

基于二维紧凑型四阶格子模型的 激波管流动模拟

胡开南^{1,2}, 耿少娟¹, 张宏武¹

- (1. 中国科学院 工程热物理研究所 工业燃气轮机实验室, 北京 100190;
2. 中国科学院大学, 北京 100190)

摘 要: 为了提高格子的稳定性,使用 Hermite 展开方法,构建了新的二维四阶紧凑型格子模型,即 D2Q37A。比较了 D2Q37A 和与 Philippi 给出的紧凑型格子模型(D2Q37B)的稳定性。在相同的碰撞频率下,与 D2Q37B 相比,D2Q37A 可以模拟初始密度比更高的一维激波管流动。这表明 D2Q37A 与现有格子模型相比,具有更好的稳定性。详细给出了适用于高阶格子模型的边界条件实现方式。此边界条件实现方式保留了体现 LBM(lattice Boltzmann method)粒子特性的迁移-碰撞机制。用以上给出的格子模型和边界条件处理方式模拟激波管流动,得到的模拟结果和解析解吻合得很好。这表明所给出的边界处理方式是可行的。此边界格式同样可以用于其他类型的流动和边界。

关 键 词: 格子 Boltzmann 方法; 四阶格子模型; 迁移-碰撞机制; 边界条件; 激波管

中图分类号: V211.751

文献标志码: A

Simulating shock-tube flow with a two-dimensional compact fourth order lattice model

HU Kainan^{1,2}, GENG Shaojuan¹, ZHANG Hongwu¹

- (1. Industrial Gas Turbine Laboratory, Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: In order to improve the stability of the lattice model, a new two-dimensional compact fourth order lattice model, i. e., D2Q37A, was constructed based on the Hermite expansion. The stability of D2Q37A and the one proposed by Philippi (D2Q37B) were compared. Under the same collision frequency, D2Q37A can be applied to the one-dimensional shock flow with the higher initial density ratio comparing with D2Q37B. That means D2Q37A was more stable than D2Q37B. An implementation of boundary conditions for high order lattice models was proposed in details. The implementation maintained the streaming-collision mechanism ensuring the particle feature of the LBM (lattice Boltzmann method). This new lattice model and implementation of boundary conditions were applied to one-dimensional shock tube problem and the result of simulation was consistent with the analytical solution. The results show the proposed boundary condition scheme is practicable. The proposed boundary scheme can be employed by other type of flow and boundary.

收稿日期: 2016-03-30

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(2016YFB0200901); 国家自然科学基金(51236001)

作者简介: 胡开南(1977—),男,博士生,主要研究方向为格子 Boltzmann 方法及其在噪声模拟中的应用。

引用格式: 胡开南,耿少娟,张宏武. 基于二维紧凑型四阶格子模型的激波管流动模拟[J]. 航空动力学报,2017,32(11):2777-2783.
HU Kainan, GENG Shaojuan, ZHANG Hongwu. Simulating shock-tube flow with a two-dimensional compact fourth order lattice model[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(11): 2777-2783.

Key words: lattice Boltzmann method; fourth order lattice model; streaming-collision mechanism; boundary condition; shock tube

D2Q9 格子模型(下文简称 D2Q9 模型)适用于等温流动^[1],但对于涉及温度变化的流动,如可压缩流动, D2Q9 模型则无法胜任。目前,能够模拟热流动的格子模型分为 3 类,即多速度模型^[2-10]、双分布模型^[11-12]及与差分方法相结合的混合模型^[13-14]。多速度模型中的高阶格子模型受到越来越多的关注。Philippi 等给出了一个二维四阶格子模型,即 D2Q37 格子模型(下文中称之为 D2Q37A 模型)^[15]。此模型由连续 Boltzmann 方程经过系统的离散化方法得到。D2Q37A 模型是紧凑型格子模型。所谓紧凑型格子模型是这样一些模型,即在所有的特定阶数的格子模型中,紧凑型格子模型占据的格子空间最小,最大的水平或者竖直方向的离散速度最小。比如, D2Q37A 模型,占据 7×7 个格子,最大水平(竖直)方式的离散速度为 3 个格子单位。要达到 4 阶精度,格子模型最大的水平(竖直)方向的离散速度不得小于 3 个格子单位。如果格子模型的最大水平(竖直)方向的离散格子速度小于 3,则格子精度无法达到 4 阶。D2Q37A 模型是最先出现的紧凑型 4 阶精度格子模型,但是这个格子模型并不是所有紧凑型 4 阶精度格子模型中最稳定的。本文给出一个新的紧凑型 4 阶格子模型,此模型的比 D2Q37A 模型稳定,称此模型为 D2Q37B 模型。

