

缘板阻尼结构减振特性的影响因素分析

阳 刚, 周 标, 臧朝平, 陈俊杰

(南京航空航天大学 能源与动力学院 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 基于简化的叶片-缘板阻尼结构模型,开展缘板阻尼结构干摩擦阻尼减振特性的计算分析。阐述了谐波平衡法预测叶片响应的基本原理,并提出了一种基于离散傅里叶变换的雅克比矩阵快速计算方法,结果表明:该方法能够实现谐波平衡法的加速,并使叶片响应计算效率提高 8 倍以上。在此基础上,重点探究了离心力、缘板阻尼块质量、激振力、缘板倾斜角及缘板阻尼块转动等因素对叶片响应特性的影响,并总结上述关键设计参数对叶片-缘板阻尼结构减振特性的影响规律。

关 键 词: 缘板阻尼; 叶片振动; 干摩擦阻尼; 谐波平衡法; 减振特性

中图分类号: V231.92 **文献标志码:** A

Analysis of effect factors on damping characteristics for underplatform dampers

YANG Gang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping, CHEN Junjie

(Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,
College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Damping performance of the underplatform damper was numerically investigated on the basis of a simplified model of blades with an underplatform damper. The harmonic balance method was employed to predict the blade response in the frequency domain. A simple expression of the Jacobian matrix by means of discrete Fourier transform was proposed, allowing acceleration of the harmonic balance method. Result showed that, the computational efficiency was improved more than 8 times in terms of blade response prediction. The impacts of key parameters, including centrifugal force, damper mass, excitation level, underplatform angle and the rolling motion of the damper, were thoroughly investigated.

Key words: underplatform damper; blade vibration; dry friction damping; harmonic balance method; damping characteristics

采用干摩擦阻尼技术以增加叶片结构阻尼,是降低叶片振动响应并预防叶片高循环疲劳失效的主要手段。叶片-缘板阻尼结构以其不受温度限制、结构简单、减振效果显著的特点得以在航空发动机风扇(如 CFM56-3 第 1 级风扇)和涡轮(如 PW4000 高压涡轮, RB211-524G 低压涡轮)中广泛应用^[1]。缘板阻尼块位于相邻两个叶片的缘板凸台与伸根之间的空腔内,在旋转离心力作用下与缘板凸台接触,利用接触面之间的干摩擦效应达到消耗叶片振动能量,抑制叶片振动的目的。

收稿日期: 2017-12-05
基金项目: 国家自然科学基金(51405460); 江苏省自然科学基金(BK20161485)
作者简介: 阳刚(1994—),男,硕士生,主要从事航空发动机结构动力学研究。

引用格式: 阳刚,周标,臧朝平,等. 缘板阻尼结构减振特性的影响因素分析[J]. 航空动力学报,2019,34(1):115-124. YANG Gang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping, et al. Analysis of effect factors on damping characteristics for underplatform dampers[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(1): 115-124.

在长期的工程实践中,多种不同结构形式的叶片-缘板阻尼结构的应用证明其对于抑制叶片振动幅值非常有效,然而其接触面力学特征的强非线性以及接触运动行为(分离-黏滞-滑移)的不确定性,使得对叶片-缘板阻尼结构的工程设计遇到很大难题。

为了描述叶片-缘板阻尼结构干摩擦接触面的力学特征和相对运动行为,国际学术界纷纷开展了针对摩擦模型和接触运动模型的研究^[2-3],在此基础上发展了以谐波平衡法(harmonic balance method, HBM)为代表的考虑干摩擦效应的叶片振动响应预测方法^[4-11],并结合实验数据进行比较分析,以指导干摩擦阻尼结构的优化设计。国内学者也对干摩擦阻尼结构动力学特性开展了研究。徐超等^[12]分析了法向载荷对微滑移摩擦系统振动响应的影响;吴向宇等^[13]分析了不同类型的叶片-缘板阻尼结构,针对缘板阻尼块质量提出了改进设计方案;孙莹等^[14]针对高压涡轮叶片,提出了一种气动激振力的计算方法,并采用 1 阶谐波平衡法计算了含缘板阻尼结构的叶片的稳态应力响应;漆文凯等^[15]通过 ANSYS 软件,获得了正压力对含叶根干摩擦阻尼的平板叶片振动特性的影响规律;李琳等^[16]基于单自由度模型对典型航空发动机叶片缘板阻尼器在宽频多阶次激励下的减振效果进行计算与分析。总的来说,国际学术界对干摩擦阻尼结构的理论和实验研究已经相当深入,初步形成了干摩擦阻尼结构的计算体系和设计方法^[17-20]。相比之下,国内对干摩擦阻尼器的分析和设计仍处于起步阶段,与之密切相关的考虑干摩擦效应的结构数值模拟和实验研究仍需进一步深入。

为了获得简单高效的叶片-缘板阻尼结构,需要掌握各关键设计参数对其减振特性的影响规律。以此为出发点,本文开展叶片-缘板阻尼结构减振特性的影响因素分析。首先建立了叶片-缘板阻尼结构的简化分析模型;其次,阐述了基于谐波平衡法计算叶片响应的基本原理;在此基础上,针对高阶谐波平衡法计算效率较低问题,提出了一种雅克比矩阵的快速计算方法,可大幅提高高阶谐波平衡法对叶片响应的预测速度;最后,重点探究了离心力、缘板阻尼块质量、激振力、缘板倾斜角及缘板阻尼块转动等因素对叶片振动响应的影响,给出了上述关键设计参数对叶片-缘板阻尼结构减振特性的影响规律。

