

# 基于有限元法的输液管路稳定性 可靠性研究

李占营<sup>1</sup>, 王建军<sup>1</sup>, 邱明星<sup>2</sup>

- (1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;  
2. 中国航空发动机集团有限公司 沈阳发动机研究所, 沈阳 110015)

**摘 要:** 为分析航空发动机空间管路系统的稳定性可靠性问题,提出了一种采用有限元法和蒙特卡洛法相结合的分析方法。方法中采用有限元法建立空间管路系统流固耦合模型,定义了稳定性失稳的极限状态函数,采用蒙特卡洛法进行稳定性可靠度计算。典型工程算例的计算结果表明:给定流体流速的均值,发散失稳的概率随流体流速的变异系数可能增加或减小;给定流体流速的变异系数,随流体流速均值的增加,管路系统稳定性极限状态函数由服从连续概率密度函数变为服从混合概率密度函数。研究结果对于航空发动机输液管路的稳定性可靠性设计和评估具有参考价值。

**关 键 词:** 管路系统; 流固耦合; 稳定性可靠性; 有限元法; 蒙特卡洛法

**中图分类号:** V233

**文献标志码:** A

## Research on stability reliability of pipe conveying fluid based on finite element method

LI Zhanying<sup>1</sup>, WANG Jianjun<sup>1</sup>, QIU Mingxing<sup>2</sup>

- (1. School of Energy and Power Engineering,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;  
2. Shenyang Engine Research Institute,  
Aero Engine (Group) Corporation of China, Shenyang 110015, China)

**Abstract:** For analysis of the stability reliability of spatial aeroengine pipe system, a probabilistic reliability method based on finite element method (FEM) and Monte Carlo method (MCM) was proposed. A fluid-structure coupling model of the pipe system was established with FEM. A limit state function of stability reliability was presented on the basis of analysis of natural frequency. The stability reliability was calculated using MCM. The analysis results of typical pipe system showed that: for a given mean flow velocity, as the variation of flow velocity increased, the divergence instability probability may increase or decrease; for a given variation of flow velocity, the probability density function of limit state function changed to the mixed probability density function from the continuous probability density function as the mean value of flow velocity increased. The result is valuable for stability reliability design and analysis of pipe system conveying fluid.

**收稿日期:** 2016-05-08

**作者简介:** 李占营(1983—),男,博士生,主要从事航空发动机强度振动方向研究。

**通讯作者:** 王建军(1956—),男,教授、博士生导师,博士,研究方向为航空宇航推进装置强度振动、振动抑制。E-mail: wangjianjun@buaa.edu.cn

**引用格式:** 李占营,王建军,邱明星. 基于有限元法的输液管路稳定性可靠性研究[J]. 航空动力学报, 2017, 32(12): 2903-2909. LI Zhanying, WANG Jianjun, QIU Mingxing. Research on stability reliability of pipe conveying fluid based on finite element method[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(12): 2903-2909.

**Key words:** pipe system; fluid-structure coupling; stability reliability; finite element method; Monte Carlo method

管路系统振动问题有着广阔的工程背景,它的研究成果可直接应用于航空航天、机械以及核工程等各个领域。在使用中,管路中流体介质的流速、压力等对管路的作用,通过流固耦合效应,引起管路固有频率的变化。随着管内流体流速的增加,系统固有频率逐渐接近失稳频率,进而引起管路系统的失稳破坏。传统的输液管路流固耦合振动稳定性问题主要是对管路各参数确定情况下的确定性分析,但是由于流固耦合分析的复杂性,分析过程中存在很多的不确定性,因此对管路系统进行振动稳定性可靠性研究,对管路系统设计具有重要参考价值。

近年来,国内外学者对输液管路的固有振动和稳定性开展了广泛深入的研究<sup>[1-6]</sup>。Huang 等<sup>[4]</sup>采用 Galerkin 法研究了不同边界条件下输液直管的固有频率,以及无量纲失稳临界流速。齐欢欢等<sup>[5]</sup>研究了 Galerkin 模态截断对输液直管固有频率计算结果的影响。Wang 等<sup>[6]</sup>研究了两端支承输液直管在分布式跟随力作用下,随着流速增加发生颤振失稳的可能性。

