

基于曲面包络逼近原理的点啮合齿面整体设计方法

周凯红^{1,2}, 唐进元²

(1. 桂林理工大学 机械与控制工程学院, 广西 桂林 541004;
2. 中南大学 高性能复杂制造国家重点实验室, 长沙 410083)

摘 要: 基于曲面活动标架理论,提出了点啮合齿面整体设计的曲面包络逼近方法:以第一齿面包络特征线为样条曲线,以第二齿面沿接触点迹线的齿面局部结构作为曲面插值条件,通过第一齿面运动不变量描述的运动变换,构造完全由第一齿面的运动不变量描述的第一齿面共轭运动空间作为第二齿面整体优化设计空间,确保齿面设计方法的可全局优化性和可加工性。根据点啮合齿面加载接触实验数据,以空载啮合时两齿面间隙作为预测和控制重载情况下的接触区形状和大小的设计目标参数,建立点啮合齿面整体优化设计的变分不等式模型。与以往点啮合齿面设计和齿面接触分析(TCA)方法相比,该齿面设计方法摆脱了以往齿面接触分析(TCA)中以特定机床加工参数作为齿面重构参数而给齿面优化设计带来的不必要的限制,能在满足预定的加载的啮合特性要求的同时,确保齿面能用盘铣刀通过多轴联动数控加工方法以展成法加工。仿真实例计算和分析表明:本齿面设计方法能形成完整的弧齿锥齿轮齿面,该齿面在满载啮合时,重合度达到 2.122,传动误差幅值降低至 0.063°,具有优良的加载啮合特性。

关 键 词: 齿面整体啮合特性; 点啮合齿面; 活动标架; 包络逼近; 齿面加载啮合特性

中图分类号: V231; TH132.41 **文献标志码:** A

Design method for global properties of point-contact tooth surface based on envelope-approximation theory

ZHOU Kaihong^{1,2}, TANG Jinyuan²

(1. College of Mechanical and Control Engineering,
Guilin University of Technology, Guilin Guangxi 541004, China;
2. State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing,
Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: A method (envelope-approximation theory) based on the surface moving frame was presented to design the global properties of point-contact tooth surface. The presented method proposed a universal approach to reconstruct the second tooth surface with motion invariants of the first tooth surface. The proposal reconstruction approach was formulated for approximating the conjugate surface of the first tooth surface to the first tooth surface under the movement transformation described with motion invariants of the first tooth surface. The basis function of the previously mentioned approximation was taken as the charac-

收稿日期:2018-01-28

基金项目:国家自然科学基金(51265008);中南大学高性能复杂制造国家重点实验室开放基金(HPCM-2013-06)

作者简介:周凯红(1968—),男,教授、硕士生导师,博士,主要从事复杂齿轮数字化设计和制造研究。

引用格式:周凯红,唐进元. 基于曲面包络逼近原理的点啮合齿面整体设计方法[J]. 航空动力学报,2018,33(10):2542-2552.
ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan. Design method for global properties of point-contact tooth surface based on envelope-approximation theory[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(10): 2542-2552.

teristic curve on the first tooth surface, the interpolation condition was designated as the local structure of the second tooth surface along the contact curve. Based on the experiment data of tooth contact, a variational inequality model for the global optimal design of tooth surfaces was established to determine the loaded meshing characteristics of the second tooth surface according to the position, orientation and dimension of the contact area on the first tooth surface under load-deformation condition. Different from the previous studies about tooth contact analysis, the presented method, freeing the tooth surface optimization design from unnecessary restrictions of the specific machine tool processing parameters, can satisfy the predesigned loaded meshing characteristics and ensure that the tooth surface can be generated by multi-axis flank milling with a conical cutter. A numerical example was given to validate that above-mentioned design method can construct unbroken spiral bevel gear tooth surface with excellent loaded meshing characteristics, for example, the loaded contact ratio was increased to 2.122 and the loaded transmission errors amplitude was lowered to 0.063° .

Key words: global properties; point-contact tooth surface; moving frame; envelope-approximation theory; loaded meshing characteristics

点啮合齿面的拓扑结构与其啮合特性之间存在敏感而复杂的对应关系。特别是在高速重载的实际工况下,点啮合齿面因承载而弹性变形,齿面接触状态由点接触变为微面接触,齿面啮合特性相较空载时发生很大变化,必须在考虑齿面变形的情况下,对点啮合齿面大范围整体拓扑结构进行高精度的分析和设计,才能获得重载情况下的预定的高性能齿面啮合特性。这已成为点啮合齿面设计和制造技术领域的热点和难点问题。

传统的点啮合齿面的整体结构控制实际是通过齿面接触分析(TCA)来实现的。但是,这种方法通过所谓“齿面修形”将点啮合齿面的描述与特定机床上齿面的加工调整参数联系在一起^[1],以满足轻载条件下接触区要求为目标,确定啮合点附近齿面的局部结构;以满足机床运动的可行域为条件,确定齿面的整体结构^[2-7]。

利用六轴联动笛卡儿型数控齿轮加工机床的万能运动功能,基于齿面失配拓扑(ease-off topography)的齿面修形方法^[8-12]将满足预定传动误差、接触迹线轨迹和齿面接触区的小轮设计齿面相对大轮齿面的完全共轲齿面的失配量作为齿面修形要满足的加工要求;以各数控轴的多项式运动方程拟合摇台式机床展成齿面的刀具相对工件的运动;建立齿面失配量与多项式运动方程的系数及刀具参数修正量之间的线性映射方程组;通过最小二乘法求解该线性方程组即得到满足齿面修形要求的多项式系数及刀具参数的修正量。

上述齿面整体设计方法是在摇台式齿轮加工机床条件下发展而成的,无法确切满足重载条件

下的啮合特性要求,且不具通用性,无法对齿面啮合特性进行全局优化设计,没有充分利用多轴联动数控齿轮加工机床的万能加工能力。

多轴联动数控齿轮加工机床的万能运动功能,使点啮合齿面的加工可行域扩大至标准刀具曲面的整个包络运动空间^[13-15]。点啮合齿面的设计应该以该曲面空间作为设计空间,使点啮合齿面的啮合特性能在展成法加工的可能范围内得到充分的优化。有鉴于此,本文提出一种点啮合齿面整体设计方法:首先,基于微分几何的曲面活动标架理论,提出一种以第一齿面(给定齿面)和第二齿面(待设计齿面)上的接触点迹线的各阶参数描述点啮合齿面相对运动的方法,并据此方法运用啮合理论描述第二齿面点接触迹线以外的齿面整体结构,构建能满足空载条件下齿面啮合的预定传动运动关系的,沿接触迹线与第一齿面在预定传动运动下的共轲齿面相切的齿面族,即第一齿面的共轲运动空间,作为齿面整体优化设计空间,确保所设计出的第二齿面能用盘铣刀通过多轴联动数控齿轮加工机床以展成法加工出来。此即所谓齿面整体优化设计的曲面包络逼近方法。其次,将重载情况下的齿面接触区控制问题,归结为第二齿面与第一齿面在预定传动运动下的共轲齿面在接触点迹线以外区域的齿间间隙控制问题。并据此建立以第一齿面共轲运动空间为优化设计空间的点啮合齿面整体优化设计的泛函极值模型。