边界格式是格子 Boltzmann 方法(lattice Boltzmann method, LBM)的关键性因素之一。高阶格子模型的边界设置比 D2Q9 模型复杂,处理起来更困难。D2Q9 模型只有 1 层格点的离散速度与边界相关,而高阶格子模型可能有 3 层或者 4 层甚至 5 层格点的离散速度与边界相关。这意味着要设置多层虚拟边界格点。为了简化边界条件的处理,在使用高阶格子模型时,往往放弃迁移-碰撞机制,而采用差分方法。但是放弃迁移-碰撞机制, LBM 的粒子特性也就失去了。

如何在采用高阶格子的同时保留迁移-碰撞机制,前人做了有益的尝试。Meng 等通过设置多层虚拟格点,将动理学边界条件(kinetic boundary condition, KBC)用于高阶格子模型,给出了保留迁移-碰撞机制的 KBC 实现方式^[16]。本文将给出周期性边界条件、充分发展边界条件和壁面边界条件等边界条件在高阶格子模型中实现的细节。使用文中给出的边界条件设置可以保

留迁移-碰撞机制。本文只讨论二维问题。

1 LBM 的迁移-碰撞机制及其控制方程

LBM 可以通过迁移-碰撞机制实现,也可以通过有限差分或者其他数值方法实现。迁移-碰撞机制有明晰的物理背景,体现了 LBM 方法的粒子特性,是 LBM 最具吸引力的特点之一。本文做的所有数值模拟,无论是格子模型的稳定性测试还是模拟结果与解析解的对比,都采用迁移-碰撞机制。

对于高阶格子而言,实现迁移-碰撞机制,需要考虑两个因素:第 1 个因素是边界条件的处理,适用于高阶格子模型的边界处理方式,将在第 3 节给出。实现迁移-碰撞机制的另外一个因素是控制方程。对于所有的格子模型,无论是 D2Q9 模型,还是 4 阶格子模型,实现迁移-碰撞机制的控制方程都是相同的,即格子 Boltzmann-BGK (Bhatnager-Gross-krook)方程

$$f_i(\mathbf{X} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{X}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{X}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{X}, t)]$$
$$i = 0, 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

式中 $f_i(\mathbf{X}, t)$ 是离散粒子速度 $\mathbf{c}_i$ 方向的离散速度分布函数,此分布函数位于空间 $\mathbf{X}$ 和时间 t ; Δt 是时间步长; f_i^{eq} 是截断平衡态分布函数; τ 是无量纲松弛时间。对于一个特定的格子模型,共有 $n+1$ 个不同的离散粒子速度。

2 D2Q37B 模型和平衡态分布函数

离散连续 Boltzmann 方程可以构建新的格子模型。D2Q37A 模型是用此方式得到的第 1 个二维紧凑型 4 阶格子模型^[15]。表 1 给出了 D2Q37A 模型的细节,表中 w 为权重系数,“Perm”表示排列, k 是每个离散速度群(group)包含的离散速度数目。图 1 给出了 D2Q37A 模型的格子矢量示意图。Shim 在此基础上给出了一种系统化得到新格子模型方法^[9]。用此方法编写程序,得到了新的二维紧凑型 4 阶格子模型,称之为 D2Q37B 模型。D2Q37B 模型的稳定性好于 D2Q37A 模型。表 2 给出了 D2Q37B 模型的离散速度和权重系数。图 2 给出了 D2Q37B 模型矢量示意图。

表 1 D2Q37A 模型的离散速度及其权重系数

Table 1 Discrete velocities and weight coefficients of D2Q37A model

<i>k</i>	<i>c_i</i>	<i>ω_i</i>
1	(0,0)	0.233 150 669 1
4	Perm(± <i>r</i> ,0)	0.107 306 092 6
4	Perm(± <i>r</i> , ± <i>r</i>)	0.057 667 859 35
4	Perm(±2 <i>r</i> , 0)	0.014 208 215 82
8	Perm(±2 <i>r</i> , ± <i>r</i>)	5.353 048 95×10 ⁻³
4	Perm(±2 <i>r</i> , ±2 <i>r</i>)	1.011 937 544×10 ⁻³
4	Perm(±3 <i>r</i> , 0)	2.453 010 29×10 ⁻³
8	Perm(±3 <i>r</i> , ± <i>r</i>)	2.834 142 36×10 ⁻⁴

