

一种加速的参数化模型降阶方法

刘 营, 李鸿光, 李 韵, 杜环宇

(上海交通大学 机械与动力工程学院, 上海 200240)

摘 要: 参数化模型降阶(PMOR)方法离线阶段训练数据的过程比较耗时,因此提出了一种加速方法。在基于矩阵插值的 PMOR 方法的基础上,采用组合近似的重分析技术对基于振型向量的模型降阶(MOR)过程进行加速,利用初始刚度分解矩阵生成迭代计算基向量以对系统矩阵降阶,通过降阶矩阵生成参数化模型的振型向量,对参数空间上的采样点重复整个加速计算过程生成离线数据库。并以电磁振动台动圈为例,采用普通方法和加速方法对均布采样样本点展开仿真研究,结果表明,在保证所构建的离线模型数据库准确度的前提下,此方法能减少 80% 以上的 MOR 计算时间,且随着采样点的增多,增速越明显,可以大幅度提高参数化降阶模型离线训练效率。

关 键 词: 参数化模型降阶(PMOR); 组合近似; 电磁振动台; 动圈; 有限元分析

中图分类号: V231.92; O327

文献标志码: A

Accelerated parametric model order reduction method

LIU Ying, LI Hongguang, LI Yun, DU Huanyu

(School of Mechanical Engineering,

Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Given the relatively time-consuming offline data training phase of the parametric model order reduction (PMOR) method, an accelerated method was proposed. Based on the PMOR method by matrix interpolation, the combined approximation reanalysis technology was applied to accelerate the repeated model order reduction (MOR) procedure. The factorization matrices of the initial stiffness matrix were utilized to generate the basis vectors to reduce the system matrices, calculated the final modal shape vectors via reduced matrices and repeated the calculation procedure for the sampling points in parameter space to build the offline database. Then the moving coil of the electrical-dynamic shaker was used as an example. The regular and improved methods were also used to perform the simulation for the uniformly distributed sample points. The results show that the proposed method can significantly reduce the MOR times more than 80% and improve the efficiency of building offline parametric database with guaranty of the reduced models' accuracy.

Key words: parametric model order reduction (PMOR); combined approximation; electrical-dynamic shaker; moving coil; finite element analysis

收稿日期: 2019-02-25

基金项目: 国家自然科学基金(11427801)

作者简介: 刘营(1990—),男,博士生,主要从事参数化模型降阶方法研究。

引用格式: 刘营,李鸿光,李韵,等.一种加速的参数化模型降阶方法[J].航空动力学报,2019,34(10):2264-2270. LIU Ying, LI Hongguang, LI Yun, et al. Accelerated parametric model order reduction method[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(10): 2264-2270.

有限元技术作为一种通用的数值仿真方法,在工程实际中应用的很广泛。随着结构复杂度的提高,相应的有限元模型矩阵规模也越来越大,这导致了计算成本高,计算时间长等问题,尤其是在对模型进行瞬态分析、谐响应分析等重复性分析时,计算的代价会显著增大。因此,需要对模型进行降阶以减少计算成本,提高计算速度。目前关于模型降阶方法的研究已经比较成熟^[1-3],这些方法广泛应用于优化、控制理论^[4-5],不确定性分析^[6],参数识别^[7]等领域。常用的模型降阶方法有矩匹配方法、平衡截断方法、本征正交分解方法、模态截断方法等^[8]。这些方法都能有效的对大规模系统进行降阶从而达到减少计算代价的目的。

但是,工程实际中的有限元模型经常是参数相关的,而且在优化分析、可靠性分析等一些分析方法中,需要对模型改变参数重复多次分析,在这种应用条件下,普通的模型降阶方法难以满足应用需求,需要利用参数化模型降阶技术。