1 点啮合齿面整体设计的曲面包络逼近原理

假定已经按点啮合齿面主动设计方法^[16]设计好了与第一齿面 $\Sigma_1: \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}(u_1, v_1)$ 沿其上的一条指定的接触点 M 的迹线 $L_1: \mathbf{r}_{1M}^{(1)} = \mathbf{r}_{1M}^{(1)}(u_1(s_1))$ 啮合, 满足预定的齿轮间的传动运动 Δ 和轻载接触区等预定的齿面局部啮合特性的第二齿面的: ①接触点迹线 $L_2: \mathbf{r}_{2M}^{(2)} = \mathbf{r}_{2M}^{(2)}(\varphi_{1M})$ 及其单位法线矢量参数方程 $\mathbf{n}_{2M}^{(2)} = \mathbf{n}_{2M}^{(2)}(\varphi_{1M})$; ②齿面 Σ_2 上的接触点迹线上各点沿其切线方向的法曲率 $\kappa_{\tau}^{(2)}$ 及其短程挠率 $\tau_{ga}^{(2)}$ 和接触点迹线的切线在齿面切平面上的垂直方向的法曲率 $\kappa_{nb}^{(2)}$ 等局部结构。

还假设已求得第一齿面 Σ_1 在预定的传动运动 Δ 下的共轭(线啮合)齿面参数方程为 $\Sigma_p: \mathbf{r}^{(p)} = \mathbf{r}^{(p)}(u_1, \varphi_1)$, 由于待设计的第二齿面 Σ_2 首先要满足上述空载或轻载情况下的啮合特性要求, 故它与齿面 Σ_p 沿接触点迹线 L_2 相切, 且齿面 Σ_p 与第二齿面均固结于第二齿面坐标系 $S_{(2)} [O^{(2)}; x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)}]$ 。这里需要说明的是, 第一齿面 Σ_1 是由标准刀具通过展成法或成形法加工而成的齿面, 也就是说, 它属于标准刀具曲面的包络运动空间。因此, 第一齿面 Σ_1 通过任意空间运动得到的共轭运动曲面也属于这个刀具曲面的包络运动空间, 即都能够以展成法被标准刀具所加工。设第一齿面 Σ_1 的固结的坐标系为 $S_{(1)} [O^{(1)}; x^{(1)} y^{(1)} z^{(1)}]$ 。

要进一步满足点啮合齿轮副在重载情况下的啮合特性要求, 必须以上述点啮合齿面局部结构作为预先满足的边界条件, 以满足重载情况下的齿面接触区的位置、形状和大小为目标, 对第二齿面 Σ_2 在接触迹线以外的齿面进行整体设计。同时, 为了确保所设计的齿面能被多轴联动数控机床加工, 第二齿面的设计空间必须限定为第一齿面的共轭运动空间。下面基于曲面活动标架用第一齿面的运动不变量描述产生第一齿面的共轭运动空间的空间包络运动。

1.1 齿面共轭包络运动的齿面运动不变量描述方法

第一齿面 Σ_1 上的接触点迹线 L_1 沿第二齿面 Σ_2 上的接触点迹线 L_2 的共轭运动, 也就是两啮合齿轮的传动运动 Δ , 使第一齿面 Σ_1 包络出与其线啮合的齿面 Σ_p , 但它无法满足某些啮合特性要求。如果让第一齿面上任意一点 $M'(u_{1M}, v_{1M})$ 沿

第二齿面 Σ_2 上的接触点迹线 L_2 进行共轭包络运动, 则第一齿面将包络出一个沿接触点迹线 L_2 与齿面 Σ_p 相切的共轭齿面族, 即第一齿面的共轭运动空间。在这一曲面运动空间中, 每一个齿面在接触点迹线 L_2 以外的部分, 以不同的间隙逼近齿面 Σ_p 。控制这一间隙, 就能控制重载情况下的齿面接触区的位置、形状和大小, 从而确定第二齿面的整体结构。这就是齿面整体设计的包络逼近原理。下面以第一齿面的运动不变量描述产生第一齿面的共轭运动空间的空间包络运动 Ψ 。

1.1.1 曲面活动标架沿齿面和齿面上的接触点迹线运动的描述

设第一齿面 $\Sigma_1: \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}(u_1, v_1)$, 其参数 u_1, v_1 构成正交参数网, 则在第一齿面 Σ_1 上任意一点 $M'(u_{1M}, v_{1M})$ 处取定一个曲面正交活动标架场 $S_{fi} \left[M'; \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E}} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{\sqrt{G}} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_{1M} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \right]$
 $\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{r}^{(1)}}{du_{1M}}, \mathbf{r}_2 = \frac{d\mathbf{r}^{(1)}}{dv_{1M}}, E = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1, G = \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2$ 。

当点 M' 沿正交参数网线 u_1, v_1 以速度 $\mathbf{V}_M = \frac{du_{1M}}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dv_{1M}}{dt} \mathbf{e}_2$ 移动时, 活动标架 S_{fi} 也随之移动并绕 M' 转动。由微分几何的曲面论的基本定理, 活动标架 S_{fi} 的运动(角速度)方程为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_{23} \mathbf{e}_1 - \omega_{13} \mathbf{e}_2 + \omega_{12} \mathbf{n}_{1M} \tag{1}$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{-E_2 du_{1M}/dt + G_1 dv_{1M}/dt}{2\sqrt{EG}} \\ E_2 &= \frac{dE}{dv_{1M}}, G_1 = \frac{dG}{du_{1M}} \\ \omega_{23} &= \frac{Mdu_{1M}/dt + Ndv_{1M}/dt}{\sqrt{G}} \\ M &= \mathbf{n}_{1M} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}^{(1)}}{\partial u_{1M} \partial v_{1M}} \\ N &= \mathbf{n}_{1M} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}^{(1)}}{\partial v_{1M}^2} \\ \omega_{13} &= \frac{Ldu_{1M}/dt + Mdv_{1M}/dt}{\sqrt{E}} \\ L &= \mathbf{n}_{1M} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}^{(1)}}{\partial u_{1M}^2} \end{aligned} \right.$$

设 L_2 是第二齿面 $\Sigma_2: \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)}(u_2, v_2)$ 上的接触点迹线, 其方程为 $\mathbf{r}_{2M}^{(2)} = \mathbf{r}_{2M}^{(2)}(\varphi_{1M}(s_p))$, s_p 为曲线 L_2 的弧长参数; 接触点迹线 L_2 上任意一点 M 的单位切向量为 $\boldsymbol{\alpha}$, 曲面在该点的单位法向量为 $\mathbf{n}_{pM}$, 则在曲线 L_2 上点 M 处取定了一个曲面正交标架场 $S_{fp} [M; \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}_{pM} \times \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{n}_{pM}]$ 。

当 M 沿 L_2 以速度 $\mathbf{v}_{Mp} = \frac{d\varphi_{1M}}{ds_p} \cdot \frac{ds_p}{dt} \boldsymbol{\alpha}$ 移动时, 活动标架 $S_{fp}[M; \quad \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}_{pM} \times \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{n}_{pM}]$ 也随之移动并绕 M 转动。由微分几何的曲面论的基本定理, 活动标架 $S_{fp}[M; \quad \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}_{pM} \times \boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{n}_{pM}]$ 的运动(角速度)方程为

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{d\varphi_{1M}}{ds_p} \cdot \frac{ds_p}{dt} (\tau_{g\alpha}^{(2)} \boldsymbol{a} - \kappa_{n\alpha}^{(2)} \boldsymbol{v} + \kappa_{g\alpha}^{(2)} \boldsymbol{n}_{pM}) \quad (2)$$

式中 $\tau_{g\alpha}^{(2)}$ 、 $\kappa_{n\alpha}^{(2)}$ 分别是第二齿面 Σ_2 在点 M 沿 α 方向的短程挠率和法曲率, $\kappa_{g\alpha}^{(2)}$ 是曲面 Σ_2 在点 M 沿 α 方向的短程曲率。