注:表中 *r*=1.196 979 775 2。

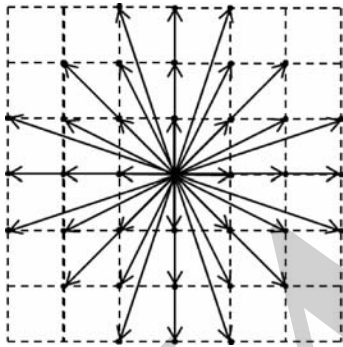


图 1 D2Q37A 模型矢量示意图
Fig.1 Vectors of D2Q37A model

表 2 D2Q37B 模型的离散速度及其权重系数

Table 2 Discrete velocities and weight coefficients of D2Q37B model

<i>k</i>	<i>c_i</i>	<i>ω_i</i>
1	(0,0)	0.203 916 917 8
4	Perm(± <i>r</i> ,0)	0.127 544 843 5
4	Perm(± <i>r</i> , ± <i>r</i>)	0.043 753 718 20
4	Perm(±2 <i>r</i> , 0)	8.136 590 44×10 ⁻⁴
8	Perm(±2 <i>r</i> , ± <i>r</i>)	9.400 799 14×10 ⁻³
4	Perm(±3 <i>r</i> , 0)	6.950 510 49×10 ⁻⁴
8	Perm(±3 <i>r</i> , ± <i>r</i>)	3.042 984 94×10 ⁻⁵
4	Perm(±3 <i>r</i> , ±3 <i>r</i>)	2.810 937 623×10 ⁻⁵

注:表中 *r*=1.196 979 775 2。

D2Q37A 模型和 D2Q37B 模型的稳定性可以用一维激波管问题测试。初始条件的设置和边界条件的设置见下文。

影响数值模拟稳定性的因素有两个:一是起始状态时激波管左右两侧的密度比 ρ_2/ρ_1 ;二是 LBM 控制方程中的碰撞频率 ω ,即松弛时间的倒数。格子模型适用的密度比 ρ_2/ρ_1 和碰撞频率 ω 越高,格子的稳定性就越好。如果在特定的密度比和碰撞频率下,激波传播到边界时没有产生数值振荡,则认为格子模型在此密度比和碰撞频率下是稳定的。

图 3 给出了 D2Q37A 模型和 D2Q37B 模型的适用的密度比和碰撞频率的范围,即稳定范围。从图中可以看出,D2Q37B 模型的适用范围比 D2Q37A 模型大,稳定性比 D2Q37A 模型好。本文将使用稳定性更好的 D2Q37B 模型模拟激波管流动,并将得到的结果和解析解做对比。

LBM 数值模拟的另外一个关键性要素是平衡态分布函数。4 阶精度格子模型,需要与 4 阶精度的截断 Maxwell-Boltzmann 平衡态分布函数配合使用,才能使总体模拟精度达到 4 阶。4 阶精度的 Maxwell-Boltzmann 平衡态分布函数为

$$f_i^{eq} = \omega_i \sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!} a^{(n)} \cdot H^{(n)} \tag{2}$$

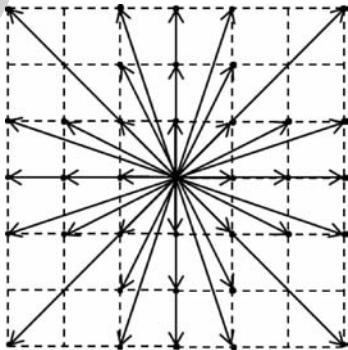


图 2 D2Q37B 模型矢量示意图
Fig.2 Vector of D2Q37B model

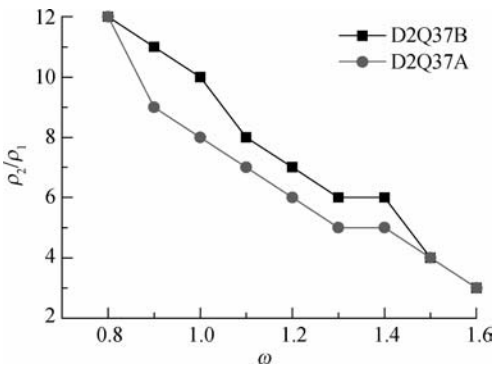


图 3 D2Q37A 模型和 D2Q37B 模型的适用范围
Fig 3 Applicable range of the D2Q37A model and the D2Q37B model

