

模糊等价关系下滚动轴承振动性能变异分析

夏新涛^{1,2}, 陈向峰¹, 常 振³

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003;

2. 河南科技大学 机械装备先进制造河南省协同创新中心, 河南 洛阳 471003;

3. 杭州轴承试验研究中心有限公司 质量检测中心, 杭州 310022)

摘 要: 在小样本且概率分布未知条件下, 提出模糊等价关系和自助最大熵模型, 并通过变异概率分析滚动轴承振动性能变异过程。对滚动轴承振动加速度原始数据分组得到样本, 选定本征样本, 计算各样本间的模糊等价系数; 运用自助最大熵模型建立各样本的概率密度函数, 通过交集法得到各样本相对于本征样本的变异概率, 建立模糊等价系数和变异概率的关系曲线以实现对变异过程的监控; 通过仿真和实验案例验证了所提模型的可行性和正确性。实验结果表明: 随着磨损直径的逐渐增大, 变异概率曲线呈“躺椅状”非线性上升趋势, 对应滚动轴承磨损的3个阶段, 即初级磨合阶段、正常性能退化阶段和性能恶化阶段。

关 键 词: 小样本; 模糊等价关系; 自助最大熵; 变异概率; 振动性能变异

中图分类号: V233.1; TH165.3

文献标志码: A

Analysis of vibration performance variation of rolling bearing under fuzzy equivalence relation

XIA Xintao^{1,2}, CHEN Xiangfeng¹, CHANG Zhen³

(1. School of Mechatronics Engineering,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;

2. Collaborative Innovation Center of Machinery Equipment Advanced Manufacturing of Henan Province, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;

3. Quallity Inspection Center,

Hangzhou Bearing Test and Research Center Company Limited, Hangzhou 310022, China)

Abstract: In the case of small samples with unknown probability distribution, the fuzzy equivalence relation and bootstrap maximum entropy models were proposed, and the variation process of vibration performance of rolling bearing was analyzed by variation probability. The original data of rolling bearing vibration acceleration was grouped into the samples, and then the intrinsic sample was selected to calculate the fuzzy equivalent coefficients between the samples. The bootstrap maximum entropy model was used to establish the probability density function of each sample, and the variation probability of each sample relative to the intrinsic sample was calculated by the intersection method. The relation curve between the fuzzy equivalent coefficients and variation probabilities was established to realize the monitoring of the variation process. The

收稿日期: 2018-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(51475144); 河南省自然科学基金(162300410065)

作者简介: 夏新涛(1957—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要研究方向为滚动轴承性能分析与数据处理。

通讯作者: 陈向峰(1993—), 男, 硕士生, 主要研究方向为滚动轴承振动性能分析与信息处理。E-mail: lack_xfc@163.com

引用格式: 夏新涛, 陈向峰, 常振. 模糊等价关系下滚动轴承振动性能变异分析[J]. 航空动力学报, 2018, 33(11): 2737-2747. XIA Xintao, CHEN Xiangfeng, CHANG Zhen. Analysis of vibration performance variation of rolling bearing under fuzzy equivalence relation[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(11): 2737-2747.

feasibility and correctness of the proposed model were verified by simulation and experimental cases. Experimental investigation showed that the variation probability curve presented nonlinear upward trend like “deck chair” with the increase of wear diameter, which corresponded to the three stages of rolling bearing wear, namely the initial running stage, the normal performance degradation stage and the performance deterioration stage.

Key words: small sample; fuzzy equivalence relation; bootstrap maximum entropy; variation probability; vibration performance variation

滚动轴承既是航空发动机承力传动系统中必不可少的组成部分,又是航空发动机的薄弱环节,其性能的好坏直接影响航空发动机的使用寿命和可靠性^[1]。性能失效是指在滚动轴承服役期间,由于内部零件损伤量或者变形量的累积,最终导致轴承运转无法满足预定要求。滚动轴承在失效前会显露许多可疑迹象,例如振动、温升或摩擦等性能变得异常,预示轴承内部零件的损伤或磨损加剧的状态^[2]。如果能够对滚动轴承的服役性能进行可靠监控,提前了解其变化趋势,即可避免危险因素累计超限和航空发动机骤然停机等恶性事件的发生^[3-6]。

目前,针对轴承性能变异的分析主要是通过时域、频域和时频域的分析^[7]。例如,钟先友等^[8]提出一种时频分析法对轴承振动信号进行降噪,同时提取信号时域和频域的局部信息,降噪的效果较好;龙源等^[9]提出了基于 Hilbert-Huang 变换和时频域参数指标相结合的机车轴承故障诊断方法,通过实验证明,其能很好地完成机车轴承的故障诊断。时域、频域和时频域分析方法,都需要轴承从开始服役到失效的大样本原始数据,但由于时间、费用、技术条件等的限制,现代长寿命产品如某些航空发动机轴承性能分析经常面临的是小样本和无失效数据^[10]。但现有对小样本问题的研究,一般都事先假设样本概率密度函数已知,而且也多为对轴承疲劳寿命的研究。例如,Ali 等^[11]假定轴承疲劳寿命服从威布尔分布,基于数据驱动预报原理,从而分析轴承性能可靠性;郑锐等^[12]根据三参威布尔分布的特点,融合了图解法和遗传算法,提出一种参数估计方法。但是,在轴承服役期间,有很多性能变异与失效概率分布是未知的。例如,摩擦力矩、振动与噪声等性能失效概率分布至今是未知的或不确定的。因此,对小样本且概率分布未知问题的研究具有重要意义。

对于概率分布未知、趋势未知的小样本问题,

基于经典统计理论的研究结果可能是不合理的^[13]。由于在概率分布未知的情况下,模糊变量比随机变量更容易定义,因此越来越多的领域开始使用模糊数学对不确定问题进行建模,迄今为止,将模糊数学应用到轴承振动性能变异分析方面的研究还比较少^[14-15]。自助最大熵法能够对未知的概率分布作出主观偏见为最小的最佳估计,在处理概率分布未知的小样本问题时起到非常重要作用^[16]。模糊等价系数是一个模糊性概念,在 0 和 1 的两个事物极端状态中变化,0 表示研究对象的一个实体毫不相干,1 则表示两个实体完全一样。如果将这种关联程度用经典精确数学中概率加以量化,则实现了模糊现象的精确刻画,将模糊数学和概率论的联系在了一起。现有文献对它们内在联系的研究少之又少,那么研究这种联系并应用到工程实际中以实现模糊性的明晰表达显得尤为重要。

鉴于以上存在的问题,本文对滚动轴承振动性能变异进行分析研究,在小样本且概率分布未知条件下,通过对轴承振动加速度原始数据进行分组,并选定本征样本,计算各样本间模糊等价系数;然后运用自助法对小样本数据进行等概率可放回抽样,获得大量样本数据,用最大熵法得到 Lagrange 乘子进而求出各样本概率密度函数,运用交集法得到各样本相对于本征样本的变异概率;最终建立模糊等价系数和变异概率关系曲线,实现了模糊到精确的转化,并以此监控滚动轴承振动性能变异过程,避免恶性事故的发生。