参数化模型降阶方法按照系统中参数的类型可以划分为显式依赖方法^[9]、仿射依赖方法^[10]、隐式依赖方法^[11]。对于显式参数依赖系统,Benner 等^[12]扩展了传统模型降阶方法的矩匹配技术,形成了多维矩匹配算法,用来进行参数化模型降阶计算。对于仿射参数依赖系统,Son^[13]采用了全局缩减基和局部缩减基的方法用来在参数空间上对模型进行降阶。而在实际系统中,参数很难在方程中显式或者利用仿射方式表达出来,大部分系统都是隐式参数依赖系统。对于这种系统来说,基于矩阵插值的参数化模型降阶方法是最为适用的。但是,一般在各个离散参数值下获得的降阶矩阵坐标是不兼容的,不能直接对其进行插值,需要首先对各个降阶模型进行一致性坐标转换。Panzer 等^[14]利用所有降阶模型的基向量构建了一个全局基向量,按照奇异值大小截取有限个向量作为公共基向量,并把所有降阶模型重新投影到这个公共基向量所展成的空间中,以保证所有的降阶模型是兼容的,然后对这些调节之后的降阶模型进行插值运算,获得在新参数值下的降阶模型。与之不同的是,Amsallem 等^[15]利用降阶模型数据库中的其中一个基向量作为基准,以 F 范数最小准则计算不同基向量之间的转换矩阵,最终将所有降阶模型转换至相容的坐标系中进行后续插值计算。在后续的计算中,可以采用不同的插值方法,直接进行插值运算在一些

非线性参数依赖的情况下准确度不太高,Amsallem 等^[16]引入了矩阵流形的概念,并将所有的降阶矩阵转换至标准降阶模型的矩阵流形中,以将矩阵中的非线性参数依赖性转换为线性依赖,提高插值计算的精度。Degroote 等^[17]对比了直接插值与矩阵流形插值方法对计算结果精度的影响,对比了两种方法的优劣,并给出了方法选择的依据。总的来说,对于工程中常见的隐式参数依赖的系统来说,基于矩阵插值的参数化模型降阶方法是实用性较高的一种方法,应用较为普遍。

无论是基于矩匹配方法、缩减基方法还是矩阵插值方法,参数化模型降阶过程均可以划分为离线训练阶段和在线应用阶段。在离线训练阶段,通过对参数空间采样,在不同的参数值点生成初始模型,对其进行模型降阶形成降阶模型数据库。在在线应用阶段,利用训练完成的降阶模型数据库对任意指定的参数值进行计算,得到相应的结果。整个参数化模型降阶过程最耗时的过程是在离线训练阶段,其中对不同参数值下的模型进行重复降阶是计算量较大的一个子过程。因此,关于如何加速模型重复降阶过程的研究是很有必要的。一般的模型降阶方法是通过计算生成一组基向量展成克雷洛夫(Krylov)子空间,利用此子空间对模型进行降阶。因此,对参数化模型降阶离线过程的加速问题转变为对生成子空间过程的加速问题。Feng 等^[18]开发了一种基于循环子空间方法的迭代计算求解器用来加速模型降阶中的多右端项求解过程,并将此求解器应用于微机电模型的求解中,此加速求解器表现出比标准迭代求解器更优异的性能。Ahuja 等^[19]扩展了双共轭梯度(BiCG)求解算法,开发了循环双共轭梯度(BiCGSTAB)求解器,并应用于参数化模型降阶方法中以对其进行加速计算。作为通用的独立求解器,这两种算法都能对基于克雷洛夫子空间的模型降阶方法起到加速的作用。但是,对于一般的机械系统来说,对模型的降阶通常是采用振型向量作为缩减基,对于基于振型向量的参数化模型降阶方法,其加速过程少有文献提及。为此,本文提出一种加速的参数化模型降阶方法,用来对基于振型向量的降阶过程进行加速,提高离线数据库的构建效率。

在参数化模型降阶方法的基础上,提出了采用组合近似技术对参数化模型进行重复降阶的方法,总结了整体计算流程,同时以电磁振动台动圈简化结构为例,分别采用普通方法和加速方法对

其展开计算,以验证加速方法的准确性和优越性。

1 参数化模型降阶方法

对于机械系统,其有限元模型的动力学方程可以表达为

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵, $\boldsymbol{D}$ 为阻尼矩阵, $\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵, $\boldsymbol{F}$ 为力向量, $\boldsymbol{x}$ 为位移向量。

模型降阶方法的原理为找到降阶缩减基向量 $\boldsymbol{V}$, 使

$$\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{x}_r \tag{2}$$

则可以将原始的动力学模型降阶为

$$\boldsymbol{M}_r \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_r + \boldsymbol{D}_r \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_r + \boldsymbol{K}_r \cdot \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{F}_r \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{M}_r = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{D}_r = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{K}_r = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 是缩减后的动力学矩阵, $\boldsymbol{F}_r = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ 是缩减后的力向量。