输液管路有限元法研究方面,Pramila 等<sup>[7]</sup>基于修改的 Timoshenko 梁单元,研究了短粗输液管路的失稳临界流速。Marzani 等<sup>[8]</sup>研究了非均匀弹性基础上的悬臂输液直管稳定性问题。姬贺炯等<sup>[9]</sup>以输液管路系统试验固有频率为基准,对比了附加质量、顺序耦合两种流固耦合有限元建模方法的适用性。陈果等<sup>[10]</sup>基于液弹耦合梁单元建立了复杂飞机液压管路的动力学模型,将固有频率的计算结果与通用有限元代码和锤击法试验的结果进行了对比,并研究了流速对管路系统固有频率的影响。Ruoff 等<sup>[11]</sup>基于 Timoshenko 梁理论建立了空间输液管路有限元模型,并研究了流速对固有频率的影响。李占营等<sup>[12]</sup>基于有限元法建立了带柔性支承复杂空间航空发动机管路系统流固耦合有限元模型,计算了系统固有频率,并研究了支承弹簧非线性刚度参数对系统简谐基础激励下受迫响应的影响。

输液管路振动可靠性研究方面,黄益民等<sup>[13]</sup>基于有限元法研究了管路结构参数的分布参数对固有频率灵敏度的影响,并用干涉理论对管路进行了防共振可靠性分析。张屹尚等<sup>[14]</sup>引入 Kriging 模型和超立方抽样技术应用于输液管路的非

概率可靠性研究,研究了管路的防共振可靠性问题。翟红波等<sup>[15]</sup>基于 Galerkin 法求解输液管路低阶固有频率,给出了输液管路防共振可靠度功能函数,并采用矩估计法得出了管路的共振可靠度。

尽管输液管路稳定性和防共振可靠性的研究已经取得了很大成就,但在稳定性可靠性方向的研究工作还不太多,考虑流固耦合影响的更是罕见。因此本文将建立空间管路系统流固耦合有限元模型计算其固有频率,定义稳定性失稳的极限状态函数,进而采用蒙特卡洛法进行稳定性可靠度的计算,最后讨论管内介质流速的分布参数对输液管路屈曲失稳稳定性的影响。

1 输液管路稳定性分析建模

1.1 研究对象

研究对象如图 1 所示,为两端固支中间卡箍支承的输液管路系统。卡箍刚度为  $K$ ,管内液体平均流速为  $U$ ,由左端流入右端流出。

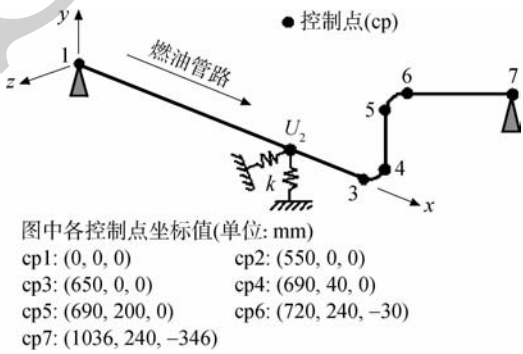


图 1 带卡箍支承空间管路系统

Fig. 1 A spatial pipe system with intermediate spring support

1.2 运动方程及其离散

对管内液体采用无黏不可压缩假定。忽略管路轴向载荷、结构阻尼、重力,并采用小变形假设,由牛顿力学原理,得到管路微段的横向、轴向和扭转运动的自由振动微分方程<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + [m_i U^2 + p A_i (1 - 2\nu)] \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \\ 2m_i U \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} + (m_i + m_v) \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

(i = 1, 2) (1)

