

三维非平面裂纹扩展参数化模拟方法

李宇飞^{1,2}, 陶海亮¹, 高庆¹, 谭春青¹

(1. 中国科学院工程热物理研究所 轻型动力重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院大学 物理科学学院, 北京 100049)

摘 要: 发展一种基于有限元方法(FEM)的自动模拟三维非平面裂纹扩展的模拟方法。该方法采用参数化建模的方式建立裂纹体,以镶嵌裂纹体的方式在结构中插入裂纹,然后通过有限元计算得到裂纹扩展参量,自动更新裂纹体从而模拟裂纹的扩展过程。通过模拟三个裂纹扩展算例,计算了裂纹扩展循环数,对比试验结果,误差分别为19.5%、16.1%、2.1%。结果表明:该方法能够模拟三维非平面裂纹的扩展并计算扩展寿命,具有一定的精度和适用性。

关键词: 损伤容限; 裂纹扩展; 三维非平面裂纹; 有限元方法; 参数化建模

中图分类号: V231.95

文献标志码: A

Parametric simulation method for 3-D non-planar crack propagation

LI Yufei^{1,2}, TAO Hailiang¹, GAO Qing¹, TAN Chunqing¹

(1. Key Laboratory of Light-duty Gas-turbine, Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China;

2. School of Physical Science,

University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China)

Abstract: An automatic 3-D non-planar crack propagation simulation method based on finite element method (FEM) was developed. This method established cracked block by parametric modeling method, inserted initial crack in structure model by inlaying the cracked block, then acquired crack propagation parameters through FEM analysis; then it automatically updated cracked block to simulate the propagation process of crack. Through the simulation of three crack propagation cases, the crack propagation cycles were calculated; compared with the experimental results, the errors were 19.5%, 16.1%, 2.1% respectively. The results show that this method can simulate non-planar 3-D crack propagation and calculate propagation life with accuracy and applicability.

Key words: damage tolerance; crack propagation; 3-D non-planar crack; finite element method; parametric modeling

材料在生产、加工和使用中会产生缺陷和裂纹^[1],然而根据工程使用经验,相当多构件出现裂纹并不意味着承载功能立即丧失,甚至仍可可靠

服役较长时间^[2]。因此,采用损伤容限的设计方法,能够有效地考虑结构的裂纹扩展寿命,充分利用有裂纹结构的剩余寿命,提高经济性,并可对结

收稿日期: 2016-05-30

基金项目: 中国科学院创新基金(CXJJ-14-S119)

作者简介: 李宇飞(1988—),男,博士生,主要从事结构强度与疲劳研究。

引用格式: 李宇飞,陶海亮,高庆,等. 三维非平面裂纹扩展参数化模拟方法[J]. 航空动力学报,2017,32(12):2888-2895. LI Yufei, TAO Hailiang, GAO Qing, et al. Parametric simulation method for 3-D non-planar crack propagation[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(12): 2888-2895.

构的安全性评估和检修计划的安排提供理论支持。

实际结构中的裂纹一般是形状复杂的三维非平面裂纹,而现行的损伤容限技术主要建立在二维断裂理论的基础之上^[3],因此很难分析实际结构中的裂纹扩展。目前,有限元方法已被大量应用于裂纹扩展的研究中。采用有限元方法描述裂纹,一个核心问题就是如何描述裂纹上下表面的不连续性。有限元方法以裂纹为不连续的边界,可采用节点建模和实体建模两种方式建立包含裂纹的有限元模型。在这方面,国内外开展了一些相关的研究工作。瞿伟廉等^[4]采用实体建模的方法,建立带穿透裂纹结构的有限元模型,与节点建模法相比,减少了划分单元的难度和建模的工作量,容易保证裂纹附近的网格质量。唐俊星和陆山^[2,5]采用相同的建模原理,发展了一套三维裂纹的参数化建模方法,能够比较方便地进行裂纹扩展计算。于培师^[6]采用裂纹子模型的方法,能够对曲线裂纹进行三维参数化建模,并实现了从建模到后处理的全程序控制。齐桂营^[7]研究了(compact tension shear, CTS)试样倾斜裂纹的扩展,采用参数化建模的方式分析三维非平面裂纹的扩展。赵勇铭和宋迎东^[8]采用有限元方法中的奇异单元,研究了夹杂对粉末高温合金裂纹扩展寿命的影响。另外,基于节点建模方式的裂纹扩展方法^[9-12]也被用于分析裂纹扩展,并形成几种适用于工程的三维裂纹扩展软件,结合现有的有限元计算平台,能够分析实际结构中的裂纹扩展。张智轩等^[13]借助三维裂纹扩展软件 FRANC3D 分析了含销钉孔边裂纹轮盘的裂纹扩展,计算了应力强度因子和裂纹扩展寿命,研究了几种形式的裂纹对轮盘寿命的危害。