缩减基向量 $\boldsymbol{V}$ 的选取一般是通过求解克雷洛夫向量得到,但是对于振动方程来说,较为常用的方法是采用振型向量对初始模型进行降阶。即通过求解如下结构振动特征值问题

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda} \tag{4}$$

得到振型向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 和系统特征值矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 此时的振型向量是关于质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 正交的, 为了方便后续计算, 需要对振型向量做施密特正交化处理作为模型降阶缩减向量。即需要保证

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} \tag{5}$$

这样就可以通过振型向量对原始系统进行降阶。但是实际的有限元模型一般都是参数相关的, 即模型矩阵都是随着参数变化的, 初始模型的缩减基向量难以应用到新参数的模型上。为此, 采用参数化模型降阶方法对参数相关的动力学系统进行降阶。此时的动力学方程可以表达为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}) \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \tag{6}$$

为了在整个参数空间上都能用降阶模型来模拟初始模型, 需要首先对参数空间采样并在采样点生成降阶模型。假设在参数空间上若干离散参数点下的降阶模型方程为

$$\boldsymbol{M}_{r_i} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_{r_i} + \boldsymbol{D}_{r_i} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_{r_i} + \boldsymbol{K}_{r_i} \cdot \boldsymbol{x}_{r_i} = \boldsymbol{F}_{r_i} \tag{7}$$

相应的模型降阶缩减向量为 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 。

为了求得在任一参数值 $\bar{p}$ 下的降阶模型, 需要对之前计算的若干离散参数值下的降阶模型进行插值计算, 但是降阶模型所在的坐标是不相容的, 需要首先对其坐标进行调节。假设选择其中一个作为标准, 即 $\boldsymbol{M}_{r_0}$ 、 $\boldsymbol{D}_{r_0}$ 、 $\boldsymbol{K}_{r_0}$ 、 $\boldsymbol{F}_{r_0}$ 、 $\boldsymbol{\Phi}_0$, 对于第 i

个参数值下的降阶模型来说, 为找到转换矩阵, 需要求解以下最小值问题

$$\min_{\boldsymbol{R}_i \in O(k)} \|\boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{\Phi}_0\|_F^2 \tag{8}$$

其中 $O(k)$ 代表的是在 $\mathbb{R}^{k \times k}$ 空间上的矩阵集合, 下标 F 代表的是 Frobenius 范数, $\boldsymbol{R}_i$ 是 k 维的转换矩阵。求解式(8)等价于求解下列最大值问题

$$\max_{\boldsymbol{R}_i \in O(k)} \text{tr}(\boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{\Phi}_0) \tag{9}$$

式(9)有一个解析解为

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{U}_i \boldsymbol{V}_i^T \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{U}_i$ 和 $\boldsymbol{V}_i$ 是通过求解下式的 SVD 分解求得

$$\boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{\Phi}_0 = \boldsymbol{U}_i \sum_j \boldsymbol{V}_i^T \tag{11}$$

进而可以通过转换矩阵 $\boldsymbol{R}_i$ 将所有的缩减向量 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 转换为坐标相容的 $\boldsymbol{\Phi}_i^*$, 即

$$\boldsymbol{\Phi}_i^* = \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{R}_i \tag{12}$$

相应的坐标相容的降阶矩阵可以写为 $\boldsymbol{K}_{r_i}^*$ 、 $\boldsymbol{D}_{r_i}^*$ 、 $\boldsymbol{M}_{r_i}^*$ 、 $\boldsymbol{F}_{r_i}^*$ 。

在调节所有降阶模型使其坐标相容之后, 任一参数值 $\bar{p}$ 下的降阶模型可以通过插值得

$$\boldsymbol{\Phi}_i^*(\bar{p}) = \sum_{j=1}^P L_j(\bar{p}) \boldsymbol{\Phi}_{i,j}^* \tag{13}$$