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

式中  $x$  和  $t$  分别为管路轴向坐标和时间;  $EI$ 、 $EA$  和  $GJ$  分别为管路横向、轴向和扭转刚度;  $\rho$  为管路材料密度;  $m_p$ 、 $m_t$  分别为管路和管内流体的线密度;  $J$  为管路截面极惯性矩;  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分别为管路在面外正交方向的位移;  $\theta$ 、 $u$  分别为管路节点绕轴线的转角、轴向位移;  $\nu$  为管路材料泊松比;  $A_t$ 、 $p$  分别为管内液体横截面积和工作压力。式(1)、式(2)和式(3)分别描述了管路横向流固耦合、轴向和扭转振动行为。

采用流固耦合管单元对管路进行有限元离散,同时采用弹簧单元对柔性卡箍进行有限元建模,得到管路系统有限元模型<sup>[12]</sup>。组集系统中所有单元矩阵,得出管路系统自由振动的有限元求解方程

$$M\ddot{a} + C\dot{a} + Ka = 0 \quad (4)$$

由式(1)可以看出式(4)中包含了管路与管内液体的流固耦合作用。其中阻尼矩阵包含了由于哥氏力效应引起的耦合项;刚度矩阵包含了管路应变能、流体压力和离心力的影响。

### 1.3 方程组的求解

当流速引起的哥氏力效应不能忽略时,式(4)需要采用 Block Lanczos 法和 QR 阻尼法相结合的方法进行求解,进而得到系统的复特征值和复特征向量。该方法首先采用 Block Lanczos 法计算无阻尼线性系统的固有模态,接着通过模态坐标变换将原系统的特征值转换为模态子空间的特征值,然后通过引入状态向量将子空间的  $n$  维特征值问题转换为状态空间的  $2n$  维特征值问题,最后采用 QR 算法计算状态空间的标准特征值问题<sup>[17]</sup>。

引入坐标变换

$$a = \Phi y \quad (5)$$

式中  $\Phi$  为采用 Block Lanczos 法求得的忽略阻尼矩阵的线性系统前  $n$  阶特征向量矩阵,  $y$  为模态子空间向量。

将式(5)代入到式(4)得出模态子空间的运动方程

$$I\ddot{y} + \Phi^T C \Phi \dot{y} + \Lambda^2 y = 0 \quad (6)$$

式中  $\Lambda^2$  为包含线性系统前  $n$  阶特征频率的对角矩阵。

考虑流速引起的哥氏力矩阵,系统的阻尼矩阵为非对称阵。因此,引入  $2n$  维状态空间向量,

将式(6)的特征值问题转换到状态空间进行求解。即将式(6)写成

$$I\dot{z} = Dz \quad (7)$$

式中

$$z = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$D = \begin{bmatrix} O & I \\ \Lambda^2 & -\Phi^T C \Phi \end{bmatrix} \quad (9)$$

采用 QR 法求解状态方程(式(7)),得到系统  $2n$  个复特征值。由于描述的是同一个系统,式(7)与式(4)有着相同的特征值。

得到特征值之后,采用逆迭代法得到复模态子空间特征向量。最后,采用下式得到原系统的特征向量:

$$\psi = \Phi z \quad (10)$$

## 2 稳定性可靠性分析

输液管路稳定性的确定性研究工作,得出结论:两端支承输液管路,随着流速的增加,管路固有频率会减小;当固有频率减小到零时,管路发生发散失稳,此时管内液体的流速称为临界流速。然而,由于系统参数不确定性的存在,系统的固有频率及失稳流速不是确定值,即其失稳是有概率特性的。因此接下来,首先建立描述管路系统失稳的极限状态函数,然后给出管路系统稳定性可靠度的计算方法。

### 2.1 功能函数建立

对于输液管路为避免发散失稳失效的发生,往往要求管路固有频率与零频有一定的距离,因此定义管路系统稳定性失效的极限状态函数为

$$g(x) = f - f_a \quad (11)$$

式中  $x$  为管路系统随机变量,  $f$  为管路系统稳定性失稳对应的固有频率,  $f_a$  为引入的常量。当  $g(x) > 0$  时,即系统稳定性失稳固有频率  $f$  大于  $f_a$  时,系统不会发生发散失稳,处于安全状态。当  $g(x) \leq 0$  时,系统发生发散失稳。