1 数学模型

在滚动轴承服役期间,对其振动加速度数据进行定期采样。将采集到的原始数据进行分组,设分组后获得 N 个样本。本征样本是指滚动轴承处于最佳运行状态时期的样本,该时期轴承几乎无性能失效的可能性,记为第 1 个样本,用向量 $\mathbf{X}_1$ 表示。

$\mathbf{X}_1 = [x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(k), \dots, x_1(M)]$ (1)

式中 $x_1(k)$ 为本征样本的第 k 个数据; k 为数据在本征样本中的序号, $k=1, 2, \dots, M$; M 为数据总个数。

随着时间的进行, 不断采集到振动加速度数据, 获得第 r 个样本向量 $\mathbf{X}_r$ 。

$$\mathbf{X}_r = [x_r(1), x_r(2), \dots, x_r(k), \dots, x_r(M)]$$
 (2)

式中 $x_r(k)$ 为第 r 个样本的第 k 个数据; r 为样本的序号, $r=1, 2, 3, \dots, N$ 。

所获得的样本矢量 $\mathbf{X}$ 可以表示为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r, \dots, \mathbf{X}_N]$$
 (3)

1.1 模糊等价关系

传统的测量数据处理中往往要求数据具有典型的概率分布如正态分布和大量的测量数据^[17], 以便进行概率论和统计学意义上的数学处理。但本节内容是以模糊集合理论^[18]为基础的, 对数据概率分布无特别要求, 还允许小的样本量。

1.1.1 模糊相似系数

设滚动轴承服役周期内共获得 S 个振动加速度数据, 将数据分为 N 组, 即 N 个样本, 每组 M 个数据, 即样本含量为 M , 组成矢量 $\mathbf{X}$, 即式 (3), 且 $S=M \times N$; 任一样本为 $\mathbf{X}_r = [x_r(1), x_r(2), \dots, x_r(k), \dots, x_r(M)]$, 即式 (2)。

无论 $x_r(k)$ 是不是模糊数, 将 $x_r(k)$ 线性映射到 $[0, 1]$ 区间内, 看成模糊数 $y_r(k)$, 就可以用模糊集合理论处理了。

设线性映射公式为

$$y_r(k) = \frac{x_r(k) - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$
 (4)

$$x_{\max} = \max_{r,k} x_r(k)$$
 (5)

$$x_{\min} = \min_{r,k} x_r(k)$$
 (6)

$$k = 1, 2, \dots, M \quad r = 1, 2, \dots, N$$

式中 $y_r(k)$ 为模糊数, $y_r(k) \in [0, 1]$ 。

设矢量 $\mathbf{X}$ 中任意两样本为 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_l$, 则各样本间的相似程度可以用模糊相似系数描述, 于是有模糊相似矩阵

$$\mathbf{R} = \{r_{il}\}_{N \times N}$$
$$i = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, N$$
 (7)

式中 r_{il} 为模糊相似系数。

这里用最大最小法计算模糊相似系数

$$r_{il} = \frac{\sum_{k=1}^M [y_i(k) \wedge y_l(k)]}{\sum_{k=1}^M [y_i(k) \vee y_l(k)]}$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, N$$
 (8)

式中“ $\vee$ ”表示“或”运算取最大, “ $\wedge$ ”表示“与”运算取最小。如 $A = (0.7, 0.4, 0.2)$, $B = (0.3, 0.6, 0.4)$, 则 $A \vee B = 0.7$, $A \wedge B = 0.2$ 。

在式 (7) 和式 (8) 中, 有

$$r_{il} = \begin{cases} 1 & i = l \\ r_{li} & i \neq l \end{cases}$$
$$i = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, N$$
 (9)

即 $\mathbf{R}$ 是一个模糊相似关系矩阵, 滚动轴承振动加速度各样本数据间具有相似关系 $\mathbf{R}$ 。

1.1.2 模糊等价系数及其意义

在式 (7) 模糊相似关系 $\mathbf{R}$ 确定后, 用模糊集合理论的传递闭包法可以获得滚动轴承振动加速度各样本数据间的模糊等价关系, 求解方法如下。

对于任意模糊相似关系 $\mathbf{R}$, 如果存在

$$\mathbf{T}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{h-1} = \mathbf{R}^h = \dots$$
 (10)

$$h = 1, 2, 3, \dots$$

那么, 依次可以求出模糊等价关系, 步骤如下:

第 1 步 求出 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \circ \mathbf{R}$;

第 2 步 求出 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \circ \mathbf{R}^2$;

式中运算符“ $\circ$ ”为矩阵的模糊运算 $M(\wedge, \vee)$ 。如 $A = (0.7, 0.4, 0.2)$, $B = (0.3, 0.6, 0.4)$, 则 $A \circ B = (0.7 \wedge 0.3) \vee (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.2 \wedge 0.4) = 0.3 \vee 0.4 \vee 0.2 = 0.4$ 。

⋮

第 q 步 直到求出 $\mathbf{R}^{2q} = \mathbf{R}^q$ 为止, $\mathbf{R}^q$ 就是所求的模糊等价关系 $\mathbf{T}(\mathbf{R})$, 即模糊集合理论中的传递闭包

$$\mathbf{T}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^q$$
 (11)

则有

$$\mathbf{T}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1l} & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2l} & \cdots & v_{2N} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3l} & \cdots & v_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ v_{i1} & v_{i2} & v_{i3} & \cdots & v_{il} & \cdots & v_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N1} & v_{N2} & v_{N3} & \cdots & v_{Nl} & \cdots & v_{NN} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1l} & \cdots & v_{1m} \\ & 1 & v_{23} & \cdots & v_{2l} & \cdots & v_{2m} \\ & & 1 & \cdots & v_{3l} & \cdots & v_{3m} \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \text{Sym.} & & & & 1 & \cdots & v_{im} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$
 (12)

式中

$$\begin{aligned} 0 &\leq v_{il} \leq 1 \\ v_{il} &= \begin{cases} 1 & i = l \\ v_{li} & i \neq l \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

在式(12)中,元素 v_{il} 描述了滚动轴承振动加速度第 i 个样本 $\mathbf{X}_i$ 和第 l 个样本 $\mathbf{X}_l$ 的模糊等价关系,亦即样本 $\mathbf{X}_i$ 和样本 $\mathbf{X}_l$ 特征的符合程度,可称之为模糊等价系数,它有如下意义:

- 1) 若 v_{il} 越接近 1,则样本 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_l$ 特征的符合程度越大,表明两者之间变异程度越小。
- 2) 若 v_{il} 越接近 0,则样本 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_l$ 特征的符合程度越小,表明两者之间变异程度越大。
- 3) 特别地,当 $v_{il}=1$ 时,样本 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_l$ 是完全一样的,不存在任何变异特征;当 $v_{il}=0$ 时,样本 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_l$ 是毫不相干的,存在极其显著的变异特征。

