值计算。standard $k-\epsilon$ (SKE) 模型^[10-12]对管路流量分配的预测比较准确且与实验测量的规律分布一致。因此,文中采用 standard $k-\epsilon$ 模型进行流量分配计算,同时采用 realizable $k-\epsilon$ 和湍流模型 Reynold stress model(RSM)与其进行对比。壁面函数采用 scalable wall function。进口边界采用 mass-flow-inlet,质量流量为 2.619 33 kg/s;出口边界采用 pressure-outlet,静压为 101325 Pa。流体为

航空煤油,密度为 772.7 kg/m^3 ,动力黏度为 $0.8789\text{ g/(m}\cdot\text{s)}$ 。采用基于压力的稳态求解器,semi-implicit method for pressure linked equation(SIMPLE)算法进行压力-速度耦合;对流项的离散格式采用二阶迎风格式。模型计算网格如图 15 所示,模型计算采用 ICEM 软件进行非结构化网格划分,网格全局尺寸为 1 mm,网格单元总量为 4131839。

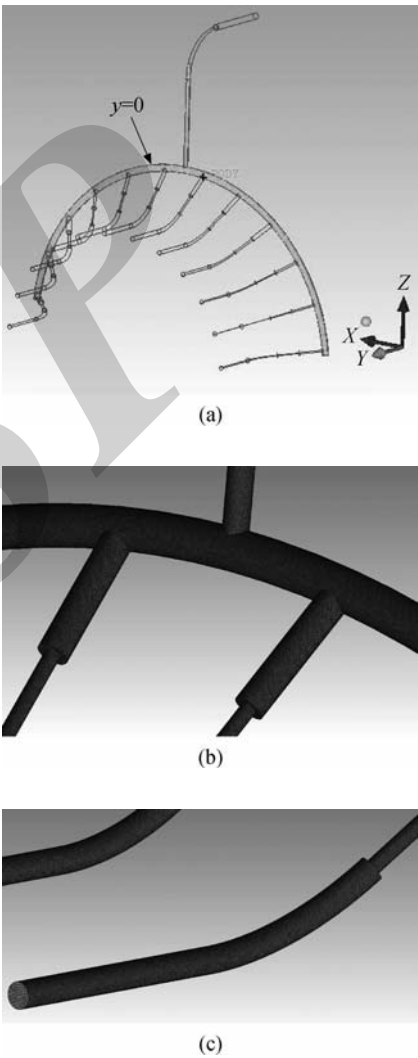


图 15 模型计算网格示意图

Fig. 15 Computational grid for model

三种湍流模型的数值模拟结果如图 16 所示。由图可见,计算结果分布规律一致,数值上存在略微差异。

以 realizable $k-\epsilon$ 模拟结果作为参考标准,三种方法计算得到的流量分配及计算误差分布如图 17(a)和图 17(b)所示。由图 17(a)可见,数值计算结果中,两侧处在对称位置的出口流量基本相等,表明工程算法中假设两侧流量对称分布是合

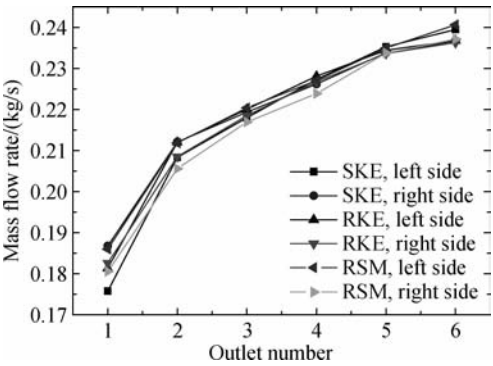
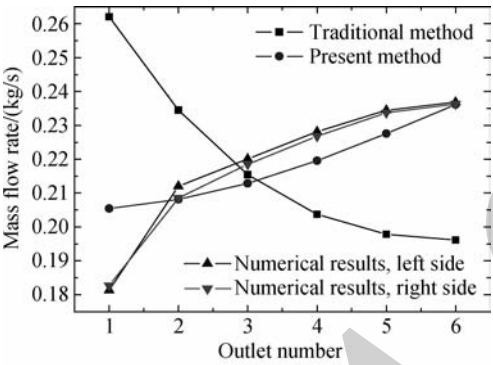
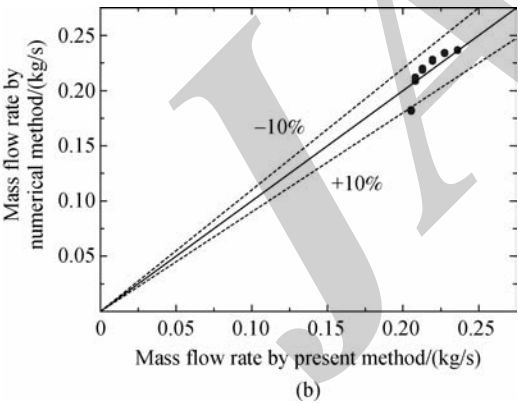


图 16 三种湍流模型数值结果对比

Fig. 16 Comparison of numerical results with three different turbulent models



(a)