### 2.2 可靠性分析

管路系统发散失稳失效概率的计算在数学上可由极限状态函数的积分来描述,即

$$\bar{P}_f = P\{g(x) < 0\} = \int_{g(x) < 0} f_x(x, \theta_x) dx \quad (12)$$

式中  $\theta_x$  为管路系统随机变量  $x$  的分布参数,  $f_x$  为随机变量  $x$  的联合分布概率密度函数。

可靠度的计算方法包含解析法和数值法两大类。其中：解析法，包括 1 阶可靠性方法 (FORM)、2 阶可靠性方法 (SORM) 等；而数值方法，包括蒙特卡洛法、响应面法、随机有限元法。

相比于其他方法，蒙特卡洛模拟法是以概率论数理统计的理论为基础，采用统计抽样理论近似求解数学问题或物理问题的方法，其理论基础是大数定律，因此它的应用范围几乎没有限制。

蒙特卡洛模拟法引入指示函数

$$I[g(x)] = \begin{cases} 0 & g(x) > 0 \\ 1 & g(x) \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

当系统失效时，函数值为 1，其余为零。将上式代入式(12)，即

$$\bar{P}_f = \int_{g(x) \leq 0} \dots \int f_x(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int I[g(x)] f_x(x) dx = E\{I[g(x)]\} \quad (14)$$

此时积分区域发生了变化，但积分值不变。

蒙特卡洛模拟法通过引入指示函数，实现了将系统的失效概率转换为指示函数的期望值。其计算可靠度的基本步骤为：首先生成随机变量  $x_i$  的样本集，作为输入向量提交给极限状态函数求解器，计算获得极限状态函数值；然后计算指示函数的样本均值，即得到了系统的失效概率

$$P_f = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j I[g(x_i)] \quad (15)$$

式中  $j$  为样本集个数，而  $P_f$  为失效概率的无偏估计值。这一估计值的方差为<sup>[18]</sup>

$$\sigma_{P_f}^2 = \frac{\bar{P}_f - \bar{P}_f^2}{j} \quad (16)$$

仅与自身有关。方差越小，估计值越接近真实值。

由式(16)可以看出：一方面，对于小概率失效事件，如果要获得足够精度的计算结果，必须进行大量样本的计算；另一方面，该方法对样本点的要求与输入随机变量的个数无关，而取决于预期的失效概率值。例如，要求系统失效概率的方差在 10%，失效概率  $P_f = 10^{-3}$ ，则由式(16)可以得出需要的样本点数在  $j = 10^5$ 。得益于计算机性能的提升和高性能计算技术的发展，本文采用蒙特卡洛模拟法计算管路系统小概率发散失稳的可靠度得以实现。

3 算 例

研究对象为图 1 所示的两端固支中间单管卡箍支承的不锈钢空间燃油管路系统。该系统由 3

个直管段和 2 个弯管段组成。管路总长为 1 075 mm、内径为 6 mm、壁厚为 1 mm，弯管段曲率半径为 40 mm。不锈钢材料的弹性模量为 200 GPa、密度为 7 900 kg/m<sup>3</sup>。燃油密度为 775 kg/m<sup>3</sup>。单管卡箍刚度系数为 200 N/mm。

燃油管路系统的有限元模型共包含 21 个单元：19 个流固耦合管单元用于模拟管路，2 个弹簧单元用于模拟单管卡箍支承，网格数量通过网格无关性测试。

3.1 确定性分析

逐渐提高管内燃油流速，计算管路系统的确定性临界流速。图 2 给出了燃油流速由 0 m/s 增加到 125 m/s 时，前 3 阶固有频率的变化趋势。图中横坐标为燃油流速，纵坐标为系统固有频率。