1 叶片-缘板阻尼结构的分析模型

本节将重点介绍叶片-缘板阻尼结构分析模型的建立方法,为后续开展叶片-缘板阻尼结构关键设计参数的定性分析提供基础。

1.1 叶片-缘板阻尼结构建模

航空发动机的实际叶片-缘板阻尼结构具有复杂的几何结构特征。考虑干摩擦接触的强非线性特征,针对实际叶片-缘板阻尼结构模型进行分析,对分析和计算能力都提出了很高的要求。一种广为接受的研究途径是从实际叶片-缘板阻尼结构中提取其核心的动力学特征,建立简化叶片-缘板阻尼结构分析模型,如图 1 所示。采用悬臂梁模拟实际叶片,并重点保留缘板阻尼块与两个缘板凸台间干摩擦接触的几何特征。

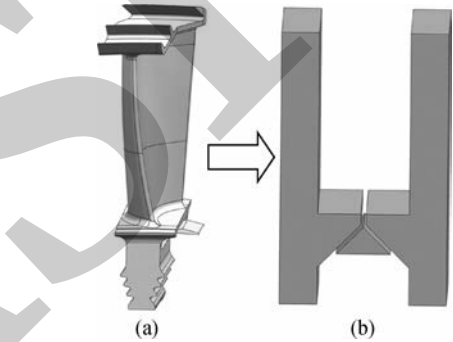


图 1 航空发动机涡轮叶片-缘板阻尼结构简化过程
Fig. 1 Simplification process of aero-engine turbine blades with an underplatform damper

根据简化的叶片-缘板阻尼结构,建立系统的集中参数模型,如图 2 所示。

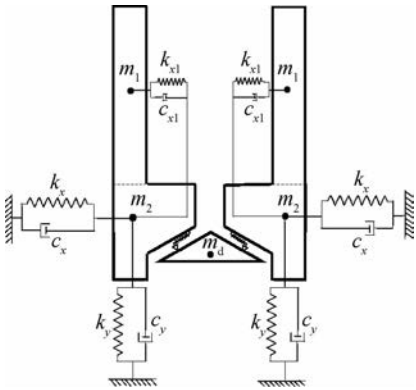


图 2 叶片-缘板阻尼结构集中参数模型
Fig. 2 Lumped parameter model of blades with an underplatform damper

两个相邻叶片的叶根分别作用相同相位的外激振力 f 。叶身与叶根部分的等效质量分别为 m_1 、 m_2 ，叶根通过平面内弹簧 k_x 、 k_y 固定，弹簧阻尼分别为 c_x 、 c_y 。叶片仅考虑周向弯曲振动，即叶身与叶根通过 x 方向的弹簧 k_{x1} 连接，弹簧阻尼 c_{x1} 。楔形缘板阻尼块底边边长为 S ，两个缘板倾斜角分别为 α_1 、 α_2 ，如图 3 所示。简化楔形缘板阻尼块等效质量为 m_d ，通过平面弹簧 k_{xd} 、 k_{yd} 、 $k_{\theta d}$ 固定，弹簧阻尼分别为 c_{xd} 、 c_{yd} 、 $c_{\theta d}$ 。楔形缘板阻尼块受接触面的法向接触压力 N_1 、 N_r 与切向摩擦力 T_1 、 T_r ，以及叶盘旋转产生的离心力 P 的作用。

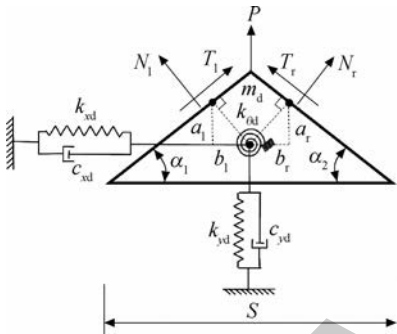


图 3 简化楔形缘板阻尼块结构示意图
Fig. 3 Schematic diagram of simplified wedge-shaped underplatform damper

文献[19]指出，采用整体滑移模型，即假设接触面变形及接触压力均匀分布，接触面内所有接触点同时滑移或黏滞，能较准确地描述叶片-缘板阻尼结构的干摩擦接触面的接触行为。因此，本文采用了一种点接触形式的整体滑移模型，并假设接触点恰好位于质心关于两个接触面的垂线上。 a_1 、 b_1 、 a_r 、 b_r 分别表示质心到两个接触点的距离在水平与竖直方向上的投影。参考文献[17]，叶片-缘板阻尼结构的集中参数模型各参数在表 1 中给出。其中，接触面上的切向接触刚度与法向接触刚度为 k_t 、 k_n ，摩擦因子为 μ ，并将结构的各阶模态阻尼比 ζ 取同一数值。

1.2 迟滞库伦摩擦模型

现有的干摩擦阻尼特性研究普遍采用一种考虑接触刚度的迟滞库伦摩擦模型来描述接触面的力学特征。该模型认为在法向与切向载荷作用下，接触点间存在一定量的弹性变形，并由此在经典的库伦摩擦模型中引入表征法向和切向接触刚度的弹簧单元。基于迟滞库伦摩擦模型的平面变压力二维接触模型如图 4 所示。

表 1 集中参数模型各参数数值
Table 1 Parameter values of the lumped parameter model

参数	数值	参数	数值
$k_x/10^5$ (N/m)	3.95	m_1/kg	0.1
$k_y/10^5$ (N/m)	3.95	m_2/kg	0.1
$k_{x1}/10^5$ (N/m)	3.95	m_d/kg	0.0044
$k_{xd}/10^5$ (N/m)	2	$\alpha_1/(\text{^\circ})$	45
$k_{yd}/10^5$ (N/m)	1	$\alpha_2/(\text{^\circ})$	45
$k_{\theta d}/(\text{N}\cdot\text{m})$	1.6	ζ	0.005
$k_t/10^5$ (N/m)	1	S/m	0.012
$k_n/10^5$ (N/m)	1	P/N	3
f/N	3	μ	0.3

