

样本量对滚动轴承振动性能变异过程评估的影响

叶亮¹, 夏新涛^{2,3}, 常振⁴

(1. 西北工业大学 机电学院, 西安 710072;

2. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003;

3. 河南科技大学 机械装备先进制造河南省协同创新中心, 河南 洛阳 471003;

4. 杭州轴承试验研究中心有限公司 质量检测中心, 杭州 310022)

摘 要: 以轴承全寿命周期内的振动时间序列为研究对象, 构建最大熵泊松评估模型以研究滚动轴承振动性能的演变历程。将振动时间序列分为不同的段数, 基于最大熵原理和泊松过程, 计算各个振动时间序列相对本征时间序列的变异概率、性能保持可靠度及其变异速度和变异加速度等指标; 分析各个性能变异指标与样本量的关系, 从而选取合适的样本量; 用动态平均不确定度分析性能保持可靠性评估结果的不确定性。结果表明: 针对案例1和案例2, 将样本量分别选取为800~1000和500~900, 既可以使本征序列数据样本蕴含足够的振动信息; 又可以对轴承振动性能的具体变异过程进行有效地评估。

关 键 词: 滚动轴承; 可靠性评估; 变异概率; 样本量; 平均不确定度

中图分类号: V233.1; TH133.33

文献标志码: A

Effect of sample size on evaluation of variation process of rolling bearing vibration performance

YE Liang¹, XIA Xintao^{2,3}, CHANG Zhen⁴

(1. School of Mechanical Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. School of Mechatronics Engineering,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;

3. Collaborative Innovation Center of Machinery Equipment

Advanced Manufacturing of Henan Province,

Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China;

4. Quality Inspection Center,

Hangzhou Bearing Test and Research Center Company Limited, Hangzhou 310022, China)

Abstract: Based on the vibration time series during the life cycle of rolling bearings, a maximum entropy Poisson evaluation model was constructed to study the evolution process of rolling bearing vibration performance. The vibration time series were divided into different

收稿日期: 2019-05-13

基金项目: 国家自然科学基金(51475144); 河南省自然科学基金(162300410065)

作者简介: 叶亮(1990—), 男, 博士生, 主要研究方向为滚动轴承振动性能可靠性与不确定性动态预测与评估。

通讯作者: 夏新涛(1957—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要研究方向为滚动轴承性能分析与数据处理。

E-mail: xiact1957@163.com

引用格式: 叶亮, 夏新涛, 常振. 样本量对滚动轴承振动性能变异过程评估的影响[J]. 航空动力学报, 2019, 34(11): 2490-2502. YE Liang, XIA Xintao, CHANG Zhen. Effect of sample size on evaluation of variation process of rolling bearing vibration performance[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(11): 2490-2502.

segments, and then the variation probability, vibration performance maintaining reliability and their variation speed and acceleration were calculated based on maximum entropy principle and Poisson process for each vibration time series in relation to the intrinsic series. The relationships between performance variation indexes and sample size were analyzed to select the appropriate sample size. Dynamic average uncertainty was used to analyze the uncertainty of evaluation results of performance maintaining reliability. Result showed that the sample sizes of 800—1000 and 500—900 were selected respectively, for case 1 and case 2, which can make the intrinsic series data sample contain enough vibration information, but also effectively evaluate the specific variation process of bearing vibration performance.

Key words: rolling bearing; reliability evaluation ; variation probability; sample size; average uncertainty

滚动轴承在服役期间的失效模式并非只有疲劳破坏,还包括疲劳破坏前经常出现的内部零件卡死、烧结、耕犁、塑性变形、裂纹或断裂等性能失效的多样性现象。这些失效模式的概率分布未知,特征数据少,而且轴承内部零件之间的非线性动态接触与碰撞,精度损失呈现不确定的和多变的非线性特征,使轴承性能及其变化趋势随时间和工况发生改变^[1-3]。因此,在其振动性能失效前,对其振动性能保持可靠性进行动态评估,具有重要的工程意义。

滚动轴承振动性能保持可靠性,是指在实验和服役期间,滚动轴承可以保持最佳振动性能状态运行的可能性^[4],它可以用一个函数表示,函数的具体取值称为性能保持可靠度。本征序列是指滚动轴承保持最佳振动性能状态运行的时间序列^[5]。在运行性能最佳时期内,滚动轴承保持最佳振动性能状态运行,几乎没有性能失效的可能性。滚动轴承保持最佳振动性能状态运行,是旋转机械系统安全可靠运行的基础,其保持最佳振动性能状态运行的可靠度一旦发生变化,将会影响整个机械系统的可靠运行。

根据泊松过程,基于振动信息的时间序列,定义滚动轴承性能可靠性变异过程是以变异强度为参数的一个计数过程^[6]。轴承在服役过程中受到多种因素的影响,其性能可靠性的演变过程具有非线性、非平稳性等特征。对于振动性能时间序列所对应的各个时间段内,轴承振动性能的变异概率也具有非线性、多样性等特征,进而导致轴承振动性能可靠性函数等信息随时间和环境因素发生动态变化。