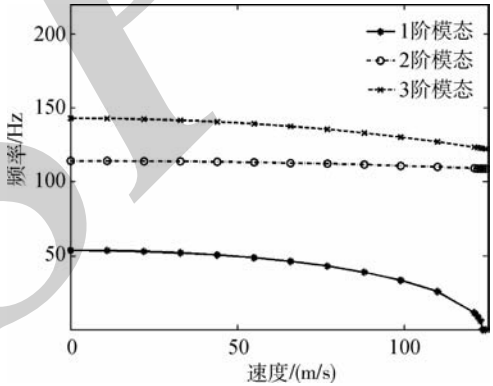


图 2 不同流速下空间管路系统的固有频率

Fig. 2 Natural frequencies for the spatial pipe system at different flow velocities

可以看出

1) 随着燃油流速的增加，第 1 阶和第 3 阶固有频率逐渐减小。这是因为，系统第 1 阶和第 3 阶固有振动的模态振型为横向弯曲振型，而流固耦合作用主要影响横向弯曲振动。

2) 当燃油流速增加到 123 m/s 附近，管路系统第 1 阶固有频率接近于零，系统发生发散失稳。

上述确定性的研究与文献[16]中的研究结论是一致的，这验证了该管路系统的有限元模型能够用于后续可靠性问题的研究。

3.2 可靠性分析

基于确定性稳定性分析的有限元模型，接下来考虑管路系统设计变量的不确定性，采用蒙特卡洛法研究管路系统的稳定性可靠性问题。

假定管路系统随机设计变量的分布参数如表 1 所示。

表 1 管路系统随机设计变量

Table 1 Random design variables of pipe system

| 随机变量名称        | 分布类型 | 均值   | 变异系数 |
|---------------|------|------|------|
| 管路外径/mm       | 正态分布 | 14   | 0.01 |
| 管路壁厚/mm       | 正态分布 | 1    | 0.01 |
| 管材杨氏模量/GPa    | 正态分布 | 200  | 0.01 |
| 管材密度/(kg/m³)  | 正态分布 | 7900 | 0.01 |
| 管材泊松比         | 正态分布 | 0.3  | 0.01 |
| 燃油密度/(kg/m³)  | 正态分布 | 775  | 0.01 |
| 燃油压力/MPa      | 正态分布 | 28   | 0.02 |
| 支承刚度系数/(N/mm) | 正态分布 | 200  | 0.05 |
| 卡箍位置          | 正态分布 | 0.55 | 0.02 |

表 1 中的设计变量均服从正态分布,其设计值定义为均值,变异系数则根据实际情况选取。由制造工艺导致导管外径和壁厚变化的变异系数取 1%。密度、弹性模量等材料属性的均值为常温下值,变异系数同样取为 1%。燃油压力的变异系数取 2%。卡箍支承刚度系数的变异系数取 5%。卡箍位置参数是指卡箍所在直管的位置,其变异系数取 2%。当位置参数接近 0 时,卡箍安装在直管的起点(图 1 控制点 cp1 位置);为 0.65 时,卡箍安装在直管的终点(图 1 控制点 cp3 位置)。假设管路系统各随机变量之间相互独立,因此不需要定义各设计变量间的相关系数。

由确定性分析的结论可知,稳定性极限状态函数式(11)中  $f$  为系统第 1 阶固有频率  $f_1$ 。 $f_a$  取 0.5 Hz。得到该系统的极限状态函数为

$$g(x) = f_1 - 0.5 \tag{17}$$

当  $g(x)>0$  时,即系统第 1 阶固有频率大于 0.5 Hz 时,系统不会发生发散失稳,处于安全状态。当  $g(x)\leq 0$  时,系统发生发散失稳。

假定表 1 中给定的管路系统其他设计变量的分布参数不变,固定燃油流速的变异系数为 0.02,改变其均值。图 3 给出了不同流速均值下管路系统发散失稳的失效概率。其中横坐标为流速均值;纵坐标为发散失稳的失效概率。