1.2 变异概率的求取

1.2.1 自助最大熵法求取概率密度函数

自助法是利用原始观测数据去模拟未知概率分布的常用方法^[19]。对系统进行统计推断时,自助法是一种重要的非参数估计方法,已经在点估计、区间估计、参数预报和假设检验等方面得到非常广泛的应用,是统计学研究中最具活力的方法。本节以自助法对小样本数据进行等概率可放回抽样,获得大量数据;然后以最大熵法对未知的概率分布作出主观偏见为最小的最佳估计,求出概率密度函数。在求解过程中,引入 Lagrange 乘子,从而把概率分布问题转化为 Lagrange 乘子的求解问题。

在滚动轴承服役周期内,设获得任一样本为 $\mathbf{X}_r$,即

$$\mathbf{X}_r = [x_r(1), x_r(2), \cdots, x_r(k), \cdots, x_r(M)] \tag{14}$$

$$r = 1, 2, 3, \cdots, N$$

式中 $x_r(k)$ 为样本 $\mathbf{X}_r$ 的第 k 个数据; M 为样本 $\mathbf{X}_r$ 的样本含量。

从样本 $\mathbf{X}_r$ 中等概率可放回地抽样,每次抽取 w 个数据,构成一个自助样本 $\mathbf{X}_b$,连续重复抽取 B 次,得到 B 个自助样本,用矢量表示为

$$\mathbf{X}_b = [x_b(1), x_b(2), \cdots, x_b(l), \cdots, x_b(w)] \tag{15}$$

$$b = 1, 2, \cdots, B$$

式中 $\mathbf{X}_b$ 为第 b 个自助样本; $x_b(l)$ 为 $\mathbf{X}_b$ 的第 l 个数据; w 为 $\mathbf{X}_b$ 的数据个数。

因此,可以得到一个样本含量为 B 的自助样

本 $\mathbf{X}_B$,即

$$\mathbf{X}_B = [x_1, x_2, \cdots, x_b, \cdots, x_B] \tag{16}$$

式中

$$x_b = \frac{1}{w} \sum_{l=1}^w x_b(l) \tag{17}$$

通过自助样本 $\mathbf{X}_B$ 中的数据构建样本 $\mathbf{X}_r$ 概率密度函数 $f(x)$,过程如下:

为了叙述方便,将样本 $\mathbf{X}_r$ 中离散数据连续化,定义最大熵的表达式为

$$H(x) = - \int_S f(x) \ln f(x) dx \tag{18}$$

式中 $f(x)$ 为样本 $\mathbf{X}_r$ 概率密度函数; S 为积分区间。

S 的约束条件为

$$\int_S f(x) dx = 1 \tag{19}$$

$$\int_S x^i f(x) dx = m_i \tag{20}$$

式中 m 为所用矩的阶数; m_i 为第 i 阶原点矩。

由式(16), B 可以是一个很大的数,所以可以得到第 i 阶原点矩 m_i 为

$$m_i = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B x_b^i \tag{21}$$

通过调整 $f(x)$ 可以使熵达到最大值,此时可以通过 Lagrange 乘子法进行求解,其解为

$$f(x) = \exp \left[c_0 + \sum_{i=1}^m c_i x^i \right] \tag{22}$$

式中 i 为原点矩阶次; m 为最高原点矩阶次; c_0 为首个 Lagrange 乘子; c_i 为第 $i+1$ 个 Lagrange 乘子。

c_0 应满足

$$c_0 = - \ln \left[\int_S \exp \left[\sum_{i=1}^m c_i x^i \right] dx \right] \tag{23}$$

其余 Lagrange 乘子应满足

$$\frac{\int_S x^i \exp \left[\sum_{i=1}^m c_i x^i \right] dx}{\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B x_b^i \int_S \exp \left[\sum_{i=1}^m c_i x^i \right] dx} = 1 \tag{24}$$

1.2.2 交集法求变异概率

在滚动轴承处于最佳运行状态时期,其振动加速度数据属于随机变量,该随机变量属于某个特定分布。但是,随着时间的推移,由于服役过程的不确定性,会有各种扰动的出现,则随机变量的概率分布会发生变化,此时,滚动轴承处于非最佳运行状态。性能变异是一个连续的过程,而非性能由正

常到失效的“突变”,只要性能数据概率分布发生了改变,就认为滚动轴承振动性能就发生了变异。

本节用变异概率评估滚动轴承振动性能,以本征样本的概率密度函数为参考,将其他样本概率密度函数与其取交集。交集面积越大,变异概率越小;反之,则变异概率越大。

设选定本征样本为 $\mathbf{X}_1$,即式(1),由自助最大熵法,可得其概率密度函数 $f_1(x)$ 为

$$f_1(x) = \exp \left[c_{10} + \sum_{i=1}^m c_{1i} x^i \right] \tag{25}$$

设通过实验获得的任一样本为 $\mathbf{X}_r$,即式(2),由自助最大熵法,可得其概率密度函数 $f_r(x)$ 为

$$f_r(x) = \exp \left[c_{r0} + \sum_{i=1}^m c_{ri} x^i \right] \tag{26}$$

根据交集概念,定义 $a_{1,r}$ 为两者变异概率,即 $a_{1,r} = 1 - A[f_1(x) \cap f_r(x)]$ 式(27) 式中 $A[f_1(x) \cap f_r(x)]$ 为 $f_1(x)$ 与 $f_r(x)$ 的交集面积。

2 仿真分析和实验案例

2.1 仿真分析

在本仿真案例中,用计算机仿真 9 个正态分布数据样本,即 $N=9$,每个样本的样本含量为 10,即 $M=10$,共 90 个数据,如图 1。数学期望均

$$T(R) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.852 & 0.784 & 0.723 & 0.669 & 0.609 & 0.531 & 0.505 & 0.453 \\ 0.852 & 1.000 & 0.784 & 0.723 & 0.669 & 0.609 & 0.531 & 0.505 & 0.453 \\ 0.784 & 0.784 & 1.000 & 0.723 & 0.669 & 0.609 & 0.531 & 0.505 & 0.453 \\ 0.723 & 0.723 & 0.723 & 1.000 & 0.669 & 0.609 & 0.531 & 0.505 & 0.453 \\ 0.669 & 0.669 & 0.669 & 0.669 & 1.000 & 0.740 & 0.531 & 0.505 & 0.453 \\ 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.740 & 1.000 & 0.531 & 0.505 & 0.453 \\ 0.531 & 0.531 & 0.531 & 0.531 & 0.531 & 0.531 & 1.000 & 0.505 & 0.453 \\ 0.505 & 0.505 & 0.505 & 0.505 & 0.505 & 0.505 & 0.505 & 1.000 & 0.453 \\ 0.453 & 0.453 & 0.453 & 0.453 & 0.453 & 0.453 & 0.453 & 0.453 & 1.000 \end{bmatrix} \tag{28}$$