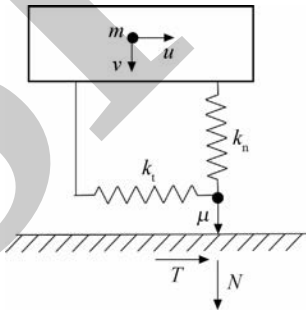


图 4 变压力二维接触模型
Fig. 4 Two-dimensional contact model with variable normal load

图 4 中 u 、 v 分别表示接触点间的切向相对位移与法向相对位移。平面变压力二维接触模型存在 3 种可能的接触状态：滑移、黏滞和分离，其法向接触压力 N 与法向相对位移 v 之间的关系为

$$N = \max(k_n v, 0) \tag{1}$$

切向摩擦力 T 与切向相对位移 u 之间的关系为

$$T = \begin{cases} k_t(u - u_0) & \text{黏滞} \\ \text{sgn}(\dot{u})\mu N & \text{滑移} \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \tag{2}$$

其中 sgn 表示符号函数， u_0 表示黏滞起始时刻的切向相对位移值。

1.3 叶片-缘板阻尼结构的动力学方程

根据图 2 所示的集中参数模型，结合图 4 所示的平面二维变压力接触模型，构建叶片-缘板阻尼结构的动力学方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{x1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{x1}(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{x1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{x2}\dot{x}_2 + k_{x1}(x_2 - x_1) + k_{x2}x_2 = f + F_{xr} \\ m_2 \ddot{y}_3 + c_{y1}\dot{y}_3 + k_{y1}y_3 = F_{yr} \\ m_d \ddot{x}_4 + c_{xd}\dot{x}_4 + k_{xd}x_4 = -F_{xr} - F_{x1} \\ m_d \ddot{y}_5 + c_{yd}\dot{y}_5 + k_{yd}y_5 = -F_{yr} - F_{y1} \\ m_2 \ddot{x}_6 + c_{x1}(\dot{x}_6 - \dot{x}_8) + c_{x6}\dot{x}_6 + k_{x1}(x_6 - x_8) + k_{x6}x_6 = f + F_{x1} \\ m_2 \ddot{y}_7 + c_{y1}\dot{y}_7 + k_{y1}y_7 = F_{y1} \\ m_1 \ddot{x}_8 + c_{x1}(\dot{x}_8 - \dot{x}_6) + k_{x1}(x_8 - x_6) = 0 \\ I_d \ddot{\theta}_9 + c_{\theta d}\dot{\theta}_9 + k_{\theta d}\theta_9 = F_{xr}a_r + F_{x1}a_1 - F_{yr}b_r + F_{y1}b_1 \end{cases} \quad (3)$$

其中 I_d 表示缘板阻尼块关于质心的转动惯量, F_{x1} 、 F_{y1} 、 F_{xr} 、 F_{yr} 表示作用在缘板阻尼块上的接触力在水平与竖直方向上的分量,其投影公式为

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{xr} \\ F_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ N_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 N_1 、 N_r 表示法向接触压力; T_1 、 T_r 表示切向摩擦力,根据式(1)~式(2)得到。同时根据公式

$$\begin{bmatrix} u_{t1} \\ v_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & -\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_{t2} \\ v_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & \sqrt{a_r^2 + b_r^2} \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_9 \end{bmatrix} \quad (5)$$

可得到接触点间的切向相对位移 u_{t1} 、 u_{t2} 和法向相对位移 v_{n1} 、 v_{n2} 与直角坐标系下的相对位移 x_1 、 y_1 、 x_r 、 y_r 的投影关系,其中直角坐标系下的相对位移可通过式(3)中点接触对的位移相减得到。

2 叶片-缘板阻尼结构响应计算方法

令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, y_3, x_4, y_5, x_6, y_7, x_8, \theta_9]^T$, 则式(3)可写成矩阵形式的非线性振动微分方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{f}\sin(\omega t) \quad (6)$$

其中 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{C}$ 分别表示 $N_d \times N_d$ 的质量、刚度和阻尼矩阵, N_d 表示系统自由度数, $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 表示非线性干摩擦力, $\mathbf{f}\sin(\omega t)$ 表示具有单一激振频率 ω 的外激振力。本章首先介绍谐波平衡法求解非线性振动方程(式(6))的基本理论。在此基础上,提出一种谐波平衡法的加速方法,旨在大幅提高叶片-缘板阻尼结构的响应预测速度。

2.1 谐波平衡法

大多数非线性系统在周期激励下的位移解具

有周期性,能对其位移解 $\mathbf{x}$ 进行傅里叶级数展开

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}^0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{X}^{ck} \cos(k\omega t) + \mathbf{X}^{sk} \sin(k\omega t) \quad (7)$$

其中 N_h 表示截取的谐波阶数,将傅里叶系数归结为向量形式 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^{c1}, \mathbf{X}^{s1}, \dots, \mathbf{X}^{cN_h}, \mathbf{X}^{sN_h}]^T$, 并定义系数转换矩阵

$$\mathbf{H}(t) = [\mathbf{I}, \cos(\omega t)\mathbf{I}, \sin(\omega t)\mathbf{I}, \dots, \cos(N_h\omega t)\mathbf{I}, \sin(N_h\omega t)\mathbf{I}] \quad (8)$$

其中 $\mathbf{I}$ 表示 N_d 阶单位矩阵。则式(7)改写为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X} \quad (9)$$

引入频域求导算子

$$\nabla = \text{diag}(\nabla_0, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h}), \nabla_k = k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

则速度 $\dot{\mathbf{x}}$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{x}}$ 与向量 $\mathbf{X}$ 的关系可写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \omega \mathbf{H} \cdot \nabla \cdot \mathbf{X} \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) = \omega^2 \mathbf{H} \cdot \nabla^2 \cdot \mathbf{X} \quad (11)$$