式中

$$\begin{aligned} a^{(0)} \cdot H^{(0)} &= 1, \quad a^{(1)} \cdot H^{(1)} = u \cdot c_i, \\ a^{(2)} \cdot H^{(2)} &= (u \cdot c_i)^2 + (T-1)(c_i^2 - D) - u^2, \\ a^{(3)} \cdot H^{(3)} &= (u \cdot c_i)[(u \cdot c_i)^2 + \\ &\quad 3(T-1)(c_i^2 - D - 2) - 3u^2], \\ a^{(4)} \cdot H^{(4)} &= (u \cdot c_i)^4 - 6(u \cdot c_i)^2 u^2 + \\ &\quad 3u^4 + 6(T-1)\{(u \cdot c_i)^2(c_i^2 - D - 4)\} + \\ &\quad u^2(D + 2 - c_i^2) + 3(T-1)^2 \times \\ &\quad [c_i^4 - 2(D+2)c_i^2 + D(D+2)] \end{aligned}$$

式中 u 为宏观速度, T 为无量纲温度, D 为维度。

本文将使用 D2Q37B 模型, 粒子离散速度 c_i 和权重系数 w_i 由表 2 给出。

3 高阶格子模型一维模拟激波管流动的边界处理

用二维四阶格子模型模拟一维激波管流动, 会涉及两类边界条件: 一类是激波管左右边界; 一类是激波管上下界面。一维激波管上下边界条件适用周期性边界条件, 左右边界适用充分发展边界条件, 也可以适用反弹边界条件。本文将左右边界条件设置为充分发展边界条件。附录将给出反弹边界格式在高阶格子中实现方式。以 D2Q37B 模型为例说明边界条件的设置方式。本文给出的边界格式可以同样适用于其他类型的流动和边界。

首先, 给出激波管左侧边界条件的设置的细节。激波管右侧出口边界的设置是类似的。

D2Q37B 模型有 3 层格点和边界相关。靠近出口的第 0、1 和 2 层格点, 均有部分离散速度分布函数不能通过迁移过程得到, 而必须通过设置边界条件得到。D2Q9 模型适用充分发展边界格式时, 第 0 层未知离散速度分布函数等于第 1 层

相应的离散速度分布函数。但是对于 D2Q37B 模型, 与第 0 层未知离散速度分布函数对应的第 1 层离散速度分布函数, 有一部分也是未知的, 无法通过迁移过程直接得到。为了克服这个困难, 可以将第 0 层格点未知离散速度分布函数设置为第 3 层相应的离散速度分布函数。相应地, 将第 1、2 层格点的未知速度分布函数设置为第 4、5 层相应的离散速度分布函数。图 4 给出了 D2Q37B 模型每层边界格点的未知离散速度分布函数的示意图。用类似的方式可以得到水平方向未知速度分布函数的示意图。

D2Q37B 模型的第 0 层格点的所有水平方向大于 1 或者等于 1 的离散速度 $c_{i,x}$ 的速度分布函数都是未知的。这些未知离散速度分布函数可以设置为第 3 层格点的相应分布函数, 即

$$f_i(0) = f_i(3) \quad i \in \{c_{i,x} \geq 1\}$$

对于第 1 层边界格点而言, 所有水平方向大于 2 或者等于 2 的离散速度 $c_{i,x}$ 的分布函数都是未知的, 这些未知的离散速度分布函数可以设置为第 4 层格点相应的分布函数, 即

$$f_i(1) = f_i(4) \quad i \in \{c_{i,x} \geq 2\}$$

类似地可以得到第 2 层边界格点未知离散速度分布函数

$$\begin{aligned} f_i(2) &= f_i(5) \\ i &\in \{c_{i,x} \geq 3\} \end{aligned}$$

图 5 给出了第 0、1、2 边界设置的示意图。第 0、1、2 层边界格式可以写成统一的形式

$$\begin{aligned} f_i(l) &= f_i(l+3) \\ i &\in \{c_{i,x} \geq l+1\} \\ l &= 0, 1, 2 \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $l=0, 1, 2$, 分别表示第 0、1、2 层格点。