样本 $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_9$ 与本征样本 $\mathbf{X}_1$ 的模糊等价系数如图 2。

由图 2 知, $v_{11}=1$ 表明本征样本与其本身是完全一样的, $v_{12} \sim v_{19}$ 依次为 0.852, 0.784, 0.723, 0.669, 0.609, 0.531, 0.505, 0.453,则表明样本 $\mathbf{X}_2 \sim \mathbf{X}_9$ 与本征样本 $\mathbf{X}_1$ 的特征符合程度越来越差,这与对原始数据直接分析具有一致性。

以上计算结果是用模糊等价系数度量样本 $\mathbf{X}_2 \sim \mathbf{X}_9$ 与 $\mathbf{X}_1$ 特征符合程度,这种度量结果是基于模糊数概念的,但模糊数很难对事物本质进行精确描述,只能反映其大致趋势。鉴于此,将引入变异

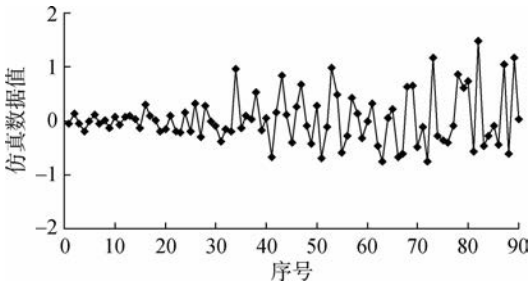


图 1 不同标准差下正态分布的仿真数据
Fig. 1 Simulation data of normal distribution under different standard deviations

$E=0$,标准差分别为 $s_1=0.10, s_2=0.15, s_3=0.20, s_4=0.40, s_5=0.48, s_6=0.52, s_7=0.55, s_8=0.60, s_9=0.80$ 。选定 $E=0, s_1=0.10$ 的样本为本征样本,则真实情况是随着标准差的增加,数据波动变大,各样本与本征样本的模糊等价系数将越来越小,变异概率将越来越大。以下通过所提数学模型,计算各样本与本征样本的模糊等价系数和变异概率以验证该模型正确性。

取样本数 $N=9$,样本含量 $M=10$,由图 1 知,仿真数据可分为样本 $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_9$,且本征样本为 $\mathbf{X}_1$ 。

计算后样本 $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_9$ 间的模糊等价关系矩阵为

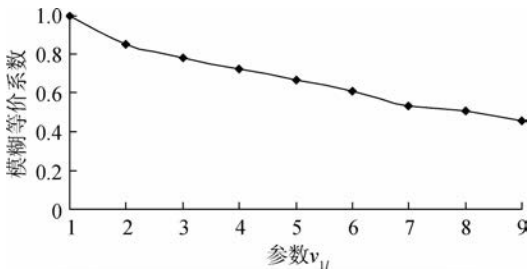


图 2 $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_9$ 与 $\mathbf{X}_1$ 的模糊等价系数
Fig. 2 Fuzzy equivalent coefficients of $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_9$ relative to $\mathbf{X}_1$

概率对样本 $\mathbf{X}_2 \sim \mathbf{X}_9$ 与本征样本 $\mathbf{X}_1$ 的特征符合程度进行精确刻画,进而建立模糊数与概率的联系。

通过自助法对本征样本 $\mathbf{X}_1$ 进行等概率可放回抽样,取 $B=10\,000$,得到自助样本 $\mathbf{X}_{B1}$,同理,对 $\mathbf{X}_2 \sim \mathbf{X}_9$ 进行等概率可放回抽样,得到 $\mathbf{X}_{B2} \sim \mathbf{X}_{B9}$,如图 3。

根据最大熵原理,可得本征样本 $\mathbf{X}_1$ 的概率密度函数 $f_1(x)$,如图 4。

同理,样本 $\mathbf{X}_2 \sim \mathbf{X}_9$ 概率密度函数分别为 $f_2(x) \sim f_9(x)$,则 $f_1(x)$ 与 $f_2(x) \sim f_9(x)$ 的交集如图 5。

由式(27),样本 $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_9$ 相对于本征样本 $\mathbf{X}_1$ 变异概率 $a_{1,r}$ 如表 1。