可以看出,随着燃油流速均值的增加,系统发生发散失稳的概率增加。例如,在平均流速小于 115 m/s 时,失效概率为零,而平均流速大于 150 m/s 时,失效概率几乎达到 100%。

图 4 给出了燃油流速  $U$  均值分别为 120 m/s 和 127.5 m/s 时,极限状态函数的概率密度值。

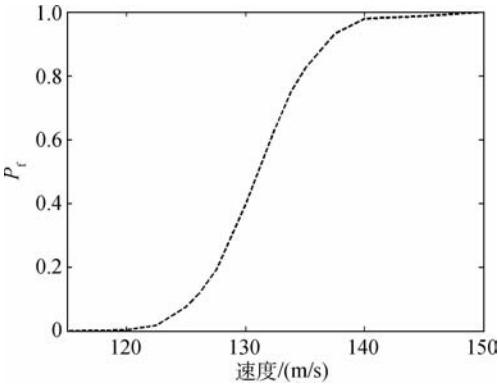


图 3 不同燃油流速均值下管路系统失稳概率  
Fig. 3 Probability of divergence of pipe system at different means of fuel flow velocity

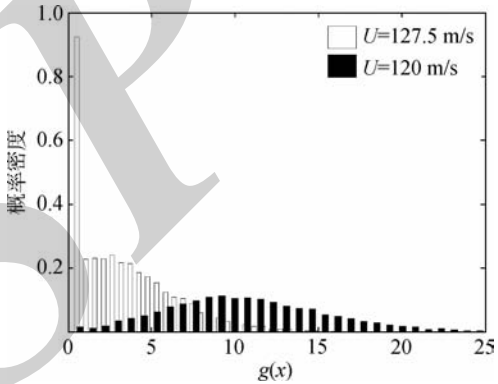


图 4 不同燃油流速均值下极限状态函数的概率密度分布  
Fig. 4 Probability density distribution of limit state function at different means of fuel flow velocity

其中横坐标为极限状态函数  $g(x)$ ;纵坐标为其概率密度。

可以看出,不同流速均值时,极限状态函数的概率密度函数分布不同。流速均值为 120 m/s 时,极限状态函数服从连续概率密度函数,而流速均值为 127.5 m/s 时,服从混合概率密度函数。流速均值为 127.5 m/s 时,极限状态函数小于零的概率密度远大于 120 m/s 时,这说明随着流速的增加,系统发生失稳失效的概率增加。

接下来,考虑不同燃油流速的变异系数下管路系统的发散失稳概率。图 5 给出了燃油流速不同变异系数值时,发散失稳概率值随流速均值的变化趋势。其中横坐标为流速均值,变化范围为 115~150 m/s;纵坐标分别为燃油流速变异系数  $Y$  为 0.5%、1% 和 2% 时的失效概率值。

可以看出

1) 失效概率小于 50% 时,给定平均流速,随

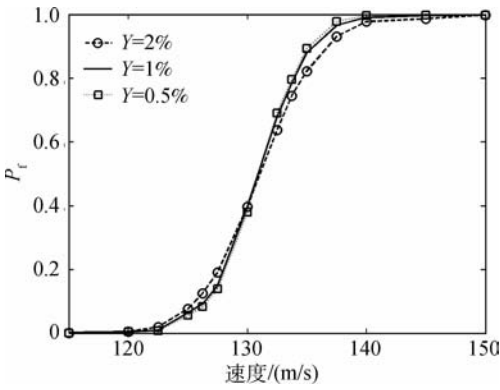


图 5 燃油流速变异系数对系统失稳概率的影响  
Fig. 5 Probability of divergence of pipe system for different variable coefficients of fuel flow velocity