以上给出了激波管左边界的设置细节。激波管右边界的设置是相似的。

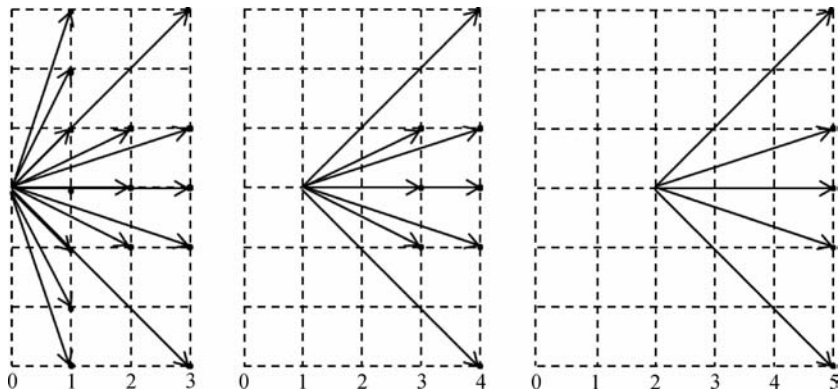


图 4 D2Q37B 模型未知离散速度分布函数示意图

Fig. 4 Unknown discrete velocities distribution function of the D2Q37B model

$$\begin{aligned} f_i(N_x) &= f_i(N_x - 3) \\ i &\in \{c_{i,x} \leq -1\} \\ f_i(N_x - 1) &= f_i(N_x - 4) \\ i &\in \{c_{i,x} \leq -2\} \\ f_i(N_x - 2) &= f_i(N_x - 5) \\ i &\in \{c_{i,x} \leq -3\} \end{aligned}$$

式中 N_x 为激波管右边界。激波管右侧边界条件写成统一的形式为

$$\begin{aligned} f_i(N_x - l) &= f_i(N_x - l - 3) \\ i &\in \{c_{i,x} \leq -(l + 1)\} \\ l &= 0, 1, 2 \end{aligned} \tag{4}$$

激波管上下边界是周期性边界条件。这里给出下边界设置的细节,上边界的设置是类似的。和激波管左右边界格式一样,激波管下边界同样要设置 3 层边界节点,只是未知的离散速度分布函数不同。周期性边界条件将第 0 层格点的未知离散速度分布函数设置成第 $N_y - 3$ 层格点的离散速度分布函数(N_y 为上边界),第 1 层格点的未知离散速度分布函数设置成第 $N_y - 2$ 层格点的离散速度分布函数,第 2 层格点的未知离散速度分布函数设置成第 $N_y - 1$ 层格点的离散速度分布函数。图 6 给出了周期性边界条件的示意图。

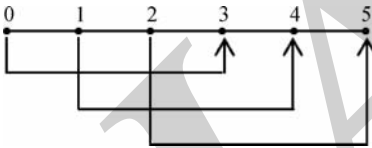


图 5 D2Q37B 模型充分发展边界条件示意图
Fig. 5 Full developed boundary condition of D2Q37B model

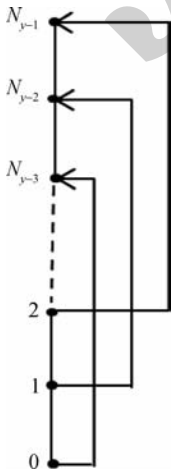


图 6 D2Q37B 模型周期性边界条件示意图
Fig. 6 Periodic boundary condition of D2Q37B model

对于第 0 层边界网格节点,所有竖直方向大于 1 或者等于 1 的粒子离散速度 $c_{i,y}$ 的分布函数都是未知的。对于周期性边界,第 0 层格点的未知离散速度分布函数被设置为 $N_y - 3$ 层格点的相应离散速度分布函数,即

$$\begin{aligned} f_i(0) &= f_i(N_y - 3) \quad i \in \{c_{i,y} \geq 1\} \\ \text{类似地,可以得到第 1 层和第 2 层边界格点的周期性边界条件} \\ f_i(1) &= f_i(N_y - 2) \quad i \in \{c_{i,y} \geq 2\} \\ f_i(2) &= f_i(N_y - 1) \quad i \in \{c_{i,y} \geq 3\} \\ \text{将激波管下边界条件写成统一的形式} \\ f_i(l) &= f_i(N_y - 3 + l) \quad i \in \{c_{i,y} \geq l + 1\} \\ l &= 0, 1, 2 \end{aligned} \tag{5}$$