本文基于 ANSYS 平台下的(ANSYS parametric design language, APDL)语言以及 Matlab 平台,采用参数化实体建模方法建立含裂纹结构的有限元模型,实现裂纹的自动扩展计算,且能够模拟三维非平面裂纹的扩展,可为工程结构的损伤容限研究提供技术支持。

1 带初始裂纹结构的参数化建模

1.1 结构中插入初始裂纹

为分析结构中裂纹的扩展,首先需要建立带有初始裂纹的几何模型。在裂纹的几何描述上,需要两个位置重合的面作为裂纹的上下表面,另外这两个面共用裂纹尖端曲线作为表面的边界,如图 1 所示。

建立带有初始裂纹模型的思路是:将模型分为无裂纹体和裂纹体,裂纹面被包含在裂纹体中,如图 2(a)所示,然后将裂纹体镶嵌在无裂纹体中^[2,4],形成整体模型。另外,为适应不同的对象模型,需要将裂纹体进行处理,使其自由表面具有与对象模型自由表面相同的形状。整个流程为

1) 通过布尔相减运算,从对象模型中去除裂纹体,得到无裂纹体,如图 2(b)所示,另外,由于裂纹上下表面重合,难以表现裂纹体中的裂纹,图中的裂纹采用楔形裂纹表示。

2) 将对象模型与裂纹体进行布尔求交运算,形成具有自由表面的嵌入裂纹体,如图 2(c)所示。

3) 采用布尔相加运算,将具有自由表面的嵌入裂纹体和无裂纹体合并,如图 2(d)所示,完成镶嵌的过程。

采用这种建模方法,能够在 ANSYS 平台下通过参数化建模的方式,实现在复杂对象结构中自动插入初始裂纹。

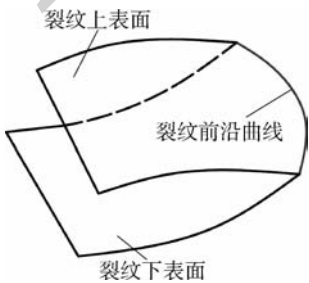


图 1 裂纹的几何描述

Fig. 1 Geometric representation of crack

1.2 含裂纹结构模型的网格划分

采用前面的建模方式,使得裂纹尖端附近具有比较规则的几何形状,有利于提高裂纹附近的网格质量。裂纹尖端附近采用奇异单元进行网格划分,并布置 12 个对称分布的奇异单元^[14],如图 3 所示。整个裂纹前沿,考虑计算效率和单元形状比,划分为 50~100 个单元^[2]。在本文中,裂纹体和非裂纹体采用 Solid 186 单元划分网格。为了得到裂纹尖端的奇异单元,首先在裂纹体的扫描截面上,对裂尖点设置 1/4 节点奇异单元参数,单元尺寸设定为裂纹特征长度尺寸的 2%~6%^[15],然后采用 Mesh 200 单元划分截面的网格,最后将所生成的面网格沿裂纹前沿方向扫描形成三维单元。