其中 $L_j(\bar{p})$ 为拉格朗日算子, P 为离散样本总数满足

$$\sum_{j=1}^P L_j(\bar{p}) = 1 \tag{14}$$

其余矩阵 $\boldsymbol{K}_r^*(\bar{p})$ 、 $\boldsymbol{D}_r^*(\bar{p})$ 、 $\boldsymbol{M}_r^*(\bar{p})$ 、 $\boldsymbol{F}_r^*(\bar{p})$ 都可以按照式(13)方式计算得到, 并得到相应的动力学模型为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}_r^*(\bar{p}) \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_r^*(\bar{p}) + \boldsymbol{D}_r^*(\bar{p}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_r^*(\bar{p}) + \\ &\boldsymbol{K}_r^*(\bar{p}) \cdot \boldsymbol{x}_r^*(\bar{p}) = \boldsymbol{F}_r^*(\bar{p}) \end{aligned} \tag{15}$$

通过式(15)计算得到 $\boldsymbol{x}_r^*(\bar{p})$ 后, 利用 $\boldsymbol{x}(\bar{p}) = \boldsymbol{\Phi}^*(\bar{p}) \boldsymbol{x}_r^*(\bar{p})$ 可以求得物理坐标下系统的响应。

整个参数化模型降阶过程可以分为离线和在线阶段。离线阶段主要处理的是生成多个离散参数点的矩阵, 对各自的全阶矩阵通过模态振型向量进行降阶, 对降阶模型进行兼容性处理。在线阶段主要处理的是对兼容的多个降阶模型进行插值计算, 得到任一参数点的降阶模型用于计算。值得注意的是, 整个过程最耗费时间的是离线阶段, 尤其是对各个参数点的全阶矩阵进行降阶处理的过程。与之对比, 其余的处理步骤均比较省时。

2 局部模型加速计算方法

针对参数化模型降阶过程离线阶段生成降阶模型比较耗时的缺点, 这里提出对其加速的计算

方法。本篇论文中利用正交化后的振型向量作为模型降阶基向量,那么核心问题转变为如何对一个参数化的模型进行加速的模态重分析。组合近似方法是一种计算效率高,计算准确度高的一种加速重分析方法。这里采用这种方法对离线阶段生成降阶模型的过程进行加速。

假设基准模型的降阶基向量可以通过下式求得

$$\mathbf{K}_0 \Phi_0 = \mathbf{M}_0 \Phi_0 \Lambda_0 \quad (16)$$

对式(16)的求解涉及到对初始刚度矩阵 $\mathbf{K}_0$ 的矩阵分解。矩阵 $\mathbf{K}_0$ 经过 LDL^T 分解后可以写成

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{L}_0 \mathbf{D}_0 \mathbf{L}_0^T \quad (17)$$

其中 $\mathbf{L}_0$ 是对角元素为 1 的下三角矩阵, $\mathbf{D}_0$ 为对角矩阵。

假设第 i 个参数值下的刚度和质量矩阵为 $\mathbf{K}_i$ 和 $\mathbf{M}_i$, 则

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K} \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M} \quad (19)$$

为了得到在该参数值下的降阶基向量,需要求解下式

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}) \Phi_i = \mathbf{M}_i \Phi_i \Lambda_i \quad (20)$$

对式(20)左乘 $\mathbf{K}_0^{-1}$, 可以得到

$$(\mathbf{I} + \mathbf{B}) \Phi_i = \mathbf{q}^0 \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K} \quad (22)$$

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{M}_i \Phi_i \Lambda_i \approx \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{M}_i \Phi_0 \Lambda_0 \quad (23)$$

对式(21)左乘 $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}$ 并利用展开式 $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1} \cong \mathbf{I} - \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 - \dots$ 可以得到

$$\Phi_i = (\mathbf{I} - \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 - \dots) \mathbf{q}^0 \quad (24)$$

对于向量 $\mathbf{q}^0$ 来说, 乘以一个标量不会影响结果, 因此将式(23)中的标量矩阵 Λ_0 省略掉, 可以得到迭代初始值

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{M} \Phi_0 \quad (25)$$

根据式(24)中的展开式, 总的基向量可以表达为 $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^S]$, 其余基向量可以通过以下迭代式计算

$$\mathbf{q}^i = -\mathbf{B} \mathbf{q}^{i-1}, \quad i = 2, \dots, S \quad (26)$$