用同样的方式可以得到激波管上边界条件

$$\begin{aligned} f_i(N_y) &= f_i(3) \quad i \in \{c_{i,y} \leq -1\} \\ f_i(N_y - 1) &= f_i(2) \quad i \in \{c_{i,y} \leq -2\} \\ f_i(N_y - 2) &= f_i(1) \quad i \in \{c_{i,y} \leq -3\} \end{aligned}$$

写成统一的形式

$$\begin{aligned} f_i(N_y - l) &= f_i(3 - l) \\ i &\in \{c_{i,y} \leq -(l + 1)\} \\ l &= 0, 1, 2 \end{aligned} \tag{6}$$

4 数值验证

给出格子模型、平衡态分布函数并设置好边界条件后,就可以模拟激波管流动了。激波管左半部分初始条件为:压力 $p = 4$,密度 $\rho = 4$,温度 $T = 1$,速度 $u = 0$ 。右半部分初始条件为:压力 $p = 1$,密度 $\rho = 1$,温度 $T = 1$,速度 $u = 0$ 。碰撞频率 $\omega = 1.5$ 。以上所给物理量都是无量纲物理量。图 7 给出了无量纲时间 $t = 0.15$ 时的模拟结果,横坐标 L 为无量纲的激波管长度。图中三角形是 D2Q37B 模型的数值模拟结果,星号断线是 D2Q33 格子模型^[17]的数值模拟结果。附录 B 给出了 D2Q33 的离散速度和相应权重^[18],灰线为解析解。数值模拟结果和解析解一致。

从图 7 温度分布图中可以看出,温度的数值模拟结果没有解析解陡峭。这是因为 LBM 模拟中增加了黏性。如果减少黏性,模拟的结果和解析解吻合得会更好,但减小黏性会影响数值稳定性。从图 7 也可以看出,速度曲线出现了轻微的振荡,但这种轻微的振荡是可以接受的。如果需要完全消除振荡,可以增加黏性,但相应地,精度会降低。如果使用基于 LBM 的有限差分算法,也可以完全消除振荡,但是程序会变得很复杂。