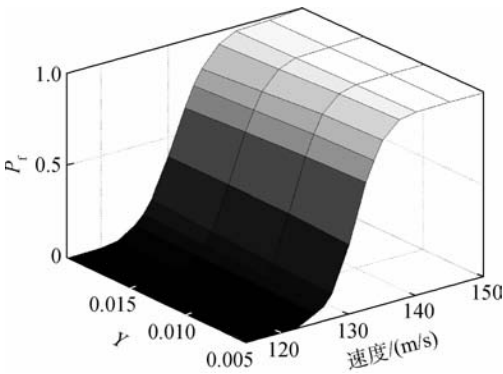


图 6 燃油流速分布参数对系统失稳概率的影响  
Fig. 6 Probability of divergence of pipe system for different distribution parameters of fuel flow velocity

着变异系数的增大,失稳失效的概率增加。例如,燃油平均流速为 125m/s 时,变异系数由 1%增大到 2%,对应的失效概率由 0.0695 增大到 0.076。失效概率大于 50%时,上述规律向相反方向变化。

2) 失效概率小于 50%时,给定失效概率,随着变异系数的增大,燃油流速均值的取值将减小。例如失效概率为 10%,变异系数为 1%时,燃油流速均值为 125.4 m/s;变异系数为 2%时,燃油流速均值为 123 m/s。失效概率大于 50%时,上述规律向相反方向变化。

3) 与变异系数为 2%时相比,燃油流速变异系数为 0.5%和 1%时,失效概率曲线比较接近。这是因为此时燃油流速变异系数的影响小于其他系统参数的不确定性对系统失稳概率的影响。

最后,建立一个控制面用于指导设计人员基于燃油流速的分布参数进行管路振动特性设计。图 6 给出了该管路系统燃油流速均值在 115~150m/s 范围,变异系数在 0.5%~2%范围变化时的系统发散失稳概率。

由图 6 可以看出,相同变异系数时,随着流速均值的增加,发散失稳的概率增加;相同流速均值时,随着变异系数的增加,发散失稳的概率可能增加或减小;给定流速均值和变异系数时,可以从图中查得发散失稳的失效概率。

本节的研究工作不仅可以用于研究管路系统不确定性对系统发散失稳的影响,而且可以将该方法用于管路系统的设计工作,以避免管路系统发生发散失稳而失效。相比于传统设计手段中给定安全因子,本文采用可靠性设计手段进行管路设计,采用概率有限元模型进行可靠度分析,得到管路系统发散失稳的失效概率。设计人员可以根

据给定的失效概率值,从图 6 中方便的查到特定燃油流速均值和变异系数时的失效风险。

4 结 论

本文将简单几何输液管路稳定性问题的确定性研究工作,扩展到空间任意几何管路系统稳定性可靠性分析。基于流固耦合有限元模型和蒙特卡洛法,对典型航空发动机燃油管路系统进行了发散失稳可靠度计算。分析结果表明

1) 给定管内流体流速的均值时,发散失稳的概率随流体流速的变异系数可能增加或减小。

2) 给定管内流体流速的变异系数时,随管内流体流速均值的增加,管路系统稳定性极限状态函数,由服从连续概率密度函数变为服从混合概率密度函数,函数值小于零的概率急剧增加。

本文的研究为今后空间任意几何管路系统的稳定性可靠性设计和可靠性评估提供了参考。

参考文献:

[ 1 ] PAIDOUSSIS M P, LI G X. Pipes conveying fluid; a model dynamical problem[J]. Journal of Fluids and Structures, 1993, 7(2): 137-204.  
[ 2 ] 任建亭, 姜节胜. 输流管道系统振动研究进展[J]. 力学进展, 2003, 33(3): 313-324.  
REN Jianting, JIANG Jiesheng. Advances and trends on vibration of pipes conveying fluid[J]. Advances in mechanics, 2003, 33(3): 313-324. (in Chinese)  
[ 3 ] IBRAHIM R A. Overview of mechanics of pipes conveying fluids; Part I fundamental studies[J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 2010, 132(3): 034001-034032.  
[ 4 ] HUANG Y M, LIU Y S, LI B H, et al. Natural frequency analysis of fluid conveying pipeline with different boundary conditions[J]. Nuclear Engineering and Design, 2010, 240(3): 461-467.