同理,非线性力 $\mathbf{f}_{nl}$ 与外激振力 $\mathbf{f}$ 能够通过傅里叶级数展开表示为

$$\mathbf{f}_{nl}(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{f}(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{F}_{nl}$ 表示非线性力的傅里叶系数向量, $\mathbf{F}$ 表示激振力的傅里叶系数向量。将式(9)~式(12)代入非线性方程(式(6)),并采用伽辽金法积分计算,将与时间有关的量 $\mathbf{H}$ 消去。原方程即变为一系列仅与傅里叶系数向量有关的非线性代数方程

$$\mathbf{G}(\omega, \mathbf{X}) = \mathbf{P}(\omega) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{N}_m \omega^2 \nabla^2 + \mathbf{N}_c \omega \nabla + \mathbf{N}_k$, 其中 $\mathbf{N}_m$ 是一个分块对角矩阵 $\mathbf{N}_m = \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}, \dots)$, $\mathbf{N}_k$ 、 $\mathbf{N}_c$ 的形式与 $\mathbf{N}_m$ 相同。非线性代数方程(式(13))可以通过通用的牛顿-拉夫逊法进行求解,得到非线性动力学系统周期解的傅里叶系数向量 $\mathbf{X}$ 。在迭代

计算过程中,需要根据当前迭代步的 $\mathbf{X}$ 预估非线性力的傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})$ 以确定下一迭代步的搜索方向。采用文献[4]中,基于离散傅里叶变换(discrete fourier transform, DFT)的时频转换技术(alternating frequency-time technique, AFT)能够快速实现这一预估计算,其步骤如下:

$$\mathbf{X} \xrightarrow{H \cdot \mathbf{X}} \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rightarrow f_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \xrightarrow{\text{DFT}} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) \quad (14)$$

通过式(9)~式(11),由 $\mathbf{X}$ 转换出时域内的位移 $\mathbf{x}$ 、速度 $\dot{\mathbf{x}}$,再根据迟滞库伦摩擦模型转换得到时域上的非线性力 $f_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$,最后通过 DFT 即可得到的非线性力的傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})$ 。

当激振频率 ω 发生连续变化时,将谐波平衡法与弧长延拓技术(arc length continuation)相结合,能够高效获取叶片-缘板阻尼结构在某一频带范围内的周期响应。通常情况下,由式(13)可得到某频率 ω_0 下的延拓初始点的解 $(\omega_0, \mathbf{X}_0)$ 。由此,弧长延拓技术能够根据延拓初始点的解并结合数值方法按照特定的连续函数曲线给出一系列曲线路径上的解 $(\omega_j, \mathbf{X}_j)$,并满足方程 $\mathbf{G}(\omega_j, \mathbf{X}_j) = 0$ 。在弧长延拓技术中, ω 和 $\mathbf{X}$ 均视为该函数曲线的路径上弧长 s 的函数,即当已知弧长连续算法的弧长值 s 时,搜索方向由下列公式给出:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_x \frac{d\mathbf{X}}{ds} + \mathbf{G}_\omega \frac{d\omega}{ds} = 0 \\ \left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\|^2 + \left\| \frac{d\omega}{ds} \right\|^2 = 1 \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{G}_\omega = \partial \mathbf{G}(\omega, \mathbf{X}) / \partial \omega$, $\mathbf{G}_x$ 表示雅克比矩阵,其形式如下:

$$\mathbf{G}_x = \frac{\partial \mathbf{G}(\omega, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{P}(\omega) + \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (16)$$

2.2 谐波平衡法的加速算法

采用谐波平衡法对叶片-缘板阻尼结构进行响应预测过程中,耗时最长且最为关键的步骤是通过牛顿-拉夫逊法求解非线性代数方程(式(13))时,利用式(16)对雅克比矩阵 $\mathbf{G}_x$ 的计算。传统的非线性方程求解器采用数值差分法得到雅克比矩阵。由于非线性力的傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})$ 采用时频转换技术得到,故而在该过程中包含了大量的离散傅里叶变换计算。当非线性系统的自由度数目增加时,其雅克比矩阵的计算量呈几何级数趋势增加,将大幅降低叶片-缘板阻尼结构的响应计算速度。为此,本节提出一种基于离散傅里叶变换原理的雅克比矩阵计算方法,只需要进行少量离散傅里叶变换就能够快速准确地

获得雅克比矩阵。考虑式(9),位移 $\mathbf{x}$ 关于其傅里叶系数向量 $\mathbf{X}$ 中的各元素的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(l)}{\partial X^{ck}} &= \cos\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) \\ \frac{\partial \mathbf{x}(l)}{\partial X^{sk}} &= \sin\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

其中 N_s 表示离散傅里叶变换中的一个周期内的采样总点数, k 表示位移傅里叶系数向量 $\mathbf{X}$ 的谐波阶次, l 表示采样点序号,并有 $2\pi l/N_s = \omega t$ 。结合离散傅里叶变换公式

$$\mathbf{F}_{nl}(h) = \sum_{l=0}^{N_s-1} \mathbf{f}_{nl}(l) e^{-i\frac{2\pi}{N_s}hl} \quad (18)$$

第 h 阶复数傅里叶系数 $F_{nl}(h)$ 关于 X^{ck} 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}(h)}{\partial X^{ck}} &= \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial X^{ck}} e^{-i\frac{2\pi}{N_s}hl} = \\ &= \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial \mathbf{x}(l)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(l)}{\partial X^{ck}} e^{-i\frac{2\pi}{N_s}hl} = \\ &= \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial \mathbf{x}(l)} \cos\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N_s}hl} \end{aligned} \quad (19)$$

同理得到 $F_{nl}(h)$ 关于 X^{sk} 的导数。考虑到 h 阶复数傅里叶系数 $F_{nl}(h)$ 与非线性力傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})$ 元素的关系 $\mathbf{F}_{nl}(h) = N_s(\mathbf{F}_{nl}^{ch} - i\mathbf{F}_{nl}^{sh})/2$,令方程(19)的等式两边实部与虚部分别相等,即得到非线性力傅里叶系数向量 $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X})$ 的各元素关于 $\mathbf{X}$ 各元素的导数