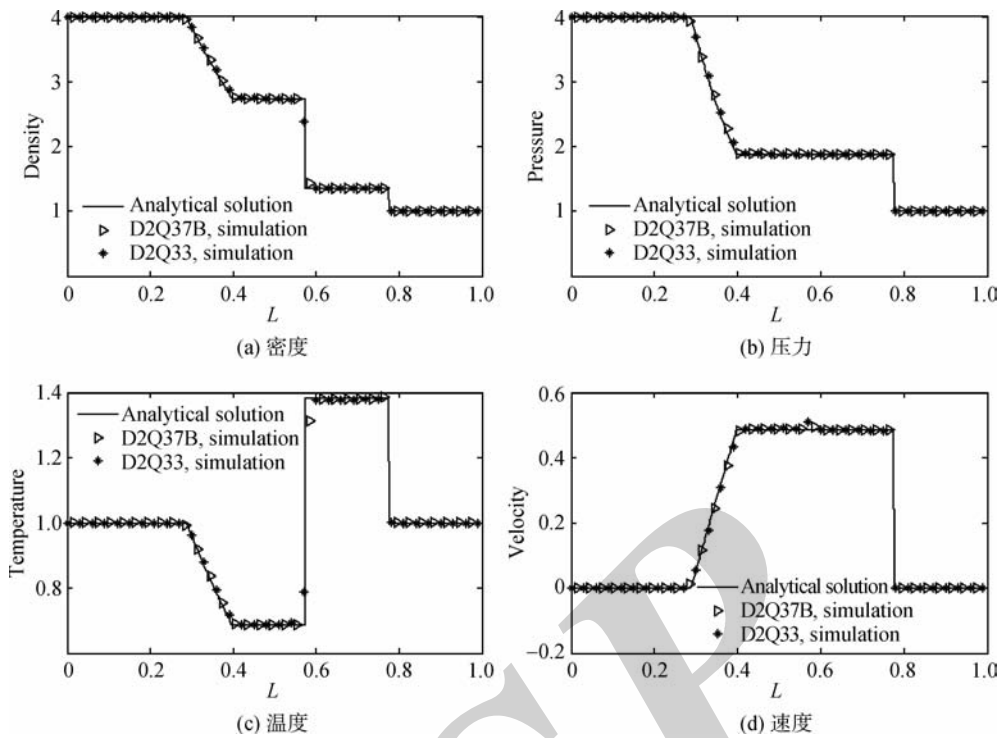


图 7 激波管流动的密度、压力、温度和速度分布图

Fig.7 Density, pressure, temperature and velocity distribution of the shock tube flow

5 结 论

首先,本文给出了一种紧凑型 4 阶格子模型。与 Philippi 等^[15] 给出的 4 阶格子模型相比,本文给出的格子模型具有更好的稳定性。接着,本文给出了适用于高阶格子模型的周期性边界、充分发展边界等边界的设置细节。使用本文给出的边界格式设置方式,可以保留 LBM 的迁移-碰撞机制。最后,用文中给出的格子模型和边界条件设置方式模拟了一维激波管流动,模拟结果和解析解吻合得很好。这说明,本文给出的格子模型和适用于高阶格子模型的边界设置方式是可行的。

参考文献:

[1] BENZI R,SUCCI S,VERGASSOLA M. The lattice Boltzmann equation; theory and applications[J]. Physics Reports,1992,222(3):145-197.

[2] SWIFT M R,ORLANDINI E,OSBORN W,et al. Lattice Boltzmann simulations of liquid-gas and binary fluid systems[J]. Physical Review E:Statistical Physics Plasmas Fluids and Related Interdisciplinary Topics,1996,54(5):5041-5052.

[3] QIAN Y H. Simulating thermohydrodynamics with lattice BGK models[J]. Journal of Scientific Computing,1993,8(3):231-242.

[4] CHEN Y,OHASHI H,AKIYAMA M. Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model without nonlinear devia-

tions in macrodynamic equations[J]. Physical Review E: Statistical Physics Plasmas Fluids and Related Interdisciplinary Topics,1994,50(4):2776-2783.

[5] CHEN Y,OHASHI H,AKIYAMA M. Heat transfer in lattice BGK modeled fluid[J]. Journal of Statistical Physics,1995,81(1/2):71-85.

[6] SHAN X,YUAN X F,CHEN H. Kinetic theory representation of hydrodynamics;a way beyond the Navier-Stokes equation[J]. Journal of Fluid Mechanics,2006,550(1):413-441.

[7] MINORU W,MICHIHISA T. Two-dimensional thermal model of the finite-difference lattice Boltzmann method with high spatial isotropy[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics,2003,67(2):210-215.

[8] GAN Y,XU A,ZHANG G,et al. Two-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows with high Mach number[J]. Physica A:Statistical Mechanics and its Applications,2008,387(8/9):1721-1732.

[9] SHIM J W. Univariate polynomial equation providing on-lattice higher-order models of thermal lattice Boltzmann theory[J]. Physical Review E:Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics,2013,87(1):417-433.

[10] SHIM J W. Multidimensional on-lattice higher-order models in the thermal lattice Boltzmann theory[J]. Physical Review E:Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics,2013,88(5):053310. 1-053310. 5.

[11] GUO Z,SHI B,ZHENG C. A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids,2002,39(4):325-342.

[12] GUO Z, ZHENG C, SHI B, et al. Thermal lattice Boltzmann equation for low Mach number flows: decoupling model[J]. Physical Review E: Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics, 2007, 75(3): 036704. 1-036704. 15.

[13] MEZRHAB A, BOUZIDI M H, LALLEMAND P. Hybrid lattice-Boltzmann finite-difference simulation of convective flows[J]. Computers and Fluids, 2004, 33(4): 623-641.

[14] VERHAEGHE F, BLANPAIN B, WOLLANTS P. Lattice Boltzmann method for double-diffusive natural convection [J]. Physical Review E: Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics, 2007, 75(2): 046705. 1-046705. 18.