得到基向量 $\mathbf{q}$ 以后, 需要对 $\mathbf{q}$ 进行施密特正交处理以保证基向量的正交性, 然后利用此基向量可以对整体的刚度质量矩阵进行降阶得到

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_i \mathbf{q} \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \mathbf{q}^T \mathbf{M}_i \mathbf{q} \quad (28)$$

需要注意的是此时的 $\bar{\mathbf{K}}_i$ 、 $\bar{\mathbf{M}}_i$ 并不是此参数值下最终的降阶矩阵, 利用此中间变量可以得到关于基向量 $\mathbf{q}$ 的系数矩阵 $\mathbf{y}$

$$\bar{\mathbf{K}}_i \mathbf{y} = \bar{\mathbf{M}}_i \mathbf{y} \Lambda \quad (29)$$

最终求得在第 i 个参数值下的振型向量为

$$\Phi_i = \mathbf{q} \mathbf{y} \quad (30)$$

相应的降阶刚度矩阵为 $\mathbf{K}_i = \Phi_i^T \mathbf{K}_i \Phi_i$ 其余 $\mathbf{M}_i = \Phi_i^T \mathbf{M}_i \Phi_i$, $\mathbf{D}_i = \Phi_i^T \mathbf{D}_i \Phi_i$, $\mathbf{F}_i = \Phi_i^T \mathbf{F}_i$ 。利用此加速算法在参数化模型降阶的离线阶段对所有参数值下的模型进行降阶, 由于最耗时的刚度矩阵分解阶段只进行一次, 因此加速算法可以提高构建离线降阶模型数据库的效率。总的来说, 这种加速的参数化模型降阶方法的实现步骤如下:

1) 离线阶段, 在参数空间均匀采样, 得到若干个参数值下的模型矩阵 $\mathbf{M}_i$ 、 $\mathbf{D}_i$ 、 $\mathbf{K}_i$ 、 $\mathbf{F}_i$, 并通过式(4)计算得到初始参数值下的降阶矩阵 $\mathbf{M}_{r0}$ 、 $\mathbf{D}_{r0}$ 、 $\mathbf{K}_{r0}$ 、 $\mathbf{F}_{r0}$ 、 Φ_0 , 并以此作为标准降阶模型。

2) 利用式(25)和式(26)计算迭代向量 $\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^S$, 组成基向量 $\mathbf{q}$ 。

3) 针对第 i 个参数值下的模型矩阵, 利用 $\mathbf{q}$ 通过式(27)~式(30)计算此参数值下的振型向量 Φ_i , 对其进行正交化, 并计算相应的 $\mathbf{M}_i$ 、 $\mathbf{D}_i$ 、 $\mathbf{K}_i$ 、 $\mathbf{F}_i$ 。

4) 通过式(10)和式(11)计算第 i 个参数值下模型矩阵的转换矩阵 $\mathbf{R}_i$, 并计算得到与标准降阶模型相兼容的矩阵 $\mathbf{K}_i^*$ 、 $\mathbf{D}_i^*$ 、 $\mathbf{M}_i^*$ 、 $\mathbf{F}_i^*$ 、 Φ_i^* 。

5) 对所有参数值下的模型矩阵都执行以上操作, 得到参数化模型降阶离线数据库。

6) 在线阶段, 给定一个参数值 $\bar{p}$, 通过式(13)插值计算得到此参数值下的降阶矩阵 $\mathbf{K}_r^*(\bar{p})$ 、 $\mathbf{D}_r^*(\bar{p})$ 、 $\mathbf{M}_r^*(\bar{p})$ 、 $\mathbf{F}_r^*(\bar{p})$ 、 $\Phi_r^*(\bar{p})$, 计算降阶响应 $\mathbf{x}_r^*(\bar{p})$ 和完整响应 $\mathbf{x}(\bar{p})$ 。

上述步骤即加速的参数化模型降阶方法整体计算流程, 与传统方法相比, 本文方法引入了重分析方法对离线阶段的模型执行加速降阶过程, 有效的提高了离线阶段数据库的构建速度, 提高了效率。