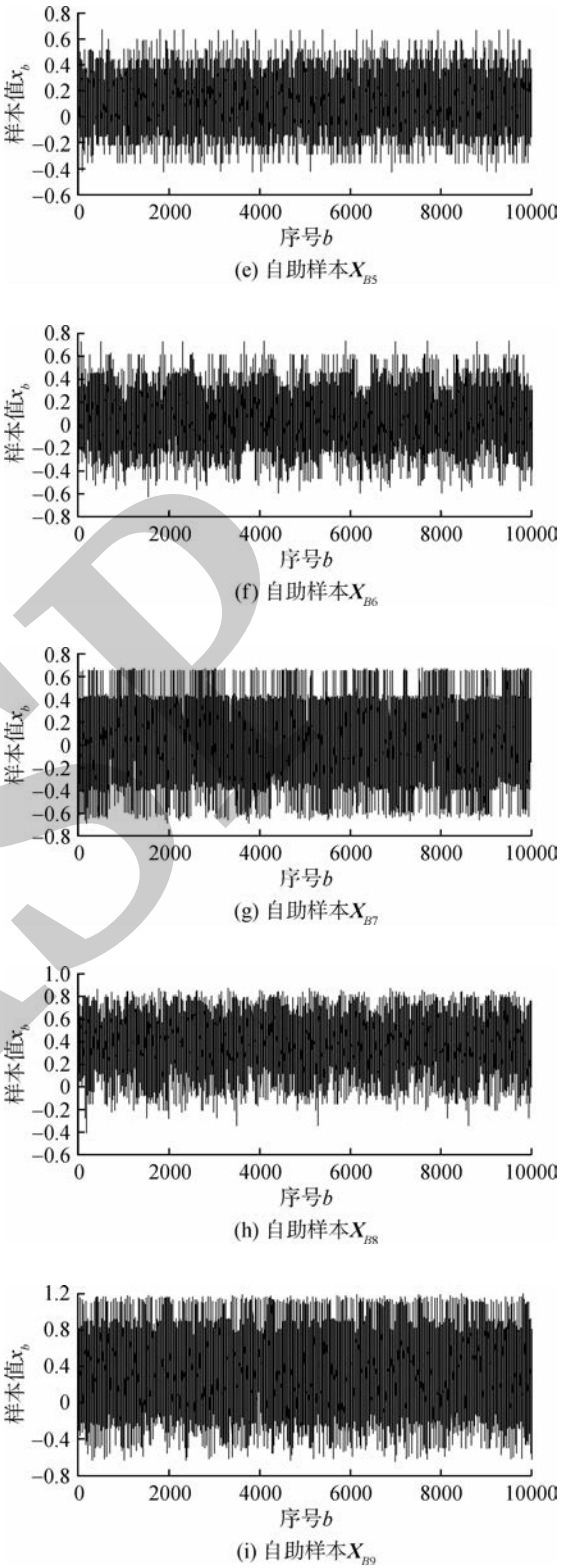
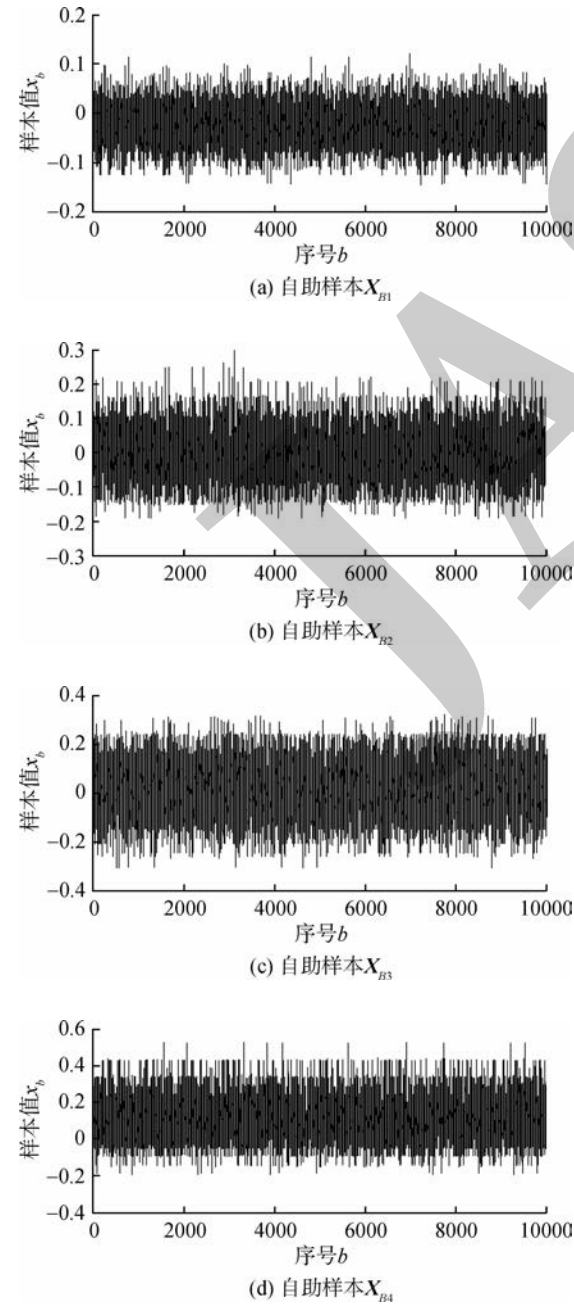


图 3 自助样本 $\mathbf{X}_{B1} \sim \mathbf{X}_{B9}$
Fig. 3 Bootstrap samples $\mathbf{X}_{B1} - \mathbf{X}_{B9}$

由图 5 知, $f_1(x)$ 与 $f_2(x) \sim f_9(x)$ 的交集面积依次减小,从表 1 也可看出样本 $\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_9$ 相对于本征样本 $\mathbf{X}_1$ 变异概率依次增加,分别为 0, 28.6%, 49.8%, 63.8%, 68.3%, 69.1%, 69.7%, 73.8%, 85.7%。由表 1 知, $a_{1,4} = 63.8\%$, $a_{1,5} =$

68.3%, $a_{1,6}=69.1\%$, $a_{1,7}=69.7\%$,即样本 $\mathbf{X}_4\sim\mathbf{X}_7$ 相对本征样本 $\mathbf{X}_1$ 的变异概率的增加量仅5.9%,远小于 $\Delta a_{1\rightarrow 4}=63.8\%$ 和 $\Delta a_{7\rightarrow 9}=16\%$,表明样本 $\mathbf{X}_1\sim\mathbf{X}_4$ 数据段波动情况变化最大,样本 $\mathbf{X}_7\sim\mathbf{X}_9$ 数据段波动情况变化次之,样本 $\mathbf{X}_4\sim\mathbf{X}_7$ 数据段波动情况变化较小。这与对原始数据直接分析具有一致性,因为 $\Delta s_{1\rightarrow 4}=0.3>\Delta s_{7\rightarrow 9}=0.25>\Delta s_{4\rightarrow 7}=0.15$,同时也验证了所提数学模型的正确性。