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{nl}^{ch}}{\partial X^{ck}} = \frac{2}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial \mathbf{x}(l)} \cos\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) \cos\left(\frac{2\pi hl}{N_s}\right) \\ \frac{\partial F_{nl}^{ch}}{\partial X^{sk}} = \frac{2}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial \mathbf{x}(l)} \sin\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) \cos\left(\frac{2\pi hl}{N_s}\right) \\ \frac{\partial F_{nl}^{sh}}{\partial X^{ck}} = \frac{2}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial \mathbf{x}(l)} \cos\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) \sin\left(\frac{2\pi hl}{N_s}\right) \\ \frac{\partial F_{nl}^{sh}}{\partial X^{sk}} = \frac{2}{N_s} \sum_{l=0}^{N_s-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}(l)}{\partial \mathbf{x}(l)} \sin\left(\frac{2\pi kl}{N_s}\right) \sin\left(\frac{2\pi hl}{N_s}\right) \end{cases} \quad (20)$$

式(20)指出,如果已知时域上非线性干摩擦力 $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 关于时域位移 $\mathbf{x}$ 的导数,那么根据式(17)~式(20),仅需对时域向量 $\partial \mathbf{f}_{nl}(l)/\partial \mathbf{x}(l)$ 进行一次离散傅里叶变换,即可得到雅克比矩阵 $\mathbf{G}_x$ 。

基于式(1)~式(2),计算非线性干摩擦力 $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ 时,离散傅里叶变换的采样必然使得对黏滞起始时刻的判断产生偏差,将导致依据式(17)~式(20)计算的雅克比矩阵不准确。此偏差

主要产生于滑移转黏滞的临界时刻,由此将非线性力 $f_{nl}(x,\dot{x},t)$ 进行如下拆分:

$$f_{nl} = f_x(T) = f_x(T_1) + f_x(T_2) \tag{21}$$

其中 f_x 表示非线性干摩擦力 $f_{nl}(x,\dot{x},t)$ 与 T 的函数关系,可由式(4)导出。 T_1 表示实际运动过程中的切向摩擦力, T_2 表示由离散采样导致的切向摩擦力偏移,其具体表达式分别如下:

$$T_1 = \begin{cases} k_t(u - u^*) & \text{黏滞} \\ \text{sgn}(\dot{u})\mu N & \text{滑移} \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \tag{22}$$

$$T_2 = \begin{cases} \text{sgn}(\dot{u})\mu N_0 - k_t u_0 & \text{黏滞} \\ 0 & \text{滑移} \\ 0 & \text{分离} \end{cases}$$

其中 u^* 表示实际振动过程中接触状态发生滑移转黏滞的临界时刻下的接触面切向相对位移,是一个常数量。 u_0 表示采样中假设的接触状态发生滑移转黏滞临界时刻(采样时刻)下,接触面切向相对位移, N_0 表示该临界采样时刻下的法向接触压力数值。

对于 T_1 ,可通过式(17)~式(20)计算对应的雅克比矩阵。 T_2 对应的雅克比矩阵计算公式如下:

$$\frac{\partial F_{nl}^2}{\partial \mathbf{X}} = F \left[\frac{\partial f_x(T_2)}{\partial T_2} \cdot \frac{T_2(u_0)}{\partial u_0} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \right] \frac{\partial x_0}{\partial \mathbf{X}} \tag{23}$$

其中 F 表示离散傅里叶变换,由式(5)可得常数导数矩阵 $\partial u_0 / \partial x_0$,由式(9)可得与时间有关的导数向量 $\partial x_0 / \partial \mathbf{X} = \mathbf{H}(t_0)$,其中 t_0 为发生滑移转黏滞的临界采样时刻,可根据采样规律得到。通过式(21)~式(23)对依据式(17)~式(20)计算得到的雅克比矩阵进行修正,能够快速准确地计算雅克比矩阵 $\mathbf{G}_x$,从而极大的提高谐波平衡法对叶片-缘板阻尼结构响应的计算效率。

2.3 谐波平衡法的计算精度

在基于谐波平衡法的叶片-缘板阻尼结构响应预测方法中,谐波阶次 N_h 对响应的计算精度起着决定性的作用。出于计算精度和计算量平衡考虑,本文经过一系列的试计算后选定 $N_h=5$,计算了简化叶片-缘板阻尼结构在给定离心载荷 $P=3\text{ N}$ 和激振力 $f=3\text{ N}$ 下的叶片响应。另外,直接积分法(direct time integration,DTI)在步长较小时,具有较高的精度,广泛用于对谐波平衡法计算结果准确性的验证。本文采用 Newmark 直接积分法,对基于谐波平衡法的叶片响应幅频曲

线计算结果进行检验,如图 5 所示。

由图 5 可知,基于谐波平衡法的叶片响应计算结果与直接积分法的计算结果保持了良好的一致性。而相较于直接积分法,基于谐波平衡法的叶片-缘板阻尼结构响应预测方法在计算效率和计算精度的平衡上拥有明显的优势。

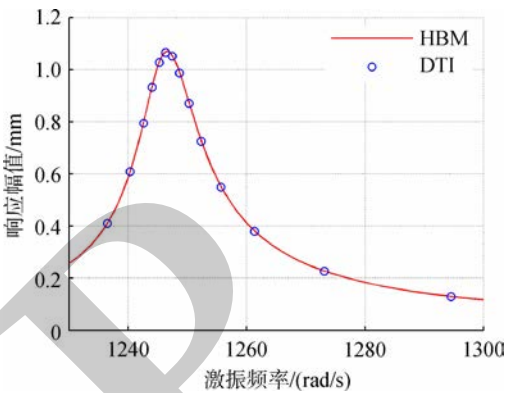


图 5 叶片响应的幅频特性曲线
Fig. 5 Amplitude vs. frequency of blade response

2.4 谐波平衡法的加速计算效率

采用文中第 2.2 节介绍的雅克比矩阵快速计算方法,理论上能够提高基于谐波平衡法的叶片-缘板阻尼结构的响应预测速度。表 2 分别列出了在叶片响应预测过程中计算单个频率点的响应与某一频带范围内的响应(即幅频曲线)所耗费的计算时间。结果表明,无论对于单个频率点的叶片响应计算,还是针对某一频带范围内的响应预测,快速计算雅克比矩阵都能够有效地实现谐波平衡法的加速,从而大幅提高叶片响应预测计算效率。