[15] PHILIPPI P C, HEGELE L A, SANTOS L O E, et al. From the continuous to the lattice Boltzmann equation: the discretization problem and thermal models [J]. Physical Review E: Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics, 2006, 73(2): 645-666.

[16] MENG J, ZHANG Y. Diffuse reflection boundary condition for high-order lattice Boltzmann models with streaming-collision mechanism [J]. Journal of Computational Physics, 2014, 258(1): 601-612.

[17] SHIM J W. Multidimensional on-lattice higher-order models in the thermal lattice Boltzmann theory [J]. Physical Review E: Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics, 2013, 88(5): 053310. 1-0533105.

[18] SOD G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1978, 27(1): 1-31.

附录 A 适用于高阶格子的反弹边界条件

一维激波管的左右边界可以使用反弹格式。将使用 D2Q17 模型说明反弹格式在高阶格子中的实现细节。相同的反弹格式设置方法可以很容易推广到其他高阶格子模型。D2Q17 模型的矢量示意图见图 A1。

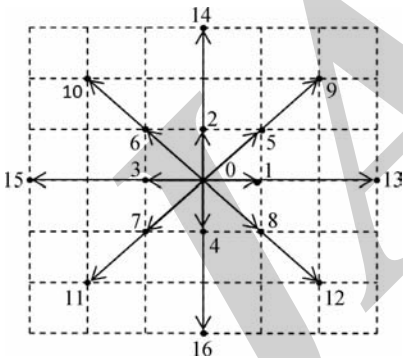


图 A1 D2Q17 模型矢量示意图
Fig. A1 Vector of the D2Q17 model

首先考虑激波管左边界的反弹边界条件设置。D2Q17 模型有 3 层格点涉及边界,即第 0、1、2 层格点。首先考虑第 0 层格点。第 0 层格点中所有水平离散速度大于或者等于 1 的分布函数都是未知的。这样的离散速度有 6 个,即 f_1 、 f_5 、 f_8 、 f_9 、 f_{12} 、 f_{13} 。这些未知离散速度分布函数,可以通过同一格点上的已知离散速度分布函数弹回得到,即

$$f_{1,5,8}(0) = f_{3,7,6}(0) \tag{A1}$$

$$f_{9,12,13}(0) = f_{11,10,15}(0) \tag{A2}$$

类似地,第 1 层和第 2 层格点上未知离散速度分布函数也可以通过相应格点上已知离散速度

分布函数的得到

$$f_{9,12,13}(1) = f_{11,10,15}(1) \tag{A3}$$

$$f_{13}(2) = f_{15}(2) \tag{A4}$$

用同样的方式可以得到激波管右边界的反弹边界条件设置

$$f_{3,7,6}(N_x) = f_{1,5,8}(N_x) \tag{A5}$$

$$f_{11,10,15}(N_x) = f_{9,12,13}(N_x) \tag{A6}$$

$$f_{11,10,15}(N_x - 1) = f_{9,12,13}(N_x - 1) \tag{A7}$$

$$f_{15}(N_x - 2) = f_{13}(N_x - 2) \tag{A8}$$

用于 D2Q17 模型的反弹格式很容易推广到 D2Q37B 模型或者其他格子模型中。用反弹边界格式模拟激波管流动,得到的模拟结果和解析解吻合得很好,与用充分发展边界格式模拟激波管流动得到的结果也是一致的。

附录 B Shim 给出的 D2Q33 模型

表 B1 D2Q33 模型的离散速度及其权重系数
Table B1 Discrete velocities and weight coefficients of D2Q33 model

k	c_i	w_i
1	(0,0)	0.1619865087
4	Perm($\pm r, 0$)	0.1432039662
4	Perm($\pm r, \pm r$)	0.3388399563
4	Perm($\pm 2r, 0$)	0.05561115600
8	Perm($\pm 2r, \pm r$)	0.01281690773
4	Perm($\pm 2r, \pm 2r$)	$8.447988507 \times 10^{-5}$
4	Perm($\pm 3r, 0$)	$1.132543765 \times 10^{-3}$
8	Perm($\pm 4r, \pm 4r$)	$3.455525091 \times 10^{-6}$

注: $r=1.15877919077$ 。