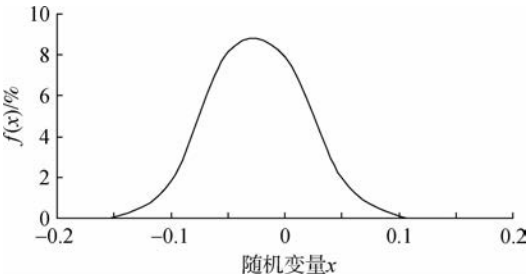


图 4 概率密度函数 $f_1(x)$
Fig. 4 Probability density function $f_1(x)$

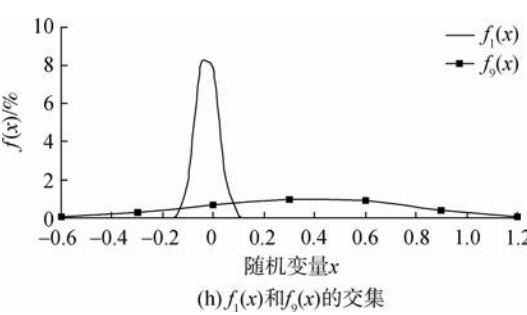
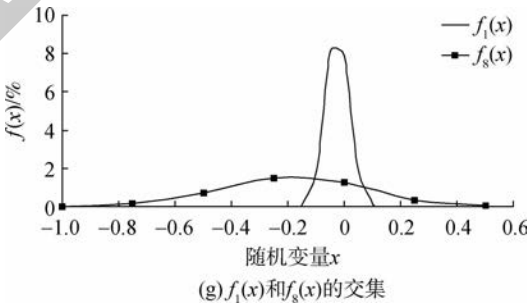
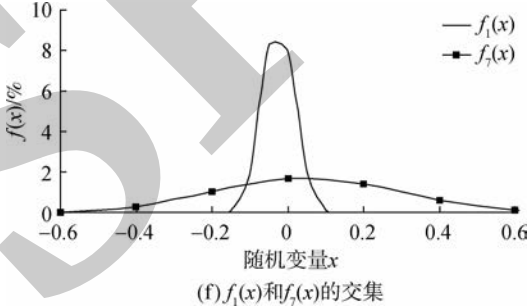
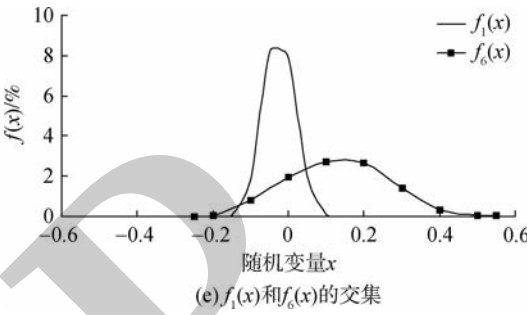
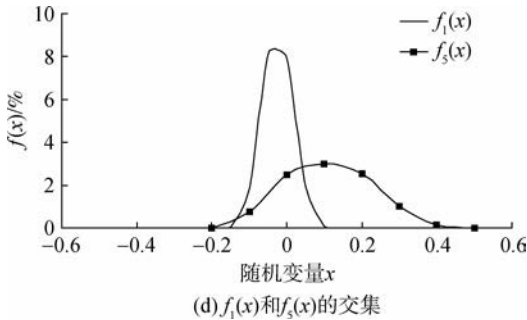
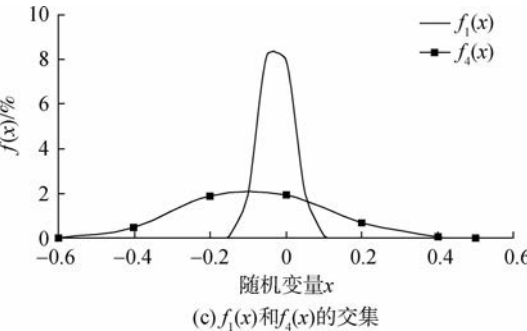
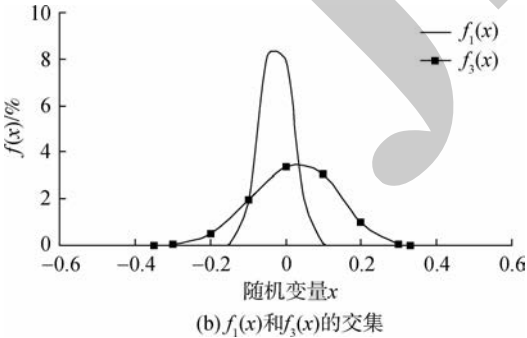
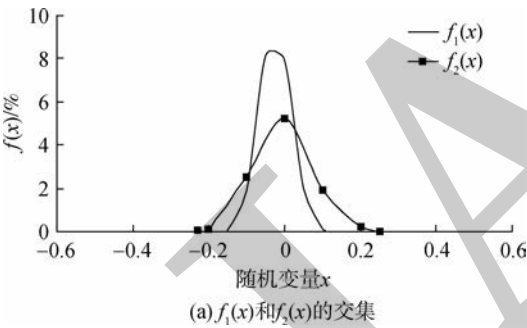


图 5 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)\sim f_9(x)$ 的交集
Fig. 5 Intersections of $f_1(x)$ and $f_2(x)\sim f_9(x)$

为了建立模糊数与概率的联系,以实现样本 $\mathbf{X}_1\sim\mathbf{X}_9$ 相对于本征序列 $\mathbf{X}_1$ 符合程度的精确表达,模糊等价系数与变异概率的关系如图 6。

表 1 $X_1 \sim X_9$ 相对于本征样本 X_1 变异概率 $a_{1,r}$
Table 1 Variation probabilities $a_{1,r}$ of $X_1 \sim X_9$ relative to intrinsic sample X_1

样本	变异概率
X_1	0
X_2	28.6
X_3	49.8
X_4	63.8
X_5	68.3
X_6	69.1
X_7	69.7
X_8	73.8
X_9	85.7

由图 6 知,当 $v_{11}=1$ 时, $a_{1,1}=0$,表明样本 X_1 相对于本身不存在任何变异;当 $v_{19}=0.453$ 时, $a_{1,9}=85.7\%$,表明样本 X_9 相对于本征样本 X_1 的特征符合程度为 0.453,这是一个模糊数,表示的精确意义是样本 X_9 相对于本征样本 X_1 的变异概率为 85.7%,每个模糊等价系数均对应 1 个变异概率,从而建立了模糊数与概率的联系,实现了变异本质的精确刻画,将模糊数学与概率论联系在了一起;该图曲线从右往左呈上升趋势,其中在点 ($v_{14}=0.723, a_{1,4}=63.8\%$) 以左,点 ($v_{17}=0.531, a_{1,7}=69.7\%$) 以右,曲线较为平缓,表明该样本段变异概率几乎相等,数据波动情况几乎相

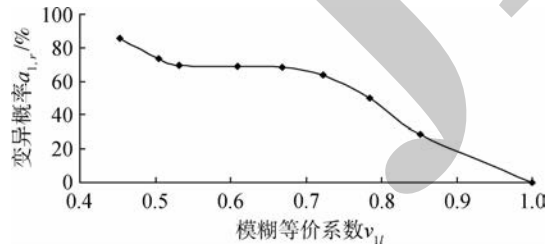


图 6 仿真案例模糊等价系数与变异概率的关系
Fig. 6 Relation of the fuzzy equivalent coefficients and variation probabilities of simulation case

$$T(R) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.944 & 0.875 & 0.841 & 0.769 & 0.597 & 0.558 & 0.522 \\ 0.944 & 1.000 & 0.875 & 0.841 & 0.769 & 0.597 & 0.558 & 0.522 \\ 0.875 & 0.875 & 1.000 & 0.841 & 0.769 & 0.597 & 0.558 & 0.522 \\ 0.841 & 0.841 & 0.841 & 1.000 & 0.769 & 0.597 & 0.558 & 0.522 \\ 0.769 & 0.769 & 0.769 & 0.769 & 1.000 & 0.597 & 0.558 & 0.522 \\ 0.597 & 0.597 & 0.597 & 0.597 & 0.597 & 1.000 & 0.558 & 0.522 \\ 0.558 & 0.558 & 0.558 & 0.558 & 0.558 & 0.558 & 1.000 & 0.664 \\ 0.522 & 0.522 & 0.522 & 0.522 & 0.522 & 0.522 & 0.664 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (29)$$

同;两端曲线上升较快,表明两端样本段变异概率增加较快,数据波动情况变化较大;在曲线平缓段,模糊等价系数 $v_{14} \sim v_{17}$ 持续减小而变异概率几乎不变,表明模糊数仅反映数据变化大致趋势,而概率才实现对这种变化趋势的精确描述。

2.2 实验案例

该实验是一个滚动轴承故障实验。实验台包括一个 1470 W 电动机,一个扭矩传感器/译码器和一个功率测试计等。待检测的滚动轴承支撑着电动机的转轴,驱动端轴承型号为 SKF6205,风扇端轴承型号为 SKF6203,用加速度传感器测量轴承振动加速度数据。采用的驱动端转速为 1797 r/min、采样周期 $\tau=10\text{ min}$ 得到轴承内圈沟道有磨损的故障数据,磨损直径分别为 0、0.1778、0.5334、0.7112 mm。每个磨损直径下采集 10 个数据,共 40 个数据,将其分 8 组 ($X_1 \sim X_8$),即样本数 $N=8$,样本含量 $M=5$,如图 7。