表 2 计算加速前后的计算时间耗费
Table 2 Time consumption before and after computational acceleration

加速状态	计算时间 t/s	
	单个频率点	幅频曲线
加速前	4	890
加速后	0.2	100

3 叶片-缘板阻尼结构减振特性分析

本节针对图 2 所示的简化叶片-缘板阻尼结构模型,基于加速的谐波平衡法计算叶身沿周向的弯曲振动响应,重点探究离心力、缘板阻尼块质量、激振力、缘板倾斜角以及缘板阻尼块转动等因

素对叶片-缘板阻尼结构减振特性的影响。

3.1 离心力的影响

航空发动机叶盘结构的高速转动使缘板阻尼块受到离心力 P 的作用

$$P = m_d \Omega^2 r \tag{24}$$

其中 Ω 表示叶盘转速, r 表示缘板阻尼块到叶盘转轴中心的距离。从分离变量的角度出发, 首先考虑缘板阻尼块质量保持不变的情况。此时, 缘板阻尼块所受到离心力 P 主要受转速 Ω 的影响。取叶片激振力 $f=3\text{ N}$, 得到在不同叶盘转速下 (离心力水平从 3~400 N), 叶身振动响应的幅频曲线变化规律, 如图 6 所示。可以看出, 随着离心力水平的提高, 叶片响应的幅频曲线呈整体向右移动趋势, 同时峰值振幅水平呈先减小后增加的趋势。分析可知, 离心力过大时, 缘板阻尼块与缘板凸台之间的接触面将以黏滞接触状态为主, 其相对滑移的缺失将削弱干摩擦阻尼效应, 叶片振幅随离心力的增大而增大。

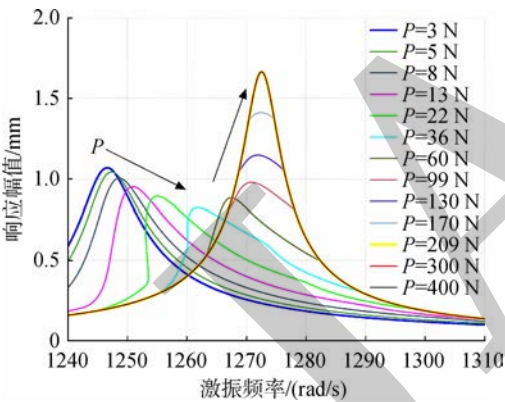


图 6 不同离心力水平下的幅频曲线
Fig. 6 Amplitude vs. frequency with different centrifugal force levels

由图 6 进一步得到叶片幅频响应曲线的峰值振幅随离心力的变化规律——离心力特性曲线 (离心力 P 随转速 Ω 变化), 如图 7 所示。在合适的离心力水平下 (区域 b), 缘板阻尼块具有良好的减振效果。同时, 考虑叶盘转速 Ω 保持恒定, 激振力 $f=3\text{ N}$, 得到在不同的缘板阻尼块质量下, 叶身振动响应的离心力特性曲线 (离心力 P 随缘板阻尼块质量 m_d 变化), 并将其与随转速变化的离心力特性曲线在图 7 中相比较。

由图 7 可知, 缘板阻尼块的干摩擦减振效果主要取决于其离心力水平, 而其自身的惯性质量对叶片振动幅值水平的影响甚微。为验证这一结

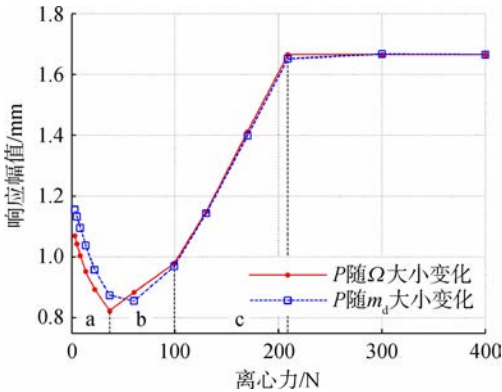


图 7 峰值振幅随离心力变化
Fig. 7 Peak vibration amplitude varies with the centrifugal force

论, 分别取不同的缘板阻尼块质量 m_d , 并选择合适的转速来保证离心力水平一致 ($P=3\text{ N}$), 当激振力 $f=3\text{ N}$ 时, 叶身振动的幅频响应曲线如图 8 所示。可以看出, 当离心力水平保持恒定时, 大幅度的缘板阻尼块质量变化仅导致叶片振动幅频曲线整体微幅偏移, 并没有引起叶片振动幅值的显著变化。

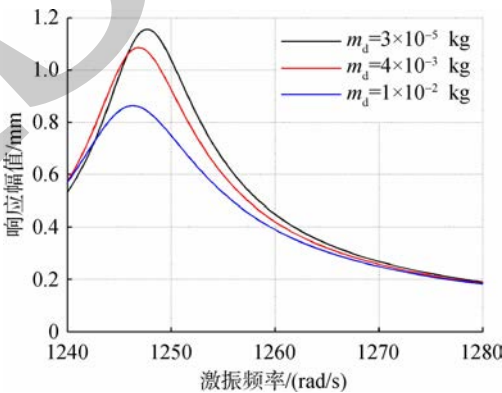


图 8 幅频曲线随缘板阻尼块质量变化
Fig. 8 Amplitude vs. frequency varies with damper mass

进一步考虑安装不同质量的缘板阻尼块对离心力特性曲线的影响, 其中离心力随转速变化, 激振力 $f=3\text{ N}$, 如图 9 所示。可以得到与图 7 一致的结论: 离心力水平是缘板阻尼块减振效果的决定性因素。若给定某航空发动机叶盘结构的工作转速, 据此结论可通过合理设计缘板阻尼块质量来调节其在该转速下的离心力达到合适的水平, 从而获得最优的干摩擦阻尼减振效果。