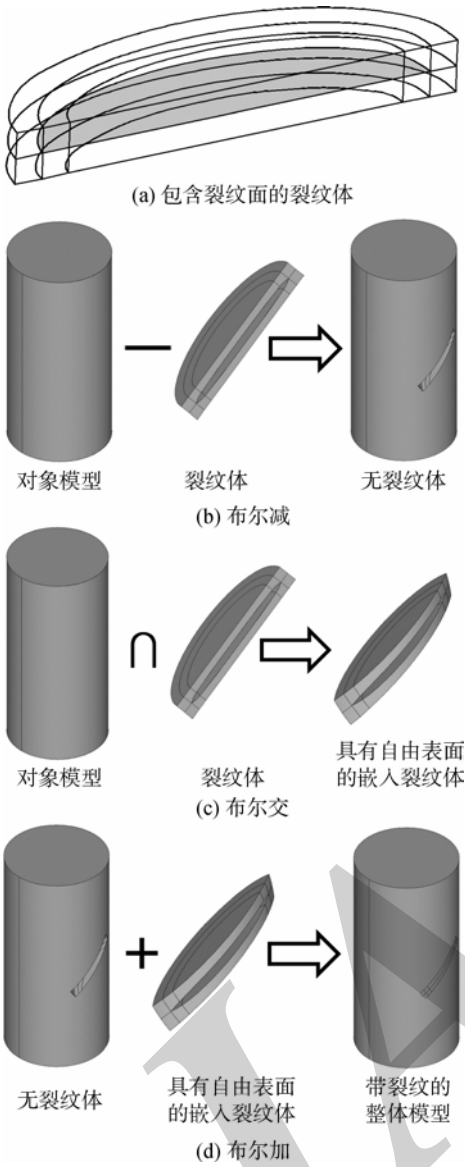


图 2 模型中插入初始裂纹
Fig. 2 Insert initial crack into model

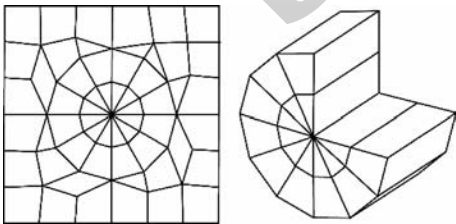


图 3 裂纹尖端附近网格
Fig. 3 Mesh near the crack tip

2 裂纹的三维扩展计算方法

2.1 应力强度因子计算

采用前面的建模方式,裂纹附近的单元排布

规则,能够保证应力强度因子的计算精度。本文采用交互积分法(又称 M 积分)^[16-17] 计算裂纹的应力强度因子,其优点是具有较高的计算精度,能够适用于复杂的三维裂纹,可同时计算 I、II、III 型应力强度因子。

2.2 三维非平面裂纹扩展计算

2.2.1 裂纹的局部扩展方向

三维非平面裂纹扩展模拟采用多自由度方法^[18],将裂纹前沿离散成若干个节点,在各节点处计算裂纹的局部扩展方向。裂纹的局部扩展方向,根据各节点处的应力或能量准则,建立与应力强度因子的关系。Lazarus 等^[19] 结合试验和数值计算,对比了几种常用的计算裂纹局部扩展方向的方法,结果显示这几种方法在计算裂纹扩展方向上并无太大的差别。本文采用其中相对较为简单的,基于最大张应力准则的计算方法,计算裂纹局部扩展方向,表达式为^[19]

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (1)$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{3K_{II}^2 + \sqrt{K_I^4 + 8K_I^2 K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right) \quad (2)$$

2.2.2 裂纹的局部扩展距离

计算裂纹的扩展距离需要用到裂纹扩展速率表达式,本文采用 Paris 公式

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3)$$

式中 C, m 为通过试验确定的材料参数;对于复合模式裂纹的扩展, ΔK 为等效应力强度因子变化幅度。

采用多自由度方法描述裂纹的扩展,一般来说,裂纹前沿各节点处的扩展距离不同,但经历的载荷循环数相同。本文在裂纹扩展计算时,首先指定扩展步长,即裂纹前沿指定节点的扩展距离(对应于应力强度因子中值的节点或指定位置的节点),然后通过各点载荷循环数相同的关系,推得其他各点的裂纹扩展距离,表达式如下:

$$\Delta a_i = \frac{(\Delta K_i)^m}{(\Delta K_0)^m} \Delta a_0 \quad (4)$$

式中 $\Delta a_0, \Delta K_0$ 为指定节点的扩展距离、应力强度因子; $\Delta a_i, \Delta K_i$ 为其他节点处的扩展距离和应力强度因子,这样就得到了裂纹前沿各节点处的扩展距离。裂纹扩展步长的确定需要综合考虑计算精度与计算效率,根据相关的研究^[13,20],本文中的扩展步长定为初始裂纹尺寸的 1/10 到 1/20,裂纹扩展步长太小会导致数值计算结果出现振

荡,产生较大误差。

2.2.3 裂纹前沿的拟合与延伸

计算出裂纹的局部扩展方向和扩展距离后,可以得到扩展后的裂纹前沿各节点的位置。这些点往往带有一些数值计算的“噪声”,另外,为了建模的需要,需要将裂纹前沿延伸至结构自由表面外,因此需要对裂纹位置进行拟合^[13]。在裂纹扩展计算软件,如 FRANC3D 中,采用多项式拟合等拟合方式,对裂纹前沿曲线进行拟合^[21]。因此本文采用多项式拟合的方式,通过各节点的位置坐标,计算拟合后的位置,并进行适当的外推将裂纹延伸至表面外,最后在 ANSYS 中采用 B 样条曲线将这些拟合点连成裂纹前沿曲线^[7]。

2.3 三维非平面裂纹的扩展建模

对于三维平面裂纹,由于前面各步扩展的裂纹面都位于裂纹扩展平面内,从而被最后一步扩展的裂纹面所覆盖,因此建模时只需针对最后一步扩展的裂纹前沿建立裂纹体,更新整体模型。而对于三维非平面裂纹的扩展建模,前面的裂纹面都不在同一个平面内,因此裂纹面由各扩展子步形成的裂纹面连接而成,组成一个较为复杂的曲面。针对三维非平面裂纹建立裂纹体,需要将裂纹面完全包含在内,并且适合用参数化建模的方式自动建模。本文中的方法能够满足这两方面的要求,具体的建模流程如下:

- 1) 读取裂纹前沿点坐标并建点,采用 B 样条曲线连接各点,生成裂纹前沿曲线。
- 2) 在裂纹前沿各点的局部坐标系中,依次建立 9 个点(位置编号为 1~9),分别位于以裂尖点为中心的 正方形顶点和各边中点(8 和 9 重合,对应裂纹的上下面),如图 4(a)所示,然后将所有位置编号相同的点用 B 样条曲线连接,得到 9 条等距曲线。
- 3) 由 9 条等距曲线,采用自底向上的建模方法,建立包裹裂纹前沿的 4 个体,如图 4(b)所示。
- 4) 对于之前各扩展子步的裂纹前沿,读入各点坐标并建点,采用 B 样条曲线连线,并将各曲线端点相连,形成闭环,围成曲面,组成裂纹面并复制,然后建立各裂纹前沿曲线的上下两条等距线(对应图 4(c)中 1 和 2),最后采用自底向上的建模方法建立各部分裂纹体,组成总的裂纹体,如图 4(d)所示。
- 5) 将裂纹体嵌入无裂纹体中并划分网格,得到最终的有限元模型。裂纹体网格如图 4(e)所示。

示,裂纹前沿附近的网格加密,并采用奇异单元包裹裂纹前沿曲线,其余部分的网格采用适当大小,以减小模型的规模。

裂纹体建模过程的主要流程如图 5 所示。

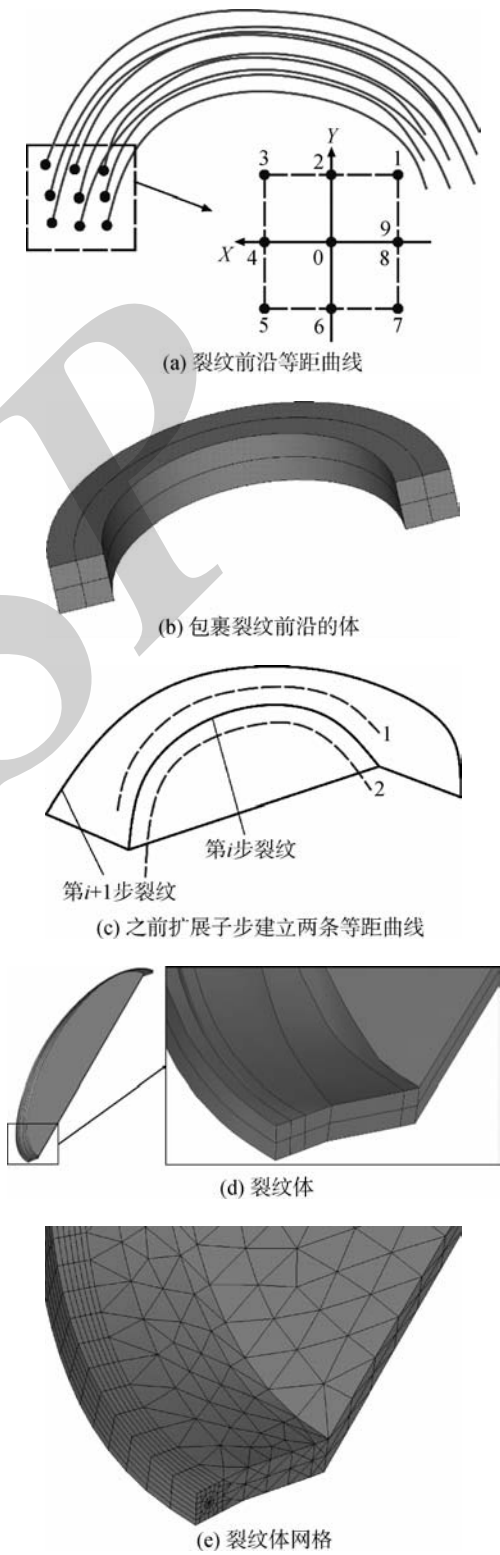


图 4 三维非平面裂纹体建模过程
Fig. 4 Modelingprocess of 3-D non-planar cracked block

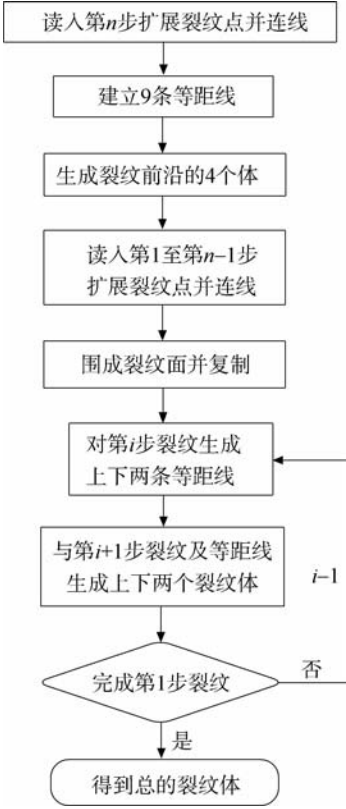


图 5 裂纹体建模流程

Fig. 5 Modeling process of cracked block

2.4 裂纹扩展寿命计算

由于计算载荷循环数时,对裂纹扩展速率表达式进行了离散,因此需要在计算裂纹扩展寿命时进行修正,以减小误差。

因为裂纹扩展的距离相对裂纹尺寸较小,在第 i 到第 $i+1$ 个扩展子步中,可以采用线性近似,认为应力强度因子变化幅 ΔK 与子步内的扩展距离 Δa 为线性关系,得到表达式

$$\Delta K = \Delta K_{i,j} + \frac{a}{\Delta a} (\Delta K_{i+1,j} - \Delta K_{i,j}) \quad (5)$$