3 仿真算例研究

前面介绍了加速的参数化模型降阶方法的计算流程, 这里通过实例来验证所提出方法的优势。以振动台动圈为例, 分析在三维参数空间下, 离线数据库的构建过程及在线插值计算结果的正确性。振动台动圈结构比较复杂, 但是其具有很好的对称性, 因此, 为简化运算, 这里采用动圈整体结构的 1/16 进行分析, 在对称边界施加对称条件。振动台在驱动线圈上承受 1 g 的加速度, 在筋板下方有弹簧连接, 连接处只允许轴向位移, 响应拾取点在台面中间位置。简化的有限元模型包

含 15 608 个单元,21 246 个节点,相应的矩阵大小为 $59\,487\times 59\,487$ 。动圈的结构与相应的边界条件如图 1 所示。

动圈结构变化的三个参数分别是台面的直径 D ,筋板的厚度 W ,驱动线圈的长度 L ,其中 D 的变化范围是 $920\sim 1\,020\text{ mm}$, W 的变化范围是 $20\sim 40\text{ mm}$, L 的变化范围是 $242\sim 342\text{ mm}$,为在这个三维参数空间构建参数化降阶模型数据库,这里设置一个维度均匀分布 4 个采样点,因此一共是 $4\times 4\times 4=64$ 个采样点,构建离线数据库的过程就是采用本文提出的方法分别计算这 64 个模型的过程。

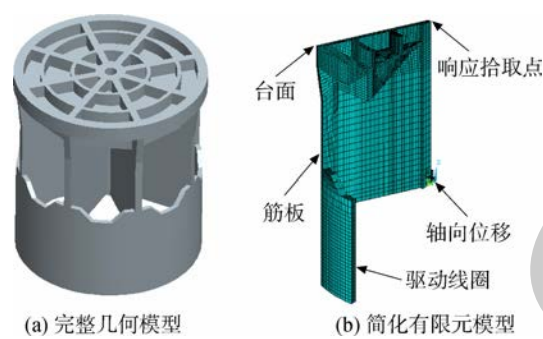


图 1 电磁振动台动圈结构

Fig. 1 Moving coil of electrical-dynamic shakers

在构建离线数据库的过程中,需要保证结构的矩阵大小以及矩阵元素对应的自由度信息是相同的,反映到有限元模型上,这意味着网格的拓扑关系需要保持不变,为此,需要在商业软件 HyperMesh 中对网格进行前处理,利用 HyperMorph 卡片将有限元网格参数化,将节点坐标矩阵导出至软件 ANSYS 中。在变化参数的时候,需要计算变化后的节点坐标并在 ANSYS 中对有限元节点坐标进行移动操作,进而生成变化参数后的结构矩阵,从而保证变化参数前后网格的拓扑关系不发生变化。

整体的计算过程是利用 ANSYS 的命令流开展的,计算的步骤是首先对初始刚度矩阵进行分解,然后根据参数值更改有限元模型的坐标,进而生成相应的矩阵,利用加速算法计算此参数下的正交化振型向量,循环此过程直至所有参数值的模型生成完毕。其中对初始刚度矩阵的分解只进行一次,命令是 * LSENGINE,后续计算采用分解过的矩阵进行分析,修改模型坐标的命令是 NMODIF,生成相应矩阵的命令是 WRFULL。

为说明本文所提方法的优越性,这里分别对比普通参数化模型降阶方法和加速方法构建离线

模型数据库的时间。整体的时间包含改变参数生成模型矩阵的时间和生成降阶模型的时间,如表 1 所示。可以看出,两种方法生成模型矩阵的时间是一样的,但是计算模型时间相差较多,相对于普通方法来说,本文提出的加速方法可以在很大程度上提高计算效率,节省离线降阶数据库的构建时间。

表 1 计算时间的常规方法与加速方法

Table 1 Calculation time of regular and accelerated methods

方法	模型生成时间/s	模型计算时间/s
普通	322.203 1	485.359 4
加速	322.203 1	63.625 1

为了验证利用本文所提方法得到的离线数据库的正确性,这里对比在线阶段给定参数值台面直径 $D=970\text{ mm}$,筋板厚度 $W=30\text{ mm}$,驱动线圈长度 $L=292\text{ mm}$ 时两种方法得到的降阶模型与全阶模型的频率、振型、响应。首先对比前 3 阶频率,见表 2。