3.2 激振力的影响

干摩擦接触面具有强非线性动力学特性, 因此激振力水平对叶片-缘板阻尼结构的响应特性

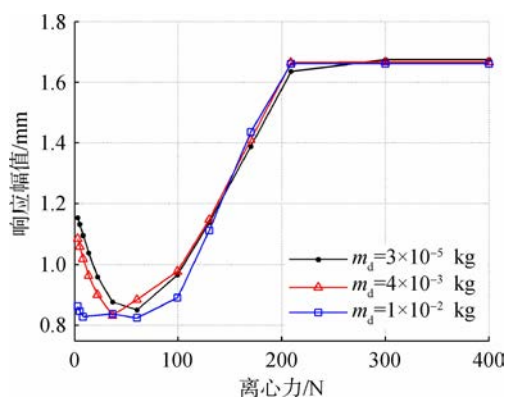


图 9 缘板阻尼块质量对离心力特性曲线的影响
Fig. 9 Effect of underplatform damper mass on centrifugal force characteristic curve

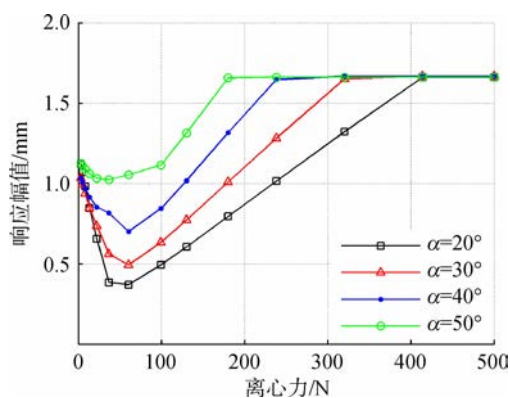


图 11 缘板倾斜角对离心力特性曲线的影响
Fig. 11 Effect of the underplatform angle on centrifugal force characteristic curve

有着重要影响。图 10 给出当离心力载荷 $P=60$ N 时,叶身振动响应幅频曲线的峰值振幅随激振力的变化规律——激振力特性曲线。可以看出,在激振力较小时(区域 a),叶片与缘板阻尼块之间的相对运动幅度也较小,接触面基本不存在相对滑移现象,近似处于完全黏滞状态,因而叶片峰值振幅随激振力增加呈线性变化趋势。当激振增加到区域 b 阶段,接触面进入滑移状态,因而叶片峰值振幅随激振力增加呈非线性增长趋势,此时叶片-缘板阻尼结构的干摩擦效应能够有效地抑制叶片振动。当激振力进一步增大至区域 c 时,接触面出现分离,使得缘板阻尼结构的减振效果削弱,叶片峰值振幅随激振力增加恢复为线性增长趋势。

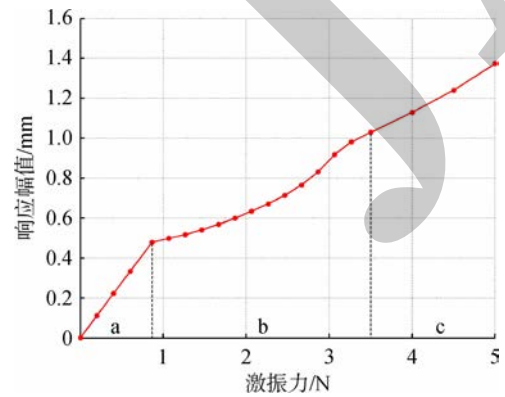


图 10 峰值振幅随激振力的变化
Fig. 10 Peak vibration amplitude varies with excitation force

3.3 缘板倾斜角的影响

对于具有缘板阻尼块的叶片-缘板阻尼结构而言,缘板倾斜角是一个重要的结构设计参数。图 11 给出激振力 $f=3$ N 时,具有两个相同缘板倾斜角($\alpha_1=\alpha_2=\alpha$)的叶片-缘板阻尼结构的离心

力特性曲线。
由图 11 可以看出,在相同的激振力与离心力水平下,缘板倾斜角越小,叶片-缘板阻尼结构的减振效果越好。

3.4 缘板阻尼块转动的影响

在实际叶片振动的过程中,缘板阻尼块与缘板凸台的接触面不可能一直保持平行接触,因而产生微小幅度的转动。早期的叶片-缘板阻尼结构相关分析研究工作指出,缘板阻尼块的微幅转动将改变接触面的相对运动行为,影响叶片-缘板阻尼结构干摩擦阻尼性能^[20]。基于本文的简化叶片-缘板阻尼结构集中参数模型,能够较为便利地定性分析缘板阻尼块转动效应的影响。通过在缘板阻尼块的转动自由度上施加强制性约束条件,使 θ_9 为零,达到忽略其微幅转动的效果。取激振力 $f=3$ N,分别计算考虑转动与忽略转动的两种情况下的缘板阻尼块的离心力特性曲线,如图 12 所示。可以看出,缘板阻尼块的微幅转动对