将振动性能可靠性的变异速度和变异加速度作为特征参数,预测滚动轴承各时间序列振动性

能的变异过程^[5],从而研究样本量/样本间距对轴承最佳振动性能状态的变异概率及振动性能保持可靠性的具体影响,计算其变异速度和加速度与样本量的关系。对于特定的某一轴承全寿命周期内的振动时间序列样本数据,样本间距选取过大或过小将导致各个特征参数的计算结果不正确,从而无法精准地评估出轴承最佳振动性能状态的具体变异过程。因此,合理地选取样本量具有重要的工程意义^[7-9]。样本量过大,则振动时间序列被分成的段数较少,无法看出各个特征参数的具体变异过程。样本量过小,则时间序列被分成的段数较多,首先会造成计算量大,计算过程繁琐;其次,本征序列样本蕴含的信息量少,进而使本征序列概率密度函数的计算误差偏大;最后,各个时间序列样本数据少,在计算最佳振动性能的变异概率时偏差较大甚至导致最终分析结果不正确。

对于概率分布未知的小样本数据,最大熵方法可以有效而无偏地做出均值估计和区间估计^[10-13],因此可以借助其计算时间序列数据样本的估计真值和置信区间。评估结果的不确定性,又称瞬时不确定性,是指随时间变化而变化的扩展不确定度^[14-16],它可以用一个函数表示,函数的具体取值称为动态不确定度。平均不确定度,作为一个统计评价指标,可以用来评价滚动轴承振动性能的随机波动状态。

基于此,以轴承全寿命周期内的振动时间序列样本数据为研究对象,融合最大熵法和泊松过程,研究滚动轴承振动性能保持可靠性的演变过程。首先,从轴承最佳振动性能时期算起,选取不同的样本间距,将振动数据时间序列分成不同的段数;基于最大熵法,计算本征序列的概率密度函数,从而获取各时间序列的性能变异概率及性能保持可靠度;对时间变量进行离散化处理,计算各

时间序列变异概率和性能保持可靠性的变异速度和变异加速度;分析性能变异概率及性能保持可靠性及其变异速度和变异加速度与样本量的关系,从而选出合理的样本量;选定置信水平,计算时间序列性能保持可靠性的估计区间及波动范围,用动态平均不确定度表征评估结果的不确定性,从而对滚动轴承振动性能状态及其可靠性的变异过程进行有效地分析和评估。

1 数学模型

1.1 原始数据样本的分段

在滚动轴承服役期间,获取其全寿命周期内的振动时间序列向量 $\mathbf{X}$ 。

$$\mathbf{X} = [x(1), x(2), \dots, x(k), \dots, x(K)] \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

式中 $x(k)$ 为时间序列数据样本中的第 k 个性能数据; K 为时间序列数据样本中数据的总个数。

假设从轴承最佳振动性能时期(第 k_1 个性能数据)算起,共有 K_1 个振动信号。选取样本量/样本间距为 N ,可以将 K_1 个振动信号分为 w 段。

$$\mathbf{X}_0 = [x(k_1), x(k_1 + 1), \dots, x(K)] \quad (2)$$

$$K = K_1 + k_1 - 1$$

$$\mathbf{X}_{1N} = [x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n), \dots, x_1(N)] \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \dots, N; \quad x_1(1) = x(k_1)$$

$$\mathbf{X}_{rN} = [x_r(1), x_r(2), \dots, x_r(n), \dots, x_r(N)] \quad (4)$$

$$r = 2, 3, \dots, w-1$$

$$x_r(1) = x[N \times (r-1) + 1]$$

$$\mathbf{X}_{wN} = [x_w(1), x_w(2), \dots, x_w(n), \dots, x(K)] \quad (5)$$

$$x_w(1) = N \times (w-1) + 1$$

式中 $\mathbf{X}_0$ 为从轴承最佳振动性能时期算起的新数据样本; $\mathbf{X}_{1N}$ 为样本间距为 N 时的本征序列数据样本; $\mathbf{X}_1(n)$ 为本征序列数据样本中的第 n 个性能数据; $\mathbf{X}_{rN}$ 为样本间距为 N 时第 r 个时间序列的数据样本; $\mathbf{X}_w(n)$ 为最后一个时间序列数据样本中的第 n 个性能数据。值得注意的是,样本间距为 N 时,新数据样本 $\mathbf{X}_0$ 可能不被均分,即 $x_w(N)$ 可能不等于 $x(K)$ 。因此,式(5)中第 w 个时间序列数据样本中的最后一个数据用 $x(K)$ 表示。

1.2 计算本征序列的概率密度函数

基于本征序列 $\mathbf{X}_{1N}$ 中的原始数据,运用最大熵法计算数据样本的最大熵概率密度函数^[5],用 $f_1(x)$ 表示为

$$f_1(x) = \exp \left[c_{01} + \sum_{i=1}^j c_{i1} x^i \right] \quad (6)$$

式中 c_{01} 为本征序列数据样本的首个拉格朗日乘子; c_{i1} 为本征序列数据样本的第 $i+1$ 个拉格朗日乘子; i 为原点矩阶次, $i=1, 2, \dots, j$; j 为最高阶原点矩的阶次,一般取 $j=5$ 。

根据最大熵原理,最无主观偏见的概率密度函数应满足熵最大,信息熵^[5]用 $H_1(x)$ 表示为

$$H_1(x) = - \int_{\Omega_1} f_1(x) \ln f_1(x) dx \rightarrow \max \quad (7)$$

式中 $H_1(x)$ 为本征序列数据样本的信息熵; Ω_1 为本征序列数据样本的可行域, $\Omega_1 = [x_{\min 1}, x_{\max 1}]$, 其中 $x_{\min 1}$ 为本征序列数据样本可行域的下界值, $x_{\max 1