表 2 三种方法计算的前 3 阶频率

Table 2 The first 3 orders frequencies calculated by three methods

频率 阶次	固有频率/Hz		
	全阶模型	普通方法	加速方法
1	4.878 3	4.878 3	4.878 3
2	1 370.044 1	1 370.060 3	1 370.080 1
3	1 638.480 3	1 638.525 0	1 638.837 6

然后对比三种方法计算得到的模型的第 2 阶振型,如图 2 所示。

可以看出,与全阶模型相比,根据加速方法得到的降阶模型数据库计算的频率和振型结果误差在可接受范围内。与普通方法相比,加速方法计算的结果误差稍微大一些,这是采用组合近似方法进行加速计算的一个弊端,但是两者的误差相差不大。

接着对降阶模型进行谐响应分析,提取响应拾取点的响应进行对比,扫频范围是 $1\sim 1\,900\text{ Hz}$,瑞利阻尼选取为 $\alpha=2.5,\beta=9\times 10^{-4}$,为了清晰显示结果, $0\sim 1\,500\text{ Hz}$ 范围内横坐标采用对数坐标, $1\,500\sim 1\,900\text{ Hz}$ 范围内横坐标采用线性坐标。结果如图 3 所示。

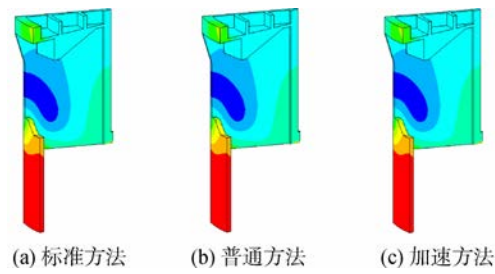


图 2 三种方法计算的第 2 阶振型

Fig. 2 The second order modal shape calculated by three methods

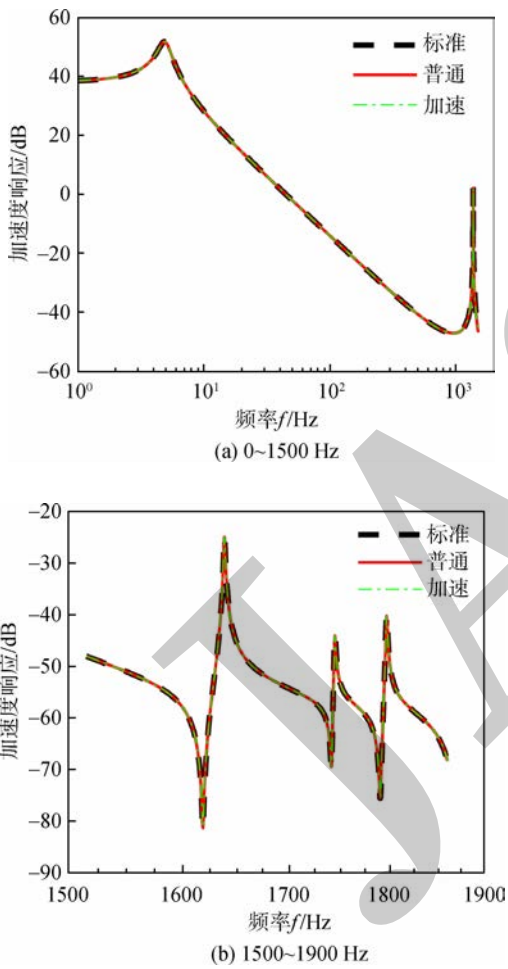


图 3 三种方法计算的谐波响应

Fig. 3 Harmonic response calculated by three methods

如图 3 所示,与全阶模型相比,利用两种方法的降阶模型数据库得到的谐波响应结果都是比较准确的,为了进一步对比两种方法的准确性,这里计算前 3 阶共振响应,如表 3 所示。

可以看出,与普通方法相比,加速方法误差略微大一些,但是其结果与标准结果相比仍然很准确。这也验证了通过频率结果得到的结论。

总体来说,通过本文提出的加速参数化模型降阶方法得到的结果比较准确,同时可以大幅减

少了降阶模型的计算时间,很大程度上提高了参数化模型降阶离线数据库的构建效率,具有很大的实用价值。

表 3 三种方法计算的前 3 阶共振响应

Table 3 The first 3 orders resonance responses calculated by three methods

响应阶次	共振响应/dB		
	全阶模型	普通方法	加速方法
1	51.7346	51.7346	51.7346
2	2.0794	2.0820	2.0820
3	-24.9930	-24.9964	-25.1930