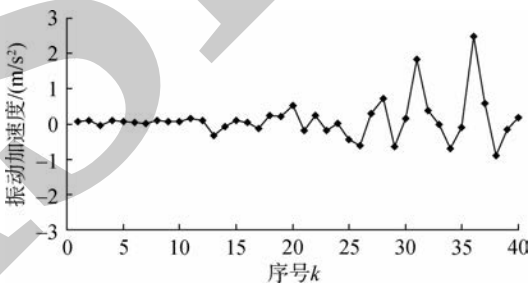


图 7 4 种磨损直径下的振动加速度
Fig. 7 Vibration accelerations of four wear diameters

由图 7 知,样本 $X_1 \sim X_2$ ($k=1 \sim 10$) 为磨损直径为 0 mm 的数据,数据趋于平缓;样本 $X_3 \sim X_4$ ($k=11 \sim 20$) 为磨损直径为 0.1778 mm 的数据,数据开始波动;样本 $X_5 \sim X_6$ ($k=21 \sim 30$) 为磨损直径为 0.5334 mm 的数据,数据波动趋于变大;样本 $X_7 \sim X_8$ ($k=31 \sim 40$) 为磨损直径为 0.7112 mm 的数据,数据波动最为剧烈。

选定轴承最佳运行状态下的样本 X_1 为本征样本,则计算后 $X_1 \sim X_8$ 间的模糊等价关系矩阵为

样本 $X_1 \sim X_8$ 与本征样本 X_1 的模糊等价系数如图 8。

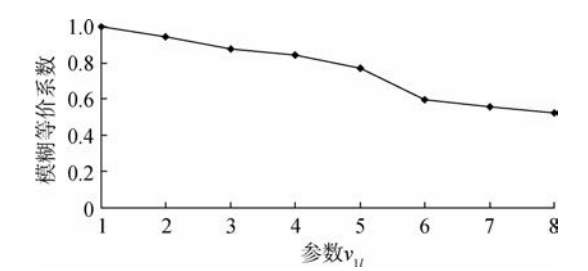


图 8 $X_1 \sim X_8$ 与 X_1 的模糊等价系数

Fig. 8 Fuzzy equivalent coefficients of $X_1 \sim X_8$ relative to X_1

由图 8 知,随着样本数的增加, $X_1 \sim X_8$ 与 X_1 模糊等价系数越来越小,依次为 1.000、0.944、0.875、0.841、0.769、0.597、0.558、0.522,表明随着磨损直径的增大,滚动轴承振动加速度各样本和本征样本特征符合程度越来越小,这与对原始数据直接分析具有一致性,因为随着磨损直径的增大,原始数据波动程度越来越大。

根据自助最大熵法,样本 $X_1 \sim X_8$ 概率密度函数 $f_1(x) \sim f_8(x)$ 的 Lagrange 乘子如表 2。

由式(22)结合表 2,样本 $X_1 \sim X_8$ 概率密度函数 $f_1(x) \sim f_8(x)$ 得以确定。由式(27),样本 $X_1 \sim X_8$ 相对于本征样本 X_1 变异概率 $a_{1,r}$ 如表 3。

表 2 $f_1(x) \sim f_8(x)$ 的 Lagrange 乘子
Table 2 Lagrange factors of $f_1(x) \sim f_8(x)$

概率密度函数	Lagrange 乘子					
	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$f_1(x)$	2.240	0.767	-0.400	0.104	-0.031	-0.022
$f_2(x)$	3.310	0.309	-0.474	-0.120	-0.073	0.021
$f_3(x)$	1.462	0.574	-0.712	0.034	0.007	-0.017
$f_4(x)$	1.382	-0.369	-0.663	0.145	-0.040	-0.022
$f_5(x)$	1.303	0.181	-0.901	0.259	-0.006	-0.047
$f_6(x)$	0.424	0.028	-0.456	-0.043	-0.043	0.009
$f_7(x)$	-0.795	-1.595	-0.512	0.055	-0.075	0.004
$f_8(x)$	-1.069	-1.538	-0.689	-0.126	-0.044	0.036

表 3 $X_1 \sim X_8$ 相对于本征样本 X_1 变异概率 $a_{1,r}$
Table 3 Variation probabilities $a_{1,r}$ of $X_1 \sim X_8$ relative to the intrinsic sample X_1

样本	变异概率/%
X_1	0
X_2	34.3
X_3	67.3
X_4	71.9
X_5	74.6
X_6	76.1
X_7	84.4
X_8	95.6

由表 3 知,样本 $X_1 \sim X_8$ 相对于本征样本 X_1 变异概率依次增加,分别为 0、34.3%、67.3%、71.9%、74.6%、76.1%、84.4%、95.6%,表明轴承振动性能变异程度随磨损直径的增大而增加。

$a_{1,3}=67.3\%$, $a_{1,4}=71.9\%$, $a_{1,5}=74.6\%$, $a_{1,6}=76.1\%$,即磨损直径从 0.1778mm 增大到 0.5334 mm 滚动轴承振动性能变异概率增加仅 8.8%,远小于 $\Delta a_{1 \rightarrow 3}=67.3\%$ 和 $\Delta a_{6 \rightarrow 8}=19.5\%$,表明磨损直径从 0 mm 增大到 0.1778 mm 滚动轴承振动性能变异概率变化最大,0.533 4 mm 增大到 0.711 2 mm 时变化次之,0.177 8 mm 增大到 0.533 4 mm 时变化最小。

为了建立模糊数与概率的联系,以实现滚动轴承振动性能变异本质的精确刻画,样本 $X_1 \sim X_8$ 相对于本征样本 X_1 的模糊等价系数与其变异概率的关系如图 9。

由图 9 知,从右往左该曲线呈“躺椅状”上升趋势,该趋势大致分为 3 个阶段。第 1 阶段:当 v_{1l} 从 1 开始减小(即磨损直径从 0 mm 开始增大)时,滚动轴承振动性能变异概率增加较快;第 2 阶段:随着 v_{1l} 继续减小(即磨损直径继续增大),其变异概率增加缓慢且有微量波动;第 3 阶段:当