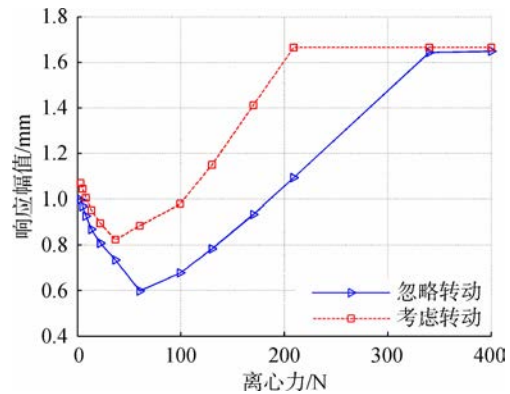


图 12 缘板阻尼块转动对离心力特性曲线的影响
Fig. 12 Effect of the underplatform damper rotation on centrifugal force characteristic curve

叶片的振动幅值水平具有显著影响。忽略其转动效应,将导致叶片振动幅值计算结果偏低,影响对叶片-缘板阻尼结构减振特性的准确预估。

4 结 论

本文基于简化叶片-缘板阻尼结构模型,采用加速的谐波平衡法计算叶片的振动响应特性。探索总结了多种因素对缘板阻尼结构减振特性的影响规律,具体如下:

- 1) 离心力水平是缘板阻尼结构减振性能优劣的决定性因素,可通过合理设计缘板阻尼块质量来调节其在特定工作转速下的离心力水平,获得最优干摩擦减振效果;
- 2) 缘板阻尼器设计应考虑叶片激振力的影响,使其接触面尽可能的处于滑移状态而达到抑制叶片振动的目的;
- 3) 楔形缘板阻尼块结构的缘板倾斜角越小,其减振效果越好;
- 4) 缘板阻尼块的微幅转动对叶片的振动幅值水平具有显著影响,在后续对实际叶片-缘板阻尼结构的分析中应重点考虑。

参考文献:

[1] 陈璐璐. 风扇阻尼结构动力学设计理论与方法研究[D]. 北京:北京航空航天大学,2012.
CHEN Lulu. Research on dynamic design theory and method of fan damping structure[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2012. (in Chinese)

[2] CARDONA A, COUNE T, LERUSSE A, et al. A multi-harmonic method for non-linear vibration analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994,37(9):1593-1608.

[3] YANG B D, CHU M L, MENQ C H. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998,210(4):461-481.

[4] CAMERON T M, GRIFFIN J H. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1989,56(1):149-154.

[5] ZUCCA S, GOLA M M, PIRACCINI F. Non-linear dynamics of steam turbine blades with shroud; numerical analysis and experiments[R]. ASME Paper GT2012-69692, 2012.

[6] PETROV E P, EWINS D J. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed discs[J]. Journal of Turbomachinery, 2003,125(2):364-371.

[7] SANLITURK K Y, EWINS D J, STANBRIDGE A B. Un-

derplatform dampers for turbine blades; theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2001, 123(4):919-929.

[8] SIEWERT C, PANNING L, WALLASCHEK J, et al. Multiharmonic forced response analysis of a turbine blade coupled by nonlinear contact forces[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2010,132(8):231-243.

[9] POUDOU O, PIERRE C. Hybrid frequency-time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping[R]. AIAA-2003-1411, 2003.

[10] GOLA M M, LIU T. A direct experimental-numerical method for investigations of a laboratory under-platform damper behavior[J]. International Journal of Solids and Structures, 2014,51(25/26):4245-4259.

[11] LAXALDE D, THOUVEREZ F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: application to turbomachinery bladings with friction interfaces[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009,322(4):1009-1025.

[12] 徐超, 李东武, 陈学前, 等. 考虑法向载荷变化的微滑摩擦系统振动分析[J]. 振动与冲击, 2017,36(13):122-127.
XU Chao, LI Dongwu, CHEN Xueqian, et al. Vibration analysis for a micro-slip frictional system considering variable normal load[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(13):122-127. (in Chinese)

[13] 吴向宇, 韩绪军, 张海洋, 等. 高压涡轮工作叶片缘板阻尼结构设计分析[J]. 航空动力学报, 2014, 29(6):1376-1381.
WU Xiangyu, HAN Xujun, ZHANG Haiyang, et al. Analysis and design of platform damper construction for high pressure turbine blade[J]. Journal of Aerospace Power, 2014,29(6):1376-1381. (in Chinese)

[14] 孙堂, 刘永泉, 郝燕平, 等. 带缘板摩擦阻尼片高压涡轮叶片的减振研究[J]. 航空发动机, 2014,40(5):57-61.
SUN Ying, LIU Yongquan, HAO Yanping, et al. Vibration reduction of high pressure turbine blade with platform friction damper[J]. Aeroengine, 2014, 40(5):57-61. (in Chinese)

[15] 漆文凯, 高德平. 带摩擦阻尼装置系统振动响应分析方法研究[J]. 航空动力学报, 2006,21(1):161-167.
QI Wenkai, GAO Deping. Study of vibration response analysis method for dry friction damping systems[J]. Journal of Aerospace Power, 2006,21(1):161-167. (in Chinese)

[16] 李琳, 刘久周, 李超. 干摩擦阻尼器对宽频多阶次激励减振效果分析[J]. 航空动力学报, 2016,31(9):2171-2180.
LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Analysis on damping effect of dry friction damper under wideband multi-harmonic excitation[J]. Journal of Aerospace Power, 2016,31(9):2171-2180. (in Chinese)

[17] FIRRONE C M, ZUCCA S. Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks[J]. Numerical Analysis Theory and Application,

2011,57(4):301-330.

[18] SIEWERT C, PANNING L, WALLASCHEK J, et al. Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2010, 132(8): 082501. 1-082501. 9.

[19] MARQUINA F J, CORO A, GUTIÉRREZ A, et al. Friction damping modeling in high stress contact areas using microslip friction model[C]//Proceeding of ASME Turbo. Berlin, Germany; ASME, 2008; 309-318.

[20] ZUCCA S, BOTTO D, GOLA M M. Range of variability in the dynamics of semi-cylindrical friction dampers for turbine blades[C]//Proceeding of ASME Turbo. Berlin, Germany; ASME, 2008; 519-529.

(编辑:王碧珺)