(b)

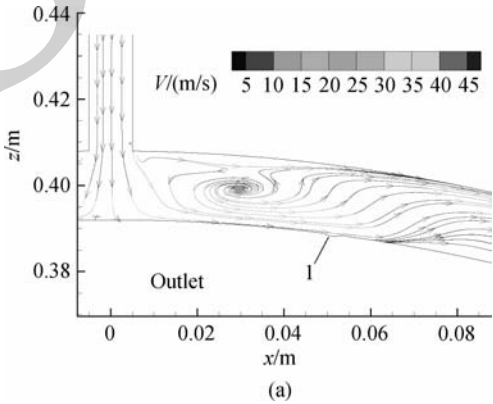
图 17 总管流量分配与误差

Fig. 17 Flow distribution and error of manifold

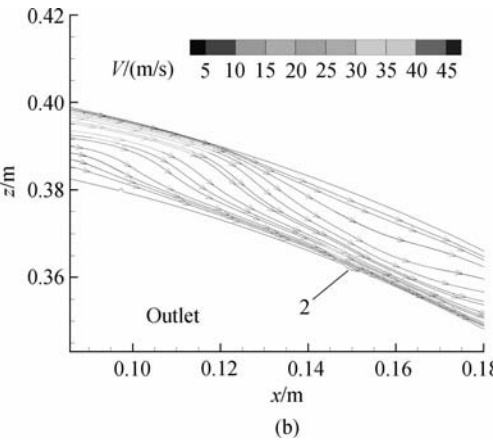
理的;当只考虑沿程损失而忽略局部损失时,各个出口流量随着流体流经路程的增加逐渐递减;当采用同时考虑沿程和局部损失的计算方法后,得到的流量分布规律与数值计算结果相同,但 1 号出口结果偏差较大。这是由于所有的三通分支均采用相同的经验公式,而该公式是在三通管路进口段较长且来流均匀的条件下获得。1 号出口对应的三通管路与其他三通相比存在两点不同:一是上游进口流体冲击作用,产生旋涡,来流不均

匀,如图 18(a)所示;而其他三通分支管路来流相对均匀,如图 18(b)所示;二是三通管路的进口段较短,整流效果减弱。而由于流体惯性,上述两点会减弱流体向分支侧的分流,即分支侧的损失系数增大。经验公式中并没有很好的反映这两个因素的影响,计算的损失系数偏小,从而使得该出口流量偏大,而其他出口的流量偏低。关闭总管模型的 1 号出口,即将边界条件由 pressure-outlet 改为 wall,使用 realizable $k-\epsilon$ 湍流模型再次进行模拟。此时,2 号出口对应的三通进口段长度较长,受冲击流体影响较小。流量分配结果对比如图 19 所示。两者结果对比吻合很好。

由此可见,在局部损失占主导的管路中,流量的分配计算不能忽略局部损失的影响。只考虑沿程损失,不能准确预测管路的流量分配;本文提出的处理方法可以使得流量分配的估算规律与数值模拟规律一致,且经验公式的选择可以保证与数值结果差别在 $\pm 10\%$ 以内,可以满足工程计算的需求,说明方法合理。当所采用的经验公式合适时,算法的计算精度较高。



(a)



(b)

图 18 $y=0$ 截面速度流向图

Fig. 18 Streamlines of velocity in $y=0$ plane

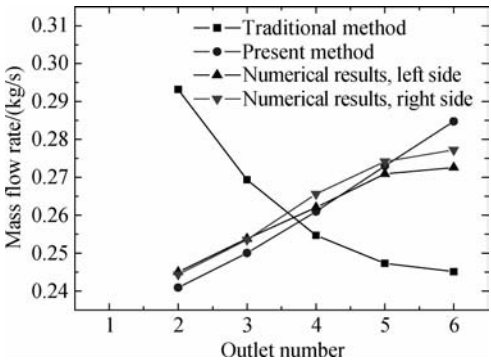


图 19 关闭 1 号分支管后流量分配对比
Fig. 19 Flow distribution with closed outlet 1

5 结 论

- 1) 当管路中包含较多产生较大局部损失的管路元件时,管路流量分配的计算中不可忽略局部损失,其直接影响流量的分配规律。传统的流量计算方法不能获得正确的流量分配。
- 2) 本文提出的同时考虑沿程和局部损失的计算方法,可以考虑局部损失对流量分配的影响,其估算的流量分配结果与数值计算结果相比,燃油流量的分布规律趋势一致,差别在±10%的以内。
- 3) 算法的经验公式录入环节,需考虑实际管路中与经验公式获得的时流体条件可能的差异,否则计算结果误差可能较大。

致谢:

感谢沈阳发动机研究所赵传亮、呼姚在研究过程中给予的帮助与支持。

参考文献:

[1] 祁祖尧. 基于图论的给水管网水力计算方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2008.
QI Zuyao. Research on hydraulic computation method of the water distribution network based on the graph theory[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2008. (in Chinese)

[2] 王国明, 詹宇胜, 叶灵. 环状给水管网节点流量算法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2003, 26(6): 1208-1212.
WANG Guoming, ZHAN Yusheng, YE Ling. Algorithm for node outflow of water supply looped network[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2003, 26(6): 1208-1212. (in Chinese)

[3] 龙翼. 图论在排水管网优化方面的应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2003.
LONG Yi. Application of graph theory in sewer system plan optimization[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003. (in Chinese)

[4] 梅国恒, 贾玉贵. 环状给水管网计算方法的研究[J]. 中国

科技博览, 2009(12): 194-195.