第 i 到第 $i+1$ 个扩展子步间的裂纹扩展寿命可以通过数值积分计算,对于 Paris 公式,具体可表示为

$$N_{i,j} = \int_0^{\Delta a} \frac{da}{C \left[\Delta K_{i,j} + \frac{a}{\Delta a} (\Delta K_{i+1,j} - \Delta K_{i,j}) \right]^m} \quad (6)$$

式中 j 为选定的计算寿命的节点编号。最后对各子步求和,得到总的裂纹扩展寿命,即

$$N = \sum_{i=1}^p N_{i,j} \quad (7)$$

式中 p 为扩展子步总数。

3 三维裂纹扩展算例验证

3.1 半椭圆表面裂纹的平面扩展

本算例模拟了半椭圆表面裂纹在平板中的扩展,并与试验结果^[22]进行对比(试样编号 PCA15)。平板高为 200 mm,宽为 100 mm,厚为 9.6 mm,材料为 7075-T6 铝合金,受到的最大拉伸载荷为 150 MPa,载荷比为 0.1,裂纹扩展速率公式采用 Paris 公式,根据文献[22]中的参数, $C=2.29 \times 10^{-7}$, $m=2.88$ 。初始裂纹的尺寸为 $a=2.88$, $b=7.2$,裂纹面垂直于拉伸载荷方向,裂纹的扩展为平面扩展,扩展后的裂纹位于初始裂纹平面内。裂纹扩展步长取为 0.25 mm,随着裂纹的扩展,裂纹尺寸不断增大,适当增加扩展步长,最后进行 16 步扩展计算。图 6 为模拟计算的裂纹前沿轮廓与试验结果的对比,图 7 为裂纹在短轴与长轴方向的长度比 a/b 的模拟值与试验值的对比,横坐标为短轴长与平板厚度之比 a/t ,可以看出模拟结果与试验结果符合的较好。图 8 为模拟计算的裂纹扩展载荷循环数与试验值的对比,纵坐标为裂纹短轴长,模拟得到的裂纹扩展循环数为 10041,试验值为 8400,误差为 19.5%,模拟值大于试验值。造成这种偏差的原因有:①裂纹扩展速率公式中的参数是由试样的裂纹扩展试验结果拟合得到的,由于数据的分散性,拟合会带来一定的误差;②具体结构中由于材料、加载等因素导致的裂纹扩展固有的分散性。

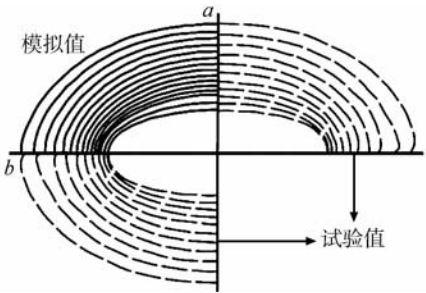


图 6 平板中表面裂纹扩展形状
Fig. 6 Crack shape development of surface crack in plate

3.2 半圆型表面斜裂纹的非平面扩展

本算例模拟了倾角为 45°(初始裂纹面与载荷方向夹角)的半圆型表面斜裂纹在柱体中的扩展,并与试验结果^[23]进行对比。柱体宽、高均为 25.4 mm,厚为 12.7 mm,材料为 7075-T73 铝合