[5] 齐欢欢,徐鉴. Galerkin 模态截断对计算悬臂输液管道固有频率的影响[J]. 振动与冲击,2011,30(1):148-151.  
QI Huanhuan,XU Jian. Effect of Galerkin modal truncation on natural frequency analysis of a cantilevered pipe conveying fluid[J]. Journal of Vibration and Shock,2011,30(1):148-151. (in Chinese)

[6] WANG L. Flutter instability of supported pipes conveying fluid subjected to distributed follower forces[J]. Acta Mechanica Solida Sinica,2012,25(1):46-52.

[7] PRAMILA A, LAUKKANEN J, LIUKKONEN S. Dynamics and stability of short fluid-conveying Timoshenko element pipes[J]. Journal of Sound and Vibration,1991,144(3):421-425.

[8] MARZANI A,MAZZOTTI M,VIOLA E,et al. FEM formulation for dynamic instability of fluid-conveying pipe on nonuniform elastic foundation[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines,2012,40(1):83-95.

[9] 姬贺炯,白长青,韩省亮. 输流管道动力有限元建模及试验研究[J]. 应用力学学报,2013,30(3):422-427.  
JI Hejiong,BAI Changqing,HAN Shengliang. Dynamic finite element modeling and experimental research of the fluid-filled pipeline[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics,2013,30(3):422-427. (in Chinese)

[10] 陈果,罗云,郑其辉,等. 复杂空间载流管道系统流固耦合动力学模型及其验证[J]. 航空学报,2013,34(3):597-609.  
CHEN Guo,LUO Yun,ZHENG Qihui,et al. Fluid-structure coupling dynamic model of complex spatial fluid-conveying pipe system and its verification[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2013,34(3):597-609. (in Chinese)

[11] RUOFF J,HODAPP M,KÜCK H. Finite element modeling of Coriolis mass flowmeters with arbitrary pipe geometry and unsteady flow conditions[J]. Flow Measurement and Instrumentation,2014,37(3):119-126.

[12] 李占营,王建军,邱明星. 航空发动机空间管路系统的流固耦合振动特性[J]. 航空动力学报,2016,31(10):2346-2352.  
LI Zhanying,WANG Jianjun,QIU Mingxing. Dynamic characteristics of aeroengine pipe system considering fluid-structure coupling[J]. Journal of Aerospace Power,2016,31(10):2346-2352. (in Chinese)

[13] 黄益民,刘伟,刘永寿,等. 充液管道模态的参数灵敏度及其共振可靠性分析[J]. 振动与冲击,2010,29(1):193-195.  
HUANG Yimin,LIU Wei,LIU Yongshou,et al. Parameter sensitivity and resonance reliability of a fluid-filled pipeline[J]. Journal of Vibration and Shock,2010,29(1):193-195. (in Chinese)

[14] 张屹尚,刘永寿,赵彬,等. 基于 Kriging 模型的充液管道共振非概率可靠性分析[J]. 振动工程学报,2012,25(2):117-123.  
ZHANG Yishang,LIU Yongshou,ZHAO Bin et al. Non-probabilistic reliability analysis on resonance of fluid-filled pipeline based on Kriging model[J]. Journal of Vibration Engineer,2012,25(2):117-123. (in Chinese)

[15] 翟红波,吴子燕,刘永寿,等. 两端简支输流管道共振可靠度分析[J]. 振动与冲击,2012,31(12):160-164.  
ZHAI Hongbo,WU Ziyang,LIU Yongshou,et al. Analysis of resonance reliability for a simply supported pipe conveying fluid[J]. Journal of Vibration and Shock,2012,31(12):160-164. (in Chinese)

[16] PAIDOUSSIS M P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow[M]. London: Academic Press Limited,1998.

[17] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2010.

[18] 何水清,王善. 结构可靠性分析与设计[M]. 北京:国防工业出版社,1993.

(编辑:王碧琚)