4 结 论

本文改进了普通参数化模型降阶方法中最为费时的离线降阶模型构建过程,采用组合近似方法对所有参数采样点下的模型进行降阶,只对初始刚度矩阵进行比较耗时的矩阵分解过程,其余参数点采用迭代基的方法进行降阶,减少了计算时间。通过数值算例得到以下结论:

1) 本文提出的加速方法可以大幅减少计算时间,在本文算例 64 个采样点的情况下,模型计算时间由 485.4 s 减少到 63.6 s,计算效率提高了 86.9%,改善了传统方法比较耗时的现状。

2) 利用加速方法得到的计算结果是相当准确的,以第 3 阶共振响应为例,加速方法的计算误差仅为 0.8%,基本可以忽略。

综上所述,本文提出的方法在保证降阶模型准确性的前提下,大幅提高了离线模型数据库的构建效率,说明了此方法在加速计算过程方面是行之有效的。

参考文献:

[1] SCHILDERS W H A, VAN DER VORST H A, ROMMES J. Model order reduction; theory, research aspects and applications[M]. Berlin:Springer,2008.

[2] GRESSICK W, WEN J T, FISH J. Order reduction for large-scale finite element models; a systems perspective [J]. International Journal for Multiscale Computational Engineering,2005,3(3):337-362.

[3] QUARTERONI A. Reduced order methods for modeling and computational reduction[M]. Berlin:Springer,2014.

[4] TANG X, HU X, YANG W, et al. Novel torsional vibration modeling and assessment of a power-split hybrid electric vehicle equipped with a dual-mass flywheel[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology,2018,67(3):1990-

- 2000.
- [5] ZHANG T, LI H G. Adaptive pole placement control for vibration control of a smart cantilevered beam in thermal environment[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2013, 19(10):1460-1470.
- [6] BUI-THANH T, WILLCOX K, GHATTAS O. Parametric reduced-order models for probabilistic analysis of unsteady aerodynamic applications[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(10): 2520-2529.
- [7] ANNONI J, SEILER P. A method to construct reduced-order parameter-varying models[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(4):582-597.
- [8] ANTOULAS A C. An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems[J]. *Annual Reviews in Control*, 2005, 29(2):181-190.
- [9] FENG L. Parameter independent model order reduction [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2005, 68(3):221-234.
- [10] BURGARD S, SOMMER A, FARLEO, et al. Reduced-order models of finite-element systems featuring shape and material parameters[J]. *Electromagnetics*, 2014, 34(3/4): 143-160.
- [11] GEUSS M, PANZER H, LOHMANN B. On parametric model order reduction by matrix interpolation[C]//2013 European Control Conference (ECC). Zurich, Switzerland: IEEE, 2013:3433-3438.
- [12] BENNER P, FENG L. A robust algorithm for parametric model order reduction based on implicit moment matching [C]//Reduced order methods for modeling and computational reduction. Cham Switzerland: Springer, 2014: 159-185.
- [13] SON N T. A real time procedure for affinely dependent parametric model order reduction using interpolation on Grassmann manifolds[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 93(8):818-833.
- [14] PANZER H, MOHRING J, EID R, et al. Parametric model order reduction by matrix interpolation[J]. *Automatisierungstechnik*, 2010, 58(8):475-484.
- [15] AMSALLEM D, FARHAT C. An online method for interpolating linear parametric reduced-order models[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, 33(5):2169-2198.
- [16] AMSALLEM D, CORTIAL J, CARLBERG K, et al. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 80(9):1241-1258.
- [17] DEGROOTE J, VIERENDEELS J, WILLCOX K. Interpolation among reduced-order matrices to obtain parameterized models for design, optimization and probabilistic analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 63(2):207-230.
- [18] FENG L, BENNER P, KORVINK J G. Parametric model order reduction accelerated by subspace recycling [C]//Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) Held Jointly with 2009 28th Chinese Control Conference. Shanghai:IEEE, 2009:4328-4333.
- [19] AHUJA K, BENNER P, DE STURLER E, et al. Recycling BiCGSTAB with an application to parametric model order reduction [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, 37(5):429-446.

(编辑:李岩梅、张 雪)