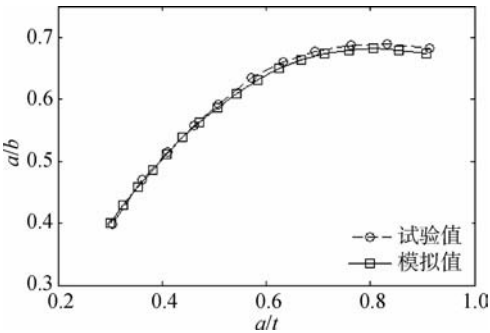


图 7 裂纹扩展特征尺寸比值

Fig. 7 Crack propagation characteristic aspect ratio

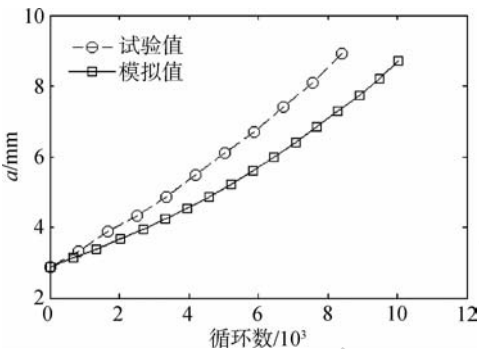


图 8 平板中表面裂纹裂纹扩展循环数

Fig. 8 Cycle count of surface crack propagation in plate

金,受到的最大拉伸载荷为 70.64 kN,载荷比为 0.7,初始裂纹半径为 1.27 mm,如图 9 所示。斜裂纹的扩展为复合模式,裂纹扩展方向不再位于初始裂纹面内,其等效应力强度因子的计算公式为^[23]

$$\Delta K_{eq} = \sqrt{\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2 + \Delta K_{III}^2} \quad (8)$$

裂纹扩展速率公式采 Paris 公式,参数为 $C=1.17 \times 10^{-7}$, $m=3.7$,对应的 da/dN (单位: mm/cycle), ΔK_{ef} (单位: $\text{MPa} \sqrt{\text{mm}}$)^[24]。裂纹扩展步长取为 0.05 mm,随着裂纹的扩展,裂纹尺寸不断增大,适当增加扩展步长,最后进行 11 步扩展计算。图 10 为模拟计算的裂纹扩展循环数与试验结果的对比,纵坐标代表裂纹的特征尺寸,计算结果与试验结果的趋势一致,模拟得到的裂纹扩展循环数为 168 609,试验值为 200 921,误差为 16.1%。图 11 为模拟得到的裂纹形状,可以看出扩展的裂纹与初始裂纹不在一个面内,扩展方向与初始裂纹面呈一定的角度,具有非平面裂纹的特征。模拟计算的裂纹扩展循环数与试验结果有一定偏差的原因主要为:①裂纹扩展速率公式中参数的拟合误差;②扩展中裂纹的复合形式会发生变化,计

算复合应力强度因子的公式很难反映这种变化;③裂纹扩展固有的分散性。

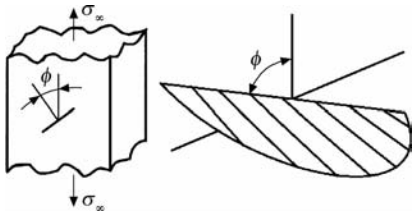


图 9 试样与裂纹^[23]

Fig. 9 Specimen and crack^[23]

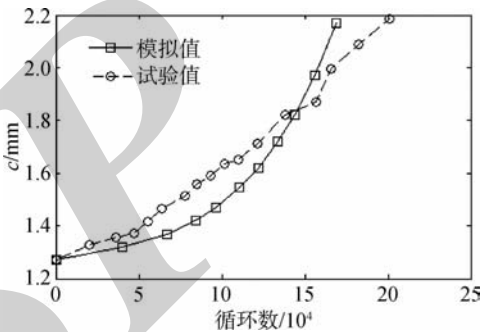


图 10 半椭圆表面斜裂纹扩展循环数

Fig. 10 Cycle count of inclined semi-ellipse surface crack propagation

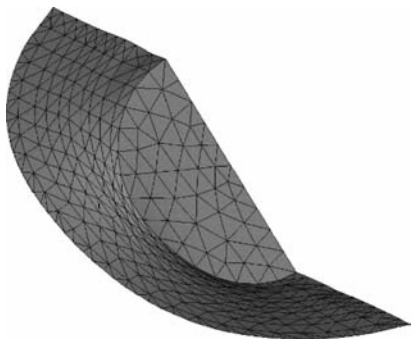


图 11 裂纹扩展模拟结果

Fig. 11 Crack propagation simulation result

3.3 贯穿斜裂纹的非平面扩展

本算例模拟了贯穿斜裂纹在 CT(compact tension)试样中的扩展,并与试验结果^[25]进行了对比(编号为 20~45)。CT 试样材料为 7017 铝合金,最大拉伸载荷为 10 kN,载荷比为 0.2,贯穿裂纹初始长度为 20 mm,倾角为 45°(初始裂纹面与载荷方向夹角),CT 试样厚度为 8 mm,如图 12 所示。裂纹的扩展为复合模式,裂纹扩展方向不再位于初始裂纹面内,等效应力强度因子采用公

式(10)计算。裂纹扩展速率公式采用 Paris 公式,参数为 $C=6.8\times 10^{-8}$, $m=4$,对应的 da/dN (单位: mm/cycle), ΔK_{ef} (单位: MPa $\sqrt{m}$)。裂纹的扩展步长取为 1 mm,扩展计算中采用固定步长,最后进行 9 步扩展计算。