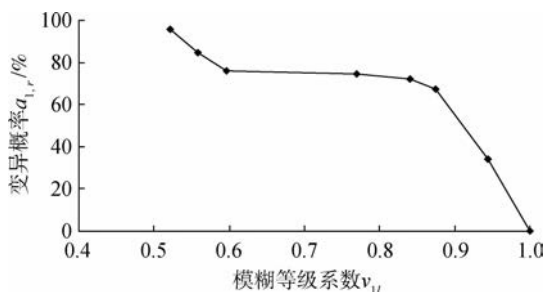


图9 实验案例模糊等价系数与变异概率的关系

Fig. 9 Relation of the fuzzy equivalent coefficients and variation probabilities of experimental case

v_{II} 减小到0.6左右后(即磨损直径增加到0.5334 mm左右后),其变异概率继续快速增加。这3个阶段正好对应滚动轴承服役过程中经历的3个阶段,在磨损直径达到约0.1778 mm以前,轴承处于初级磨合阶段,该阶段轴承振动性能变异概率增加较快至72%左右,振动性能变异十分显著;磨损直径在0.1778 mm到0.5334 mm左右变化时,轴承处于正常性能退化阶段,该阶段变异概率增加缓慢且持续时间较长,变化量仅约4%;磨损直径达到0.5334 mm之后,轴承处于性能恶化阶段,该阶段磨损程度逐渐加剧,振动性能变异概率较快增加至96%左右。

3 结 论

1) 将模糊等价关系和自助最大熵法应用到滚动轴承振动性能变异分析过程中,提出一种用交集法求解变异概率的思路。

2) 所提模型是对原始数据本身计算得到的客观规律,可以在只有小样本数据而没有样本概率密度函数等任何先验信息的条件下,分析滚动轴承振动性能变异过程,弥补了传统统计学的不足。

3) 建立了模糊等价系数与变异概率的有效对应关系,实现了模糊数学精确表达事物本质的量化标准,从而将模糊数学和概率论联系在一起。

4) 在滚动轴承服役过程中,变异概率曲线呈“躺椅状”非线性上升趋势。随着内圈沟道磨损直径的增大,变异概率将经历3个阶段:先快速增加,再缓慢增加且有微量波动,最后又快速增加,对应轴承磨损的3个阶段,即初级磨合阶段、正常性能退化阶段和性能恶化阶段。根据该曲线实时监控滚动轴承振动性能变异过程,在轴承磨损进入性能恶化阶段之前及时更换轴承,可有效避免因轴承失效导致的恶性事故的发生。

参考文献:

- [1] AI Yanting, GUAN Jiaoyue, FEI Chengwei, et al. Fusion information entropy method of rolling bearing fault diagnosis based on n -dimensional characteristic parameter distance[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 88(1):123-136.
- [2] LI Yongtang, JU Li, QI Huiping, et al. Technology and experiments of 42CrMo bearing ring forming based on casting ring blank[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(2):418-427.
- [3] 邓四二, 付金辉, 王燕霜, 等. 航空发动机滚动轴承-双转子系统动态特性分析[J]. 航空动力学报, 2013, 28(1):195-204.
DENG Sier, FU Jinhui, WANG Yanshuang, et al. Analysis on dynamic characteristics of aero-engine rolling bearing/dual-rotor system[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(1):195-204. (in Chinese)
- [4] NAM J S, KIM H E, KIM K U. A new accelerated zero-failure test model for rolling bearings under elevated temperature conditions[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2013, 27(6):1801-1807.
- [5] WANG Zheng, WANG Zengquan, ZHUANG Li, et al. Time-dependent vibration frequency reliability analysis of blade vibration of compressor wheel of turbocharger for vehicle application[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(1):205-210.
- [6] 王四季, 廖明夫, 刘永泉, 等. 航空发动机轴承外环装配工艺引起的转子系统非线性振动[J]. 航空动力学报, 2015, 30(1):82-89.
WANG Siji, LIAO Mingfu, LIU Yongquan, et al. Nonlinear vibration of rotor systems caused by assembly process of a bearing outer ring of an aero-engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(1):82-89. (in Chinese)
- [7] 肖顺根, 马善红, 宋萌萌, 等. 基于EEMD和PCA滚动轴承性能退化指标的提取方法[J]. 江南大学学报, 2015, 14(5):572-579.
XIAO Genshun, MA Shanhong, SONG Mengmeng, et al. Performance degradation indicator extraction method of rolling bearings based on the EEMD and PCA[J]. Journal of Jiangnan University, 2015, 14(5):572-579. (in Chinese)
- [8] 钟先友, 赵春华, 陈保家, 等. 基于形态自相关和时频切片分析的轴承故障诊断方法[J]. 振动与冲击, 2014, 33(4):11-16.
ZHONG Xianyou, ZHAO Chunhua, CHEN Baojia, et al. Bearing fault diagnosis method based on morphological filtering, time-delayed autocorrelation and time-frequency slice analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(4):11-16. (in Chinese)
- [9] 龙源, 黎丹. 基于Hilbert-Huang变换和时频域参数的机车轴承故障诊断[J]. 轴承, 2007(9):44-47.
LONG Yuan, LI Dan. Fault Diagnostic of locomotive bearing based on parameters of time-frequency field and Hil-

bert-Huang transform[J]. Bearing, 2007(9): 44-47. (in Chinese)

[10] 邱荣华,巨孔亮,董友耕,等. 基于性能退化的小子样电主轴可靠性试验研究[J]. 中国机械工程, 2016, 27(20): 2738-2742.

QIU Ronghua, JU Kongliang, DONG Yougeng, et al. Research on reliability test based on small sample Motorized Spindle performance degradation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 27(20): 2738-2742. (in Chinese)

[11] ALI J B, BRIGITTE C M, LOTFI S, et al. Accurate bearing remaining confidence interval of reliability with three-parameter Weibull distribution and artificial neural network[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 56/57(5): 150-172.

[12] 郑锐. 三参数威布尔分布参数估计及在可靠性分析中的应用[J]. 振动与冲击, 2015, 34(5): 78-81.

ZHENG Rui. Parameter estimation of three-parameter Weibull distribution and its application in reliability analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(5): 78-81. (in Chinese)

[13] 栗永非, 杨彬彬. 滚动轴承性能时间序列的模糊假设检验[J]. 轴承, 2017(7): 42-47.

LI Yongfei, YANG Binbin. Fuzzy hypothesis testing for time series of rolling bearing performance[J]. Bearing, 2017(7): 42-47. (in Chinese)

[14] LIN Renchun, PANG Ruiying, YANG Yang, et al. Decision model research of production model based on fuzzy theory[J]. Advanced Materials Research, 2011, 2011, 295-296-297: 1847-1851.

[15] SUN Lu, GU Wenjun. Pavement condition assessment using fuzzy logic theory and analytic hierarchy process[J]. Transportation Engineering, 2011, 137(9): 648-655.

[16] WU Fuxian, WEN Weidong. Scatter factor confidence interval estimate of least square maximum entropy quantile function for small samples[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2016, 29(5): 1285-1293.

[17] SACHS L. Applied statistics[M]. New York: Springer Press, 1982.

[18] PUGACHEV V S. Probability theory and mathematical statistics for engineers[M]. Oxford: Pergamon Press, 1984.

[19] WANG Yanqing, ZHOU Weihu, DONG Dengfeng, et al. Estimation of random vibration signals with small samples using bootstrap maximum entropy method[J]. Measurement, 2017, 105(7): 45-55.

(编辑:王碧珺)