1.1.2 第一齿面 Σ_1 与第二齿面 Σ_2 的相对运动速度的曲面运动不变量参数描述

将文中第 1.1.1 节中第一齿面 Σ_1 及其上的曲面活动标架 S_{f_1} 和其固结坐标系 $S_{(1)}$ 与第二齿面 Σ_2 及其上的曲面活动标架 S_{f_2} 和其固结坐标系 $S_{(2)}$ 按图 1 所示的啮合关系“装配”在一起,使第一齿面 Σ_1 上的点 M' 与第二齿面 Σ_2 上的接触点迹线上的点 M 重合,且使两点处的曲面法矢重合,即满足第二齿面沿接触点迹线 L_2 的局部结构的要求。若第一齿面相对第二齿面满足上述位置关系进行相对运动,则坐标系 $S_{(1)}$ 与坐标系 $S_{(2)}$ 之间的相对运动为 Ψ ,即第一齿面 Σ_1 通过沿接触迹线 L_2 相对曲面 Σ_2 的运动 Ψ 将包络出第二齿面(族) Σ_2 。图中 L_g 是形成包络曲面 Σ_2 的特征

线,它也是重构曲面 Σ_2 的样条曲线。因此,在 Ψ 运动的任意时刻,曲面 Σ_1 与 Σ_2 相切于 L_g, L_g 和 L_2 交于点 M ,而在点 M' 和 M ,对于曲面 Σ_1 与 Σ_2 分别有活动标架 S_{fi} 和 S_{fp} ,活动标架 S_{fp} 相对活动标架 S_{fi} 的角速度为 $\omega_{tp} = \frac{d\Delta}{dt} n_{iM}$,如图 1 所示。由

式(1)和式(2)知曲面 Σ_1 相对曲面 Σ_2 的角速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{(1)(2)} = & -(\omega_{23}\mathbf{e}_1 - \omega_{13}\mathbf{e}_2 + \omega_{12}\mathbf{n}_{1M}) + \\ & (\tau_{g\alpha}^{(p)}\boldsymbol{\alpha} - \kappa_{n\kappa}^{(p)}\mathbf{v} + \kappa_{g\alpha}^{(p)}\mathbf{n}_{pM})\frac{d\varphi_{1M}}{ds_p} \cdot \frac{ds_p}{dt} - \frac{d\Delta}{dt}\mathbf{n}_{1M} \end{aligned} \quad (3)$$

考虑 $S_{(1)}$ 、 S_{ft} 、 S_{fp} 和 $S_{(2)}$ 之间的相对运动,在 M (即 M')点曲面 Σ_1 相对曲面 Σ_2 的速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{M(1)(2)} &= \mathbf{V}_{M(2)} - \mathbf{V}_{M(1)} = \\ &= -\left(\frac{d\mathbf{u}_{1M}}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{d\mathbf{v}_{1M}}{dt}\mathbf{e}_2\right) + \frac{d\varphi_{1M}}{ds_p} \cdot \frac{ds_p}{dt}\boldsymbol{\alpha} = \\ &= \left[-\left(\frac{d\mathbf{u}_{1M}}{ds_p}\mathbf{e}_1 + \frac{d\mathbf{v}_{1M}}{ds_p}\mathbf{e}_2\right) + \frac{d\varphi_{1M}}{ds_p}\boldsymbol{\alpha}\right] \frac{ds_p}{dt} \quad (4) \end{aligned}$$

按式(4)的方式,将式(3)中的 $\frac{ds_p}{dt}$ 因子提出
来,并将之指定为基准速率,不失一般性,令 $\frac{ds_p}{dt}=1$,而由于 L_2 的方程已经由与 L_1 相对运动 Λ 的
共轭条件确定,故 $\frac{d\varphi_{1M}}{ds_p}$ 在这里是已经确定的函数
量,因此,在曲面 Σ_1 上任意点 $P(u_1, v_1)$,曲面 Σ_1
相对曲面 Σ_2 的速度函数可表示为

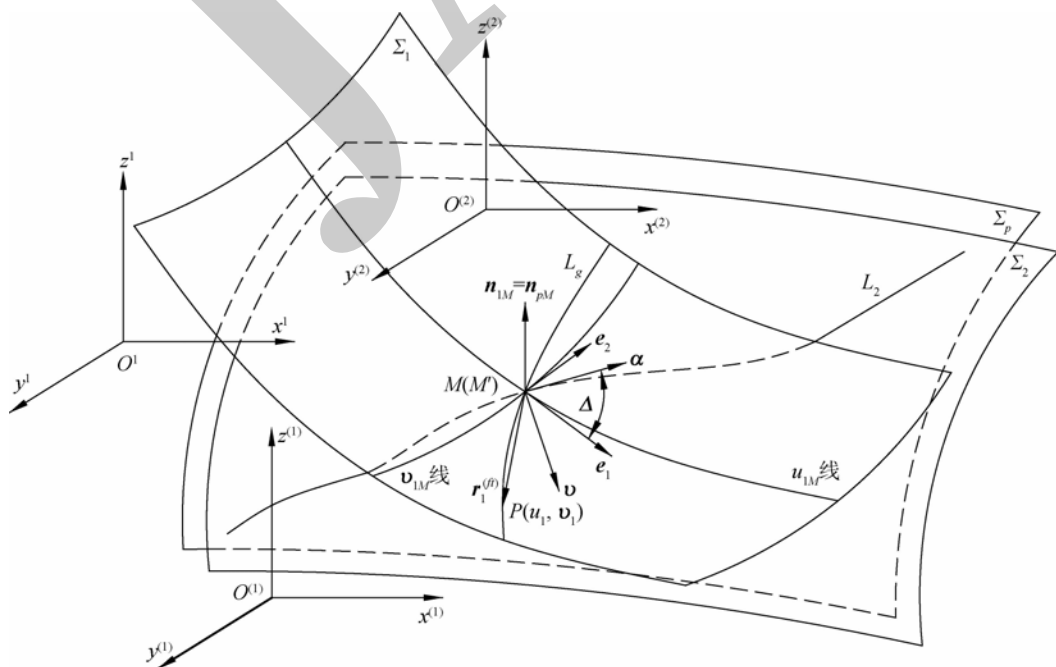


图 1 第一齿面和第二齿面在活动标架下的相对运动

Fig. 1 Motions from the first tooth surface to the second tooth surface based on the moving frame

$$\mathbf{V}_{(1)(2)} \left(u_{1M}, v_{1M}, s_p, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, u_1, v_1, \Delta \right) = \boldsymbol{\omega}_{(1)(2)} \times \mathbf{r}_1^{(f)} + \mathbf{V}_{M(1)(2)} \quad (5)$$