图 13 为模拟计算的裂纹扩展循环数与试验值的对比,纵坐标为裂纹的扩展长度,模拟得到的裂纹扩展循环数为 21 330,试验值为 21 776,误差为 2.1%,造成偏差的原因,除了前面算例中提到的因素外,由于裂纹扩展的初期形成的裂纹面不光滑(称为“factory roof”现象),与数值模拟中产生的光滑裂纹面有差别,因此计算的载荷循环数会产生一定的偏差。图 14 和图 15 为试验得到的扩展裂纹与模拟结果的对比。模拟结果中裂纹面逐渐由斜面过渡为平面,呈现出非平面裂纹的特征。裂纹轨迹与试验结果比较符合。

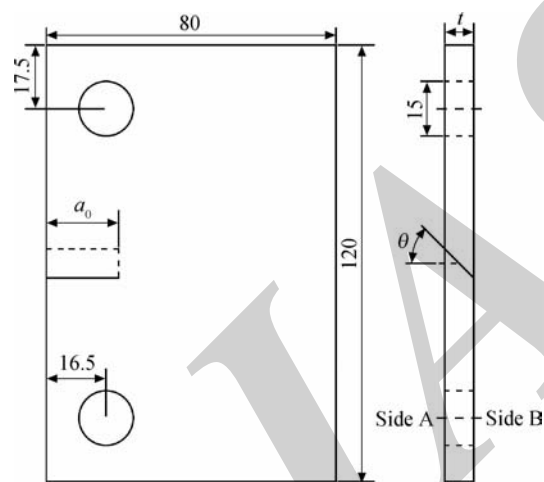


图 12 试样尺寸^[25](单位:mm)

Fig. 12 Specimen dimensions in mm^[25] (unit:mm)

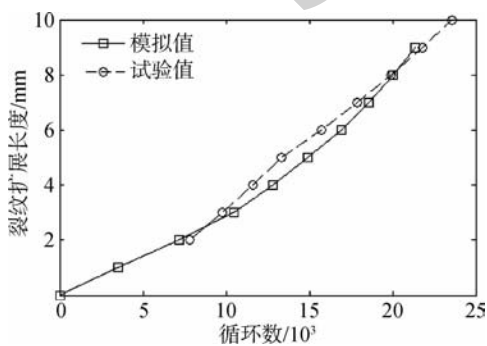


图 13 贯穿斜裂纹扩展循环数

Fig. 13 Cycle count of through-thickness inclined crack

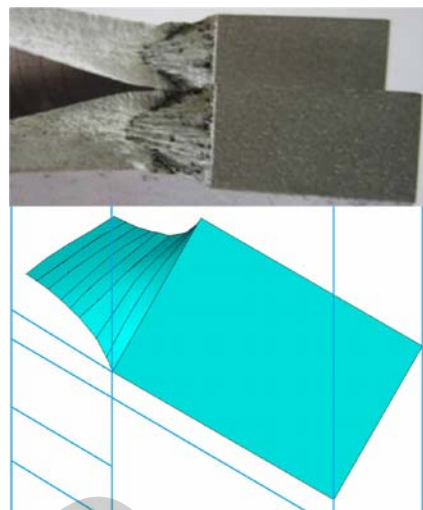


图 14 裂纹面形状(试验结果^[25]与模拟结果)

Fig. 14 Crack surface shape (experiment result^[25] and simulation result)



图 15 裂纹轨迹(试验结果^[25]与模拟结果
(红色曲线))

Fig. 15 Crack path (experiment result^[25] and simulation result (red curve))

4 结 论

本文发展了一种模拟三维非平面裂纹扩展的数值计算方法,采用实体建模的方式,将裂纹体嵌入到无裂纹体中组成整体模型。裂纹体的建模采用参数化的方式,不仅能够适应三维非平面裂纹的复杂形状,而且使得裂纹扩展的计算能够自动进行。通过算例的计算及与试验结果的对比,表明该方法能够模拟三维非平面裂纹的扩展,同时能够比较准确的预测裂纹形状和裂纹扩展寿命。该方法能够为结构的裂纹扩展寿命预测和损伤容限设计提供有效的支持。

参考文献:

[1] 沈成康. 断裂力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996.
[2] 唐俊星, 陆山. 三维裂纹整体参数化模拟方法[J]. 航空动