MEI Guoheng, JIA Yugui. Study on hydraulic computation for water supply looped network[J]. China Science and Technology Review, 2009(12): 194-195. (in Chinese)

[5] 陈钢军. 环状管网水力计算的图论方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(4): 418-422.
CHEN Gangjun. A method of graph theory for calculating water power in the ring-formed pipe network[J]. Journal of Huaqiao University (Natural Science), 1994, 15(4): 418-422. (in Chinese)

[6] SARBU I. Nodal analysis models of looped water distribution networks[J]. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 2011, 6(8): 115-125.

[7] BRKIC D. Gas distribution network topology problem[J]. Mathematic Balkanica, 2012, 26: 277-284.

[8] 周庭阳, 张红岩. 电网络理论: 图论方程综合[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.

[9] 景江红. 旁路局部损失对管网水力计算的影响的研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2005.
JING Jianghong. The study of influence to hydraulic computation of pipe network on the bypass local resistance losses[D]. Chongqing: Chongqing University, 2005. (in Chinese)

[10] 钟贤和, 张力, 伍成波. 较大流量多支管流量分配实验与数值模拟[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2006, 29(1): 45-48, 60.
ZHONG Xianhe, ZHANG Li, WU Chengbo. Experiments and numerical simulation of flow distribution with larger flux in multi-branch pipe[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2006, 29(1): 45-48, 60. (in Chinese)

[11] 刘进, 刘平元, 陈朝松, 等. 电站锅炉三通集箱系统流量分配的数值模拟[J]. 动力工程, 2009, 29(6): 26-31.
LIU Jin, LIU Pingyuan, CHEN Chaosong, et al. Numerical simulation on flow distribution in tee-junction header system of utility boilers[J]. Journal of Power Engineering, 2009, 29(6): 26-31. (in Chinese)

[12] 缪斌. 并联管组流量分配的模拟计算和试验研究[D]. 西安: 西安石油大学, 2011.
MIAO Bin. Simulation and experimental research on flow distribution in the manifolds[D]. Xi'an: Xi'an Shiyou University, 2011. (in Chinese)

[13] 李明哲, 金俊, 石瑞银. 图论及其算法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.

[14] 梁德旺. 流体力学基础[M]. 北京: 航空工业出版社, 1998.

[15] 唐晓寅. 工程流体力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2007.

[16] NIKURADSE J. Laws of flow in rough pipes[R]. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Memorandum, 1992.

[17] MCKEON B J, SWANSON C J, ZAGROLA M V, et al. Friction factors for smooth pipe flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2004, 511(1): 41-44.

[18] MCKEON B J, ZAGROLA M V, SMITS A J. A new fric-

tion factor relationship for fully developed pipe flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2005, 538(538): 429-443.

[19] 王桂秋. 管道系统中局部阻力计算[J]. 管道技术与设备, 2000(2): 5-7.

WANG Guiqu. Calculation of local resistance force in pipe-line system[J]. Pipeline Technique and Equipment, 2000 (2): 5-7. (in Chinese)

[20] 石喜, 吕宏兴, 朱德兰, 等. PVC 三通管水流阻力与流动特性分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(1): 73-79.

SHI Xi, LÜ Hongxing, ZHU Delan, et al. Flow resistance and characteristics of PVC tee pipes[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2013, 44 (1): 73-79. (in Chinese)

[21] 李兴泉, 鞠秀峰, 田贯三. 燃气管道局部阻力的当量长度法计算[J]. 煤气与热力, 2009, 29(6): B9-B13.

LI Xingquan, JU Xiufeng, TIAN Guisan. Calculation of local resistance of gas pipeline by equivalent length method [J]. Gas and Heat, 2009, 29(6): B9-B13. (in Chinese)

[22] 张斌. 伯努利方程的扩展讨论[J]. 塔里木大学学报, 2008, 20(4): 32-33.

ZHANG Bin. The extension discussion of Bernoulli equation[J]. Journal of Tarim University, 2008, 20(4): 32-33. (in Chinese)

[23] CHAPRA S C, CANALE R P. 工程数值方法[M]. 6 版. 于艳华, 傅效群, 赵红宇, 等, 译. 北京: 清华大学出版社, 2010.

[24] 李开宁. 数值计算方法引论[M]. 北京: 航空工业出版社, 2002.

[25] 叶大海. 航空发动机燃油管路流阻特性研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2015.

YE Dahai. Study on flow resistance characteristics of fuel supply line in aeroengine[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2015. (in Chinese)

(编辑: 叶 青)