式(5)中的 $\mathbf{r}_1^{(f)}$ 表示第一齿面 Σ_1 上的点 $P(u_1, v_1)$ 在活动标架 S_{fi} 下的位置矢量, Δ 为 S_{fi} 和 $S_{(2)}$ 之间的夹角。第一齿面按式(5)相对坐标系 $S_{(2)}$ 运动得到的第一齿面 Σ_1 的共轭运动空间 Σ_2 , 其中的每个曲面都相切于曲线 L_2 , 即满足第1大节中局部结构①。若进一步让齿面 Σ_2 满足局部结构②, 则 Δ 可以由曲面 Σ_1 、曲线 L_2 的相应运动不变量来确定^[11-12]。即 Δ 可以表示为

$$\Delta = \Delta(u_{1M}, v_{1M}, s_p) \quad (6)$$

1.2 从第一齿面 Σ_1 到第二齿面 Σ_2 的运动变换及第二齿面 Σ_2 的设计空间: 第一齿面的共轭运动空间

第一齿面 Σ_1 按上节所描述的运动 Ψ 运动, 将包络出第二齿面(族) Σ_2 (即第一齿面 Σ_1 在运动 Ψ 下的共轭齿面)。由于包络运动 Ψ 不同于传动运动 Λ , 第二齿面(族) Σ_2 与第一齿面 Σ_1 在相对运动 Δ 下将是局部共轭的, 即齿面 Σ_1 与齿面 Σ_2 将形成点啮合齿轮副。因此, 所谓点啮合齿面的包络逼近重构, 从齿面加工角度讲是对齿面 Σ_1 在相对运动 Δ 下的共轭齿面 Σ_p 的局部啮合化“修形”, 或者从齿面设计角度来说运动 Ψ 是待设计齿轮副相对运动 Δ 的失配。当然, 这种齿面重构又和通常的齿面修形或运动失配不同: 一是其运动描述与实际齿面加工机床结构无关, 而与待设计齿面 Σ_2 的啮合特性相关, 它只是一种虚拟的加工, 因而实际上是齿面设计或重构。二是“修形”的“刀具”不是标准刀具, 而是第一齿面 Σ_1 , 只是第一齿面 Σ_1 是由标准刀具曲面展成的, 它属于标准刀具曲面的包络运动空间。

由于第二齿面(族) Σ_2 是第一齿面 Σ_1 在包络运动 Ψ 下的共轭齿面, 而齿面 Σ_p 是第一齿面 Σ_1 在传动运动 Δ 下的共轭齿面, 故两者同属于第一齿面 Σ_1 的共轭运动空间。因此, 以第一齿面 Σ_1 在运动 Ψ 下的包络特征曲线作为样条曲线重构第二齿面, 既能保证齿面设计的精确性, 所设计的齿面的可展成性。

为了最终确定和设计第二齿面 Σ_2 , 应该由啮合条件求出它的参数方程, 即确定第一齿面在运动 Ψ 下的共轭运动空间。图2描述了从第一齿面出发, 分别由运动变换 Ψ 展成(拟合)第二齿面 Σ_2 和由运动变换 Λ 展成(共轭)曲面 Σ_p 的坐标变换过程以及第二齿面 Σ_2 的设计思路。图中两个

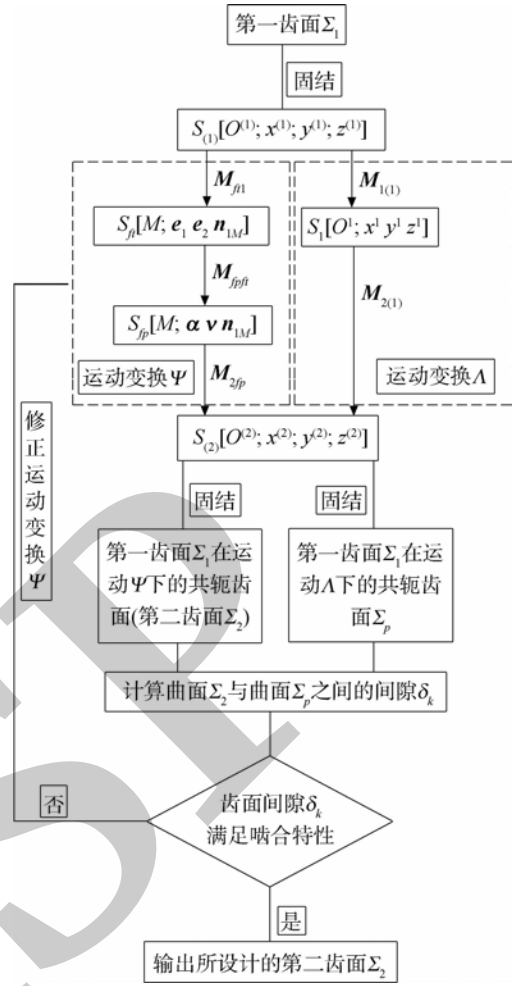


图2 齿面坐标系运动变换及第二齿面设计流程

Fig. 2 Flow chart for the coordinate systems transformation from the first tooth surface to the second tooth surface and the second tooth surface design

虚线方框内的内容分别描述的是运动变换 Ψ 和运动变换 Λ 的坐标变换过程。其中运动变换 Ψ 是在曲面 Σ_1 和 Σ_2 的活动标架下由曲面 Σ_1 和 L_2 的运动不变量描述的(如图1所示); 运动变换 Λ 是在点啮合齿轮副固定坐标系下由齿轮副结构参数描述的。由图2可知, 沿运动变换 Ψ 和运动变换 Λ , 从坐标系 $S_{(1)}$ 到坐标系 $S_{(2)}$ 的变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{(2)(1)} = \begin{cases} \mathbf{M}_{(2)fp} \mathbf{M}_{fpfi} \mathbf{M}_{fi(1)} & (\text{运动变换 } \Psi) \\ \mathbf{M}_{(2)1} \mathbf{M}_{1(1)} & (\text{运动变换 } \Lambda) \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{M}_{fi(1)} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} & -(x_{1M}^{(1)} e_{1x} + y_{1M}^{(1)} e_{1y} + z_{1M}^{(1)} e_{1z}) \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} & -(x_{1M}^{(1)} e_{2x} + y_{1M}^{(1)} e_{2y} + z_{1M}^{(1)} e_{2z}) \\ n_{1Mx} & n_{1My} & n_{1Mz} & -(x_{1M}^{(1)} n_{1x} + y_{1M}^{(1)} n_{1y} + z_{1M}^{(1)} n_{1z}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{fpft} = \begin{bmatrix} \cos\Delta & -\sin\Delta & 0 & 0 \\ \sin\Delta & \cos\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(2)fp} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \nu_x & n_{pMx} & x_{2M}^{(2)} \\ \alpha_y & \nu_y & n_{pMy} & y_{2M}^{(2)} \\ \alpha_z & \nu_z & n_{pMz} & z_{2M}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里要说明的是 $\mathbf{r}^{(1)}(u_{1M}, v_{1M}) = [x_{1M}^{(1)}(u_{1M}, v_{1M}) \quad y_{1M}^{(1)}(u_{1M}, v_{1M}) \quad z_{1M}^{(1)}(u_{1M}, v_{1M}) \quad 1]^T$ 表示曲面 Σ_1 上任意点 M' 在 $S_{(1)}$ 中的位置矢量函数,此 M' 点与曲面 Σ_2 上的曲线 L_2 上的 M 点关于运动 Ψ 共轭。

$\mathbf{r}_{2M}^{(2)}(\varphi_{1M}(s_p)) = [x_{2M}^{(2)}(s_p) \quad y_{2M}^{(2)}(s_p) \quad z_{2M}^{(2)}(s_p) \quad 1]^T$ 表示曲线 L_2 在 S_2 中的矢量参数方程。式(7)中的矩阵 $\mathbf{M}_{(2)1}$ 、 $\mathbf{M}_{1(1)}$ 为啮合齿轮传动运动 Δ 的变换矩阵,它们由齿轮副结构和运动参数描述^[11]。进一步分析可知,运动变换 Ψ 是一个运动变换群,表示所有的第一齿面沿曲线 L_2 与第二齿面啮合的运动,而第一齿面 Σ_1 在运动变换 Ψ 下的共轭齿面 Σ_2 就是第一齿面 Σ_1 在运动变换 Ψ 下所有共轭齿面的集合,此即第一齿面的共轭运动空间;而传动运动 Δ 是一个给定的第一齿面与第二齿面相啮合的运动,因此,它是 Ψ 运动变换群中的一个元素,而第一齿面 Σ_1 在运动变换 Δ 下的共轭齿面 Σ_p 是第一齿面在运动变换 Ψ 下的共轭运动空间的一个元素。

第一齿面 Σ_1 在相对运动 Ψ 下的包络面 Σ_2 在与曲面 Σ_p 固结的坐标系 $S_{(2)} [O^{(2)}; \quad x^{(2)} \quad y^{(2)} \quad z^{(2)}]$ 下的方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_2^{(2)} = \mathbf{M}_{(2)(1)} \mathbf{r}_1^{(1)} \\ \mathbf{N}_1 \mathbf{V}_{(1)(2)} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{r}^{(1)}(u_1, v_1) = [x_1^{(1)}(u_1, v_1) \quad y_1^{(1)}(u_1, v_1) \quad z_1^{(1)}(u_1, v_1) \quad 1]^T$ 表示曲面 Σ_1 在坐标系 $S_{(1)} [O^{(1)}; \quad x^{(1)} \quad y^{(1)} \quad z^{(1)}]$ 下的矢量参数方程。 $\mathbf{N}_1(u_1, v_1)$ 为曲面 Σ_1 上任意一点 P 处单位法矢的矢量参数方程,此点 P 为曲面 Σ_1 上不同于点 M' 的另一任意点(如图 1)。

将式(5)~式(7)代入式(8)并消去参数 u_1 , 就得到刀具曲面 Σ_1 在运动 Ψ 下的包络曲面 Σ_2 在与曲面 Σ_p 固结的坐标系 $S_{(2)}$ 下的矢量函数方程

$$\mathbf{r}_2^{(2)} = \mathbf{r}_2^{(2)} \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right) \quad (9)$$

由式(9)可知,第一齿面 Σ_1 按式(5)、式(7)

所描述的方式相对第二齿面 Σ_2 运动时,包络出的曲面 Σ_2 是一个相切于曲线 L_2 的曲面族,即第一齿面 Σ_1 的共轭运动空间 Σ_2 。这个曲面族中的所有曲面沿刀触点轨迹线 L_2 的局部结构均满足上节第二齿面 Σ_2 的局部结构设计要求。在接触点迹线 L_2 以外的曲面区域,曲面族中不同的曲面 Σ_2 与曲面 Σ_p 存在不同的间隙(图 3)。与曲面 Σ_p 存在不同的间隙的第二齿面 Σ_2 与第一齿面 Σ_1 在加载啮合条件下,将获得不同大小和形状的齿面接触区,因此,有可能通过控制这一间隙,从曲面族中进一步优选出满足重载下的啮合特性设计要求的齿面 Σ_2 。

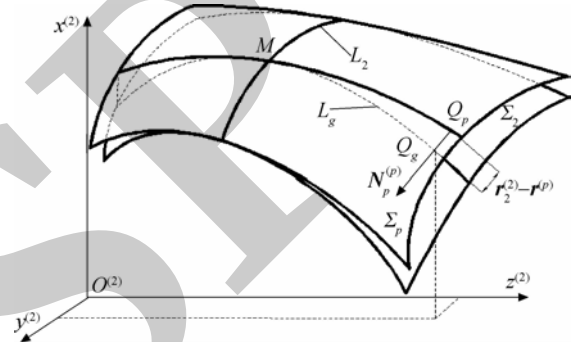


图 3 第二齿面 Σ_2 沿包络特征线 L_g 与曲面 Σ_p 的间隙
Fig. 3 Determination of the deviation of the second tooth surface Σ_2 from surface Σ_p along the characteristic curve L_g

1.3 第二齿面 Σ_2 在接触点迹线以外的区域与第一齿面 Σ_1 的间隙

齿面加载对滚实验表明^[1]:重载情况下在接触点附近,两啮合齿面间距离小于某一给定值的两点因齿面受载弹性变形而相互接触,从而形成齿面重载情况下的一个瞬时接触区。齿面沿接触点迹线连续啮合,所形成的各个瞬时接触区就组合成齿面接触区。在每一个啮合点处,啮合齿面都会因承载而发生弹性变形。只要不发生曲率干涉,都会大致形成一个以啮合点为中心的椭圆瞬时接触区。接触椭圆的长轴应该沿着齿长方向,这一要求已经在局部结构设计②中得到满足,即已经设计好第二齿面沿接触迹线的局部结构,使两啮合齿面的最小相对法曲率方向 α_m 沿齿长方向。瞬时接触椭圆长半轴的大小则由第二齿面 Σ_2 与第一齿面 Σ_1 之间的间隙决定。故两点啮合齿面之间的间隙是按重载情况下的啮合特性设计点啮合齿面整体结构的重要参考量。

由于第一齿面 Σ_1 与第二齿面 Σ_2 不在同一个

坐标系中,计算每个啮合点处的齿面间隙都要进行坐标变换,很不方便。故计算第一齿面 Σ_1 与第二齿面 Σ_2 在啮合点附近的间隙就转化为在坐标系 $S_{(2)} [O^{(2)}; x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)}]$ 中,计算第二齿面 Σ_2 与第一齿面 Σ_1 在传动运动 Δ 下的共轭齿面 Σ_p 在接触迹线 L_2 以外的齿面间隙。如图 3 所示,在坐标系 $S_{(2)} [O^{(2)}; x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)}]$ 中,第二齿面 Σ_2 与第一齿面在相对运动 Δ 下的包络曲面 Σ_p 沿接触点迹线 L_2 相切。 L_g 是组成 Σ_p 的过 L_2 上任意点 M 的包络特征线, Q_g 是其上任意一点,过此点作曲面 Σ_2 的垂线交曲面 Σ_2 于 Q_p 。那么,对于在 Q_g 点处曲面 Σ_2 对曲面 Σ_p 的间隙 δ_k 有

$$\delta_k N_p^{(p)} = \delta_k N_p(u_1, \varphi_1) = Q_p Q_g = r_2^{(2)} - r^{(p)} = r_2^{(2)} \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right) - r^{(p)}(u_1, \varphi_1) \tag{10}$$

式中 $N_p(u_1, \varphi_1)$ 为曲面 Σ_p 上任意一点 c^* 处单位法矢的矢量参数方程。显然,如果选定了点 Q_g ,即确定了矢量 $r_2^{(2)}$,则式(10)所表达的 3 个标量方程正好可以求解参数 u_1, φ_1 和 δ_k ,从而确定第二齿面 Σ_2 与曲面 Σ_p 在任意位置的间隙 δ_k 以及点 Q_p 的位置矢量 $r^{(p)}(u_1, \varphi_1)$ 。

这样,第一齿面 Σ_1 通过运动变换 Ψ ,按啮合条件重构第二齿面 Σ_2 ,此齿面在相对运动 Δ 下,与第一齿面 Σ_1 失配为沿接触点迹线 L_2 具有本节所要求的齿面局部结构的点啮合,且在 L_2 以外的

齿面区域按式(10)控制的与第一齿面 Σ_1 的间隙满足重载情况下两齿面的啮合特性。这就是点啮合齿面整体设计的包络逼近原理。

下一节应用曲面包络逼近原理,通过控制第二齿面 Σ_2 与第一齿面 Σ_1 在相对运动 Δ 下的共轭齿面 Σ_p 在接触点迹线 L_2 以外的齿面间隙,控制两点啮合齿面在每个啮合瞬时的接触椭圆长半轴的大小,使得齿面 Σ_1 和 Σ_2 在重载情况下的整个啮合过程中形成正确的接触区,即重载情况下的啮合特性,以实现点啮合齿面的整体结构设计。

2 点啮合齿面整体设计方法

根据齿面加载对滚实验,当第一齿面 Σ_1 与第二齿面 Σ_2 在啮合点附近的间隙小于某一给定值时,齿面上相应的点就会在加载下接触,从而形成齿面接触区。在满载的情况下,齿面接触区的面积不能太大,也不能太小。接触区面积太大,超过齿面面积,则齿面接触载荷有超过齿面承载能力的危险,造成齿面加速磨损;接触区面积太小,不到齿面面积一半,则齿面承载能力没有得到充分利用,在接触区将形成接触应力集中。因此,点啮合齿面整体设计的原则是控制满载情况下的齿面接触区面积是整个齿面面积的 $\frac{2}{3} \sim \frac{8}{9}$ 。

如图 4 所示,在过任意接触点 κ_2 的第一齿面 Σ_1 在相对运动 Δ 下的包络特征线 L_g 上,分别位

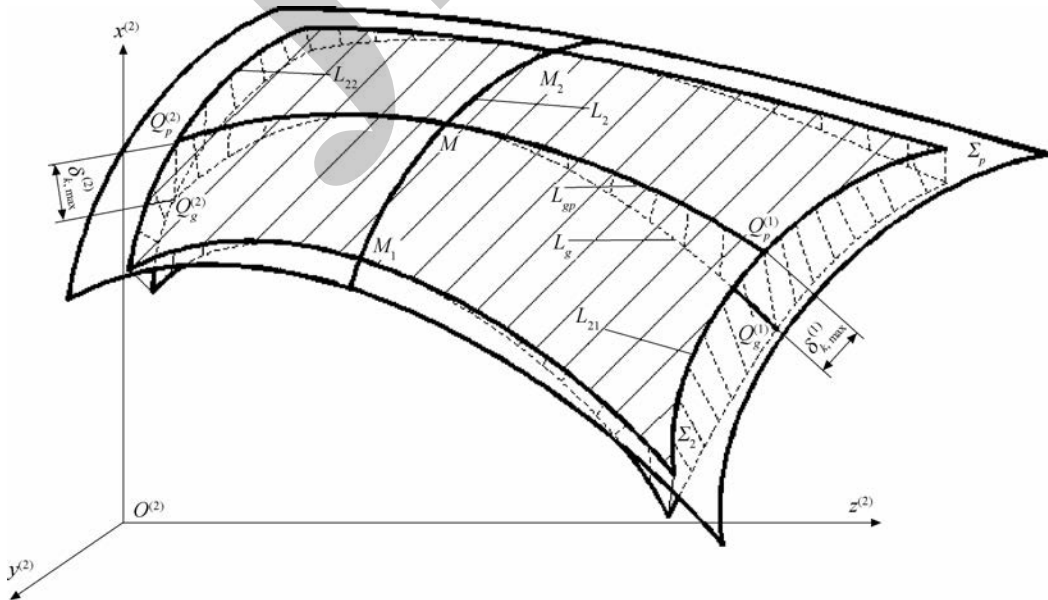


图 4 第二齿面 Σ_2 在接触迹线 L_2 以外与曲面 Σ_p 的间隙分布及啮合接触区

Fig. 4 Deviations of the second tooth surface Σ_2 from surface Σ_p out of the contact curve L_2 and the contact area

于接触点 M 的两侧的取两点 $Q_g^{(1)}$ 和 $Q_g^{(2)}$, 其对应的曲纹坐标分别设为 (s_p, v_{11}) 、 (s_p, v_{12}) 。显然, L_g 上点 $Q_g^{(1)}$ 和 $Q_g^{(2)}$ 之间的各点到曲面 Σ_2 的距离 δ_k 与该点到接触点 M 的距离成正比。设曲线 L_{gp} 、点 $Q_p^{(1)}$ 和 $Q_p^{(2)}$ 分别是曲线 L_g 、点 $Q_g^{(1)}$ 和 $Q_g^{(2)}$ 在曲面 Σ_2 上的投影。当 $Q_g^{(1)}Q_p^{(1)} = Q_g^{(2)}Q_p^{(2)} \leq \delta_0$ 时, 第一齿面 Σ_1 上点 $Q_g^{(1)}$ 和 $Q_g^{(2)}$ 之间的狭长齿面与曲面 Σ_2 上 $Q_p^{(1)}$ 和 $Q_p^{(2)}$ 点之间的狭长曲面在承受满载的情况下将贴合在一起, 并在第二齿面 Σ_2 上形成一个瞬时接触区。逐点控制每一个接触点所形成的瞬时接触区的大小、形状和方向显然是不可行的, 因为这样设计的第二齿面将很可

$$\frac{2}{3} \leq \frac{\int_{s_{p1}}^{s_{p2}} ds_p \int_{v_{11}}^{v_{12}} \sqrt{[(\mathbf{r}_{gp})_{v_1} (\mathbf{r}_{gp})_{v_1}] [(\mathbf{r}_{gp})_{s_p} (\mathbf{r}_{gp})_{s_p}] - [(\mathbf{r}_{gp})_{v_1} (\mathbf{r}_{gp})_{s_p}]^2} dv_1}{\int_D \sqrt{[(\mathbf{r}^{(p)})_{u_1} (\mathbf{r}^{(p)})_{u_1}] [(\mathbf{r}^{(p)})_{\varphi_1} (\mathbf{r}^{(p)})_{\varphi_1}] - [(\mathbf{r}^{(p)})_{u_1} (\mathbf{r}^{(p)})_{\varphi_1}]^2} d\varphi_1 du_1} \leq \frac{8}{9} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{r}_{gp} = \mathbf{r}_{gp} \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right)$ 是用参数 (s_p, v_1) 表示的曲面 Σ_p 方程。由式(10)求得

$$\begin{cases} u_1 = u_1 \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right) \\ \varphi_1 = \varphi_1 \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right) \end{cases}$$

并代入方程 $\mathbf{r}^{(p)} = \mathbf{r}^{(p)}(u_1, \varphi_1)$ 得到。而式(11)中 $(\mathbf{r}_{gp})_{v_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_{gp}}{\partial v_1}$; $(\mathbf{r}_{gp})_{s_p} = \frac{\partial \mathbf{r}_{gp}}{\partial s_p}$; $(\mathbf{r}^{(p)})_{u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(p)}}{\partial u_1}$; $(\mathbf{r}^{(p)})_{\varphi_1} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(p)}}{\partial \varphi_1}$ 。由式(10)还可求得第二齿面 Σ_2 与曲面 Σ_p 的齿面间隙 $\delta_k = \delta_k \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right)$, 式(11)的积分上下界 v_{11}, v_{12} 是下列以 v_1 为未知量的如下方程的解(图 4)

$$\delta_k \left(u_{1M}, v_{1M}, \frac{du_{1M}}{ds_p}, \frac{dv_{1M}}{ds_p}, s_p, v_1 \right) = \delta_0 \quad (12)$$

式(11)中的 s_{p1}, s_{p2} 分别为接触点迹线 L_2 起始点 M_1 和终点 M_2 的弧长坐标。 D 为第一齿面 Σ_1 的参数 u_1 和齿面传动从啮合的起始点 M_1 到啮合的终点 M_2 的齿轮 1 的转角 φ_1 的定义域所定义的积分区域。式(12)中的 δ_0 为啮合齿面 Σ_1 和 Σ_2 在承受满载的情况下的齿面接触区的边界各点, 在齿面空载接触时的间隙, 这一参数与齿面材料的力学特性和齿面结构有关, 由实验测定。

至于接触区的位置和方向, 按格里森齿轮技术的要求, 它应位于齿面的中央, 方向应沿齿长方向。这些要求已经在齿面局部结构设计中通过确定接触点迹线 L_1, L_2 在实际齿面上的位置以及

能不能连续可微的。由图 4 分析可知: 从啮合的起始点 M_1 到啮合的终点 M_2 的整个啮合过程将在第二齿面 Σ_2 上连续形成一系列这样的瞬时接触区, 并拼接成如图 4 阴影区域所示的齿面接触区。控制整个齿面啮合过程中在第二齿面 Σ_2 上所形成的接触区, 并获得连续可微的第二齿面是可能的。在齿面承受满载的情况下, 接触区的面积应在实际齿面的范围内尽量大, 但不能超出实际齿面。因此, 控制接触区的面积大小占整个齿面面积的 $\frac{2}{3} \sim \frac{8}{9}$ 为宜。

沿接触点迹线各点的法曲率和短程挠率已经予以确定。

至此, 通过确定点啮合齿面在满载情况下的接触区的大小、方向和位置, 建立了点啮合齿面整体结构设计的变分不等式模型。求解由式(11)和式(12)组成的不等式方程式组, 可以得到两个函数闭区间 $u_{1M}(s_p) \in [u_{1M1}(s_p) \quad u_{1M2}(s_p)]$ 和 $v_{1M}(s_p) \in [v_{1M1}(s_p) \quad v_{1M2}(s_p)]$, 将其代入方程(9)即可求得待求的第二齿面 Σ_2 的方程的设计区间 $\mathbf{r}_2^{(2)} = \mathbf{r}_2^{(2)}(s_p, v_1) \in [\mathbf{r}_{21}^{(2)}(s_p, v_1) \quad \mathbf{r}_{22}^{(2)}(s_p, v_1)]$ 。这也正是齿面设计所要求的加工误差区间。

3 齿面设计实例及其结果

下面以第一齿轮(大轮)齿面成形法加工的格里森弧齿锥齿轮齿面副为例, 说明上述基于曲面包络逼近原理设计第二齿轮(小轮)齿面的设计方法及其结果。齿轮副基本参数如表 1。

对本例中所使用的齿轮材料做加载对滚试验测得: 啮合齿面在满载情况下, 齿面发生接触的最大间隙值为 $\delta_0 = 0.0135 \text{ mm}$ 。

齿面的局部啮合性能要求为:

- 1) 第一齿轮齿面 Σ_1 上的接触点迹线满足
- $$Y = h_{f1} \pm \cot 15^\circ X \quad (13)$$

即接触点迹线在大轮轴截面上的投影是一直线。它与齿高方向的夹角为 15° 。 h_1 为大轮在齿宽中点处的齿根高。 X 与齿根母线重合, 沿齿长方向指向大端, Y 沿齿高方向, 过齿宽中点, 指向齿顶。

- 2) 预定的空载情况下相对运动规律
- $$\varphi_1 = \varphi_{01} + i_{12}^0 \varphi_2 \pm 0.002 \varphi_2^2 \quad (14)$$

表 1 齿轮副主要几何参数

Table 1 Basic parameters of the Gleason's Triac Formate® hypoid gear in the numerical example

齿轮参数	数值
大轮齿数 z_1	42
小轮齿数 z_2	12
大轮正车面法向压力角/ $\alpha_{0t}/(^{\circ})$	20
轴交角 $\Sigma/(^{\circ})$	90
大轮分锥角 $\delta_1/(^{\circ})$	74.0546
大轮根锥角 $\delta_{f1}/(^{\circ})$	75.0483
大轮面锥角 $\delta_{a1}/(^{\circ})$	70.7959
齿宽中点螺旋角 $\beta/(^{\circ})$	34.3541
齿宽中点锥距 R_m/mm	139.743
齿宽中点法向模数 m_n/mm	5.282
大轮法向高度变位系数 x_{n1}/mm	-0.533
大轮法向切向变位系数 x_{t1}/mm	0.08
法向齿顶高系数 h_a^*	1.0
法向顶隙系数 c^*	0.25
刀盘半径 r_0/mm	139.743
大轮正车面法向压力角 $\alpha_{0t}/(^{\circ})$	20
小轮法向高度变位系数 x_{n2}	0.533
小轮法向切向变位系数 x_{t2}	-0.08

式中 $i_{12}^0 = -(z_2/z_1)$; 式(13)和式(14)中, 正车齿面(大轮凸面)取“—”, 倒车齿面(大轮凹面)取“+”。

3) 预定的接触迹线位置对安装误差的敏感度

$$C_{\text{ond}\infty}(A) \leq \epsilon = 1.3 \tag{15}$$

4) 预定的齿面接触强度的条件

$$k\sigma \leq [\sigma] = 1500 \text{ N/mm}^2 \tag{16}$$

如图 5 所示的第二(小轮)齿面凹面及其上的齿面接触区(点划线所包围的部分)和接触点迹线

(细实线)。图 6 是与第二(小轮)齿面凹面啮合的第一(大轮)齿面凸面及其上的接触点迹线(细实线)和齿面接触区(点划线所包围的部分)。在计算啮合齿面满载接触区的过程中, 也计算了满载后啮合点的弹性位移, 根据齿面弹性发生变形后新的啮合点位置, 计算了齿面在满载弹性变形后的传动误差, 并与齿面设计所预定的空载情况下的传动误差进行比较(图 7)。从图 7 可以看出:

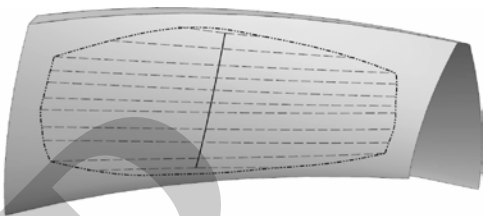


图 5 按包络逼近方法设计的第二(小轮)齿面凹面整体结构及其上的接触点迹线和满载齿面接触区

Fig. 5 Concave side of the pinion, its contact path and loaded contact bearing adopted from envelope-approximation theory

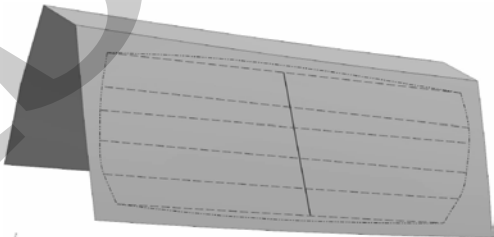


图 6 与第二(小轮)齿面凹面点啮合的第一(大轮)齿面凸面整体结构及其上的接触点迹线和满载齿面接触区

Fig. 6 Convex side of the gear, its contact path and loaded contact bearing adopted from envelope-approximation theory

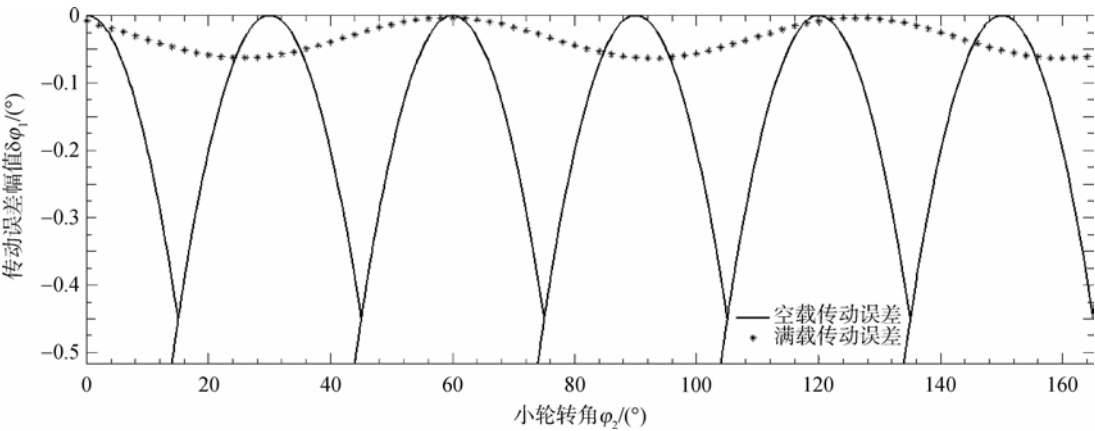


图 7 点啮合齿面在满载情况下的传动误差曲线与其在空载情况下的传动误差曲线比较

Fig. 7 Loaded and unloaded transmission errors of the designed point-contact gears

满载情况下的传动误差曲线和空载情况下的传动误差曲线相比,重合度由空载时的 1.027 增加到满载时的 2.122,传动误差峰值大大降低,由空载时的 0.45° 降低到满载时的 0.063° ,而且传动误差曲线变得光滑平稳,这是由于在满载情况下啮合,正在啮合的齿面发生弹性变形,使即将进入啮合的齿面间的间隙减小,提前进入啮合状态,这不仅避免了空载时齿面进入啮合时的刚性冲击,而且增加了齿轮传动的重合度。这和以往齿面加载实验研究^[17-18]的结果一致,证明本论文所提出的点啮合齿面整体设计方法能很好满足齿面加载啮合特性要求,是一种合理可行的点啮合齿面整体设计方法。

4 结 论

本文基于曲面活动标架理论,提出描述点啮合齿面整体结构的曲面包络逼近方法,这种齿面设计方法有以下特点:

- 1) 摆脱以齿面加工机床调整参数描述点啮合齿面结构所带来的限制,以给定的第一齿面及其点接触迹线的运动不变几何量设计和描述第二齿面,形成具有通用性的,可对齿面啮合特性进行全局优化的点啮合齿面设计方法。
- 2) 以第一齿面沿接触点迹线的共轭运动空间作为齿面整体优化设计空间,将齿面优化设计问题转化为曲面逼近问题。将齿面的整体优化设计直接放在齿面数控加工技术条件下进行,确保所设计的齿面能够被多轴联动数控齿轮加工机床使用标准刀具进行加工。
- 3) 以空载啮合时两齿面间隙作为预测和控制重载情况下的接触区形状和大小的设计目标参数,建立点啮合齿面整体优化设计的变分不等式模型,使满足重载啮合特性的齿面整体设计方法得以简化可行。
- 4) 实际算例表明:本文所提出的点啮合齿面整体设计方法能形成完整的弧齿锥齿轮,且满足预定的加载啮合特性要求。

参考文献:

[1] STDTFELD H J. Gleason bevel gear technology[R]. New York:Gleason Works,1994.

[2] 吴训成. 基于功能需求的弧齿锥齿轮齿面主动设计与先进制造技术研究[D]. 西安:西安交通大学,2000.

WU Xuncheng. Research on function active tooth surface design and advanced manufacturing technology for the curved tooth bevel gears[D]. Xi'an:Xi'an Jiaotong Univer-

sity,2000. (in Chinese)

[3] 邓效忠,蒋闯. 在共轭基础上的准双曲面齿轮主动修形设计[J]. 河南科技大学学报(自然科学版),2012,33(5):32-36.

DENG Xiaozhong, JIANG Chuang. Function-oriented modification design for tooth surfaces of hypoid gears based on conjugate theory[J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science), 2012, 33(5):32-36. (in Chinese)

[4] 邓效忠,李天兴,李聚波,等. 汽车驱动桥准双曲面齿轮齿面测量误差精确计算[J]. 中国机械工程,2012,23(12):1502-1509.

DENG Xiaozhong, LI Tianxing, LI Jubo, et al. Accurate calculation of tooth surface deviation based on automobile driving axle hypoid gear[J]. China Mechanical Engineering,2012,23(12):1502-1509. (in Chinese)

[5] 方宗德,曹雪梅,沈云波,等. 弧线齿面齿轮的齿面设计与加工[J]. 航空动力学报,2010,25(1):224-227.

FANG Zongde, CAO Xuemei, SHEN Yunbo, et al. Tooth surface design and manufacture for arcuate tooth trace face-gear[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(1):224-227. (in Chinese)

[6] 曹雪梅,方宗德,许浩,等. 弧齿锥齿轮的齿面主动设计及试验验证[J]. 机械工程学报,2008,44(7):209-214.

CAO Xuemei, FANG Zongde, XU Hao, et al. Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears and experimental tests[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7):209-214. (in Chinese)

[7] 苏智剑,吴序堂,毛世民,等. 基于齿面参数化表示的准双曲面齿轮的设计[J]. 西安交通大学学报,2005,39(1):17-20.

SU Zhijian, WU Xutang, MAO Shimin, et al. Design of hypoid gear tooth surface represented by non-uniform rational B-spline polynomial[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(1):17-20. (in Chinese)

[8] SHIH Y P, CHEN S D. A flank correction methodology for a five-axis CNC gear profile grinding machine[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 47(1):31-45.

[9] GABICCINI M, BRACCI A. On the estimation of continuous mappings from cradle-style to 6-axis machines for face-milled hypoid gear generation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(10):1492-1506.

[10] ARTONI A, GABICCINI M. Ease-off based compensation of tooth surface deviations for spiral bevel and hypoid gears; only the pinion needs corrections[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 61(3):84-101.

[11] 郭晓东,张卫青,张明德,等. 螺旋锥齿轮切齿调整参数的精确反调[J]. 重庆大学学报,2011,34(3):32-37.

GUO Xiaodong, ZHANG Weiqing, ZHANG Mingde, et al. The machine setting reverse method of spiral bevel gear[J]. Journal of Chongqing University, 2011, 34(3):32-37. (in Chinese)

[12] 李天兴,邓效忠,李聚波,等. 螺旋锥齿轮齿面误差分析与

自动反馈修正[J]. 航空动力学报, 2011, 26(5): 1194-1200.

LI Tianxing, DENG Xiaozhong, LI Jubo, et al. Automatic feedback correction and deviation analysis for tooth surface of spiral bevel and hypoid gear[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(5): 1194-1200. (in Chinese)

[13] 周凯红, 唐进元, 曾韬. 基于预定啮合特性的点啮合齿轮的 CNC 制造技术研究[J]. 机械工程学报, 2009, 45(9): 173-182.

ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan, ZENG Tao. CNC manufacturing technology of point meshing gear based on predetermined meshing characteristics[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(9): 173-182. (in Chinese)

[14] 周凯红. 基于预定啮合特性的螺旋锥齿轮点啮合齿面设计及 CNC 制造技术研究[D]. 长沙: 中南大学, 2009.

ZHOU Kaihong. Research on meshing characteristics-based design and CNC technology of point-contact spiral bevel gears tooth surface[D]. Changsha: Central South University, 2009. (in Chinese)

[15] ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan. Envelope-approximation theory of manufacture technology for point-contact tooth surface on six-axis CNC hypoid generator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(6): 806-819.

[16] 周凯红, 唐进元, 严宏志. 基于预定啮合特性的点啮合齿面设计方法[J]. 航空动力学报, 2009, 24(11): 2612-2617.

ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan, YAN Hongzhi. Research on meshing characteristics-based design of point-contact tooth surface[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(11): 2612-2617. (in Chinese)

[17] WAGAI P, KAHRAMAN A. Influence of tooth profile modification on helical gear durability[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(3): 501-510.

[18] 邓效忠, 方宗德, 魏冰阳, 等. 高重合度弧齿锥齿轮的性能分析与实验研究[J]. 航空动力学报, 2003, 18(6): 744-748.

DENG Xiaozhong, FANG Zongde, WEI Bingyang, et al. Analysis of meshing behavior and experiments of spiral bevel gears with high contact ratio[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(6): 744-748. (in Chinese)

(编辑: 叶 青)