- 力学报,2008,23(4):737-741.
- TANG Junxing, LU Shan. A integral parameter-based modeling method for 3D crack[J]. Journal of Aerospace Power,2008,23(4):737-741. (in Chinese)
- [3] 高潮,伍黎明,何宇廷,等. 基于能量模型的三维穿透裂纹扩展研究[J]. 航空动力学报,2015(3):639-648.
- GAO Chao, WU Liming, HE Yuting, et al. Study on three-dimensional through-thickness crack growth based on energy model[J]. Journal of Aerospace Power,2015(3):639-648. (in Chinese)
- [4] 瞿伟廉,鲁丽君,李明. 带三维穿透裂纹结构的有限元实体建模方法[J]. 武汉理工大学学报,2008,30(1):87-90.
- QU Weilian, LU Lijun, LI Ming. Solid modeling method for structure with 3-D straight through crack[J]. Journal of Wuhan University of Technology,2008,30(1):87-90. (in Chinese)
- [5] TANG Junxing, LU Shan. A numerical technique for three-dimensional fatigue crack growth simulation[R]. Wuxi Jiangsu: International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics,2007.
- [6] 于培师. 含曲线裂纹结构的三维断裂与疲劳裂纹扩展模拟研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2010.
- YU Peishi. Studies on three-dimensional fracture and fatigue crack growth simulation of curve cracked structures [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,2010. (in Chinese)
- [7] 齐桂营. 具有倾斜裂纹的 CTS 试样三维断裂行为研究 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2011.
- QI Guiying. Study on 3D-fracture behavior in CTS-specimen with inclined crack[D]. Harbin: Harbin Engineering University,2011. (in Chinese)
- [8] 赵勇铭,宋迎东. 夹杂对粉末高温合金裂纹扩展寿命的影响[J]. 航空动力学报,2005,20(5):772-777.
- ZHAO Yongming, SONG Yingdong. Influence of inclusions on crack growth life of powder metallurgy[J]. Journal of Aerospace Power,2005,20(5):772-777. (in Chinese)
- [9] CARTER B J, WAWRZYMEK P A, INGRAFFEA A R. Automated 3-D crack growth simulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2000,47(1/2/3):229-253.
- [10] SCHÖLLMANN M, FULLAND M, RICHARD H A. Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures[J]. Engineering Fracture Mechanics,2003,70(2):249-268.
- [11] BREMBERG D, DHONDT G. Automatic crack-insertion for arbitrary crack growth[J]. Engineering Fracture Mechanics,2008,75(3):404-416.
- [12] RABOLD F, KUNA M, LEIBELT T. Procrack: a software for simulating three-dimensional fatigue crack growth [M]// APEL T, STEINBACH O. Advanced finite element methods and applications. Berlin: Springer,2013:355-374.
- [13] 张智轩,石多奇,杨晓光. 含销钉孔边裂纹的某压气机轮盘裂纹扩展分析[J]. 航空动力学报,2016,31(3):567-574.
- ZHANG Zhixuan, SHI Duoqi, YANG Xiaoguang. Analysis of crack propagation for a compressor disk with cracks on pin holes[J]. Journal of Aerospace Power,2016,31(3):567-574. (in Chinese)
- [14] GUINEA G V, PLANAS J, ELICES M. KI evaluation by the displacement extrapolation technique[J]. Engineering Fracture Mechanics,2000,66(3):243-255.
- [15] BRANCO R, ANTUNES F V, MARTINS R F. Modelling fatigue crack propagation in CT specimens[J]. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures,2008,31(6):452-465.
- [16] GOSZ M, MORAN B. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions [J]. Engineering Fracture Mechanics,2002,69(3):299-319.
- [17] REMBERG D, FALESKOG J. A numerical procedure for interaction integrals developed for curved cracks of general shape in 3-D[J]. International Journal of Solids and Structures,2015,62:607-611.
- [18] LIN X B, SMITH R A. Finite element modelling of fatigue crack growth of surface cracked plates; Part I: the numerical technique[J]. Engineering Fracture Mechanics,1999,63(5):503-522.
- [19] LAZARUS V, BUCHHOLZ F G, FULLAND M, et al. Comparison of predictions by mode II or mode III criteria on crack front twisting in three or four point bending experiments[J]. International Journal of Fracture,2008,153(2):141-151.
- [20] BRANCO R, ANTUNES F V, COSTA J D. A review on 3D-FE adaptive remeshing techniques for crack growth modelling[J]. Engineering Fracture Mechanics,2015,141:170-195.
- [21] Fracture Analysis Consultants Incorporation. FRANC3D reference manual[R]. New York: Version 6.0 Fracture Analysis Consultants Incorporation,2011.
- [22] PUTRA I S, SCHIJVE J. Crack opening stress measurements of surface cracks in 7075-T6 Al alloy plate specimens through electron fractography[J]. Aerospace Engineering,1990,15(4):323-338.
- [23] FORTH S C, KEAT W D, FAVROW L H. Experimental and computational investigation of three-dimensional mixed-mode fatigue[J]. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures,2002,25(25):3-15.
- [24] 中国航空材料手册编辑委员会. 中国航空材料手册:第3卷 铝合金、镁合金[M]. 2版. 北京:中国标准出版社,2001.
- [25] SEIFI R, OMIDVAR N. Fatigue crack growth under mixed mode I + III loading[J]. Marine Structures,2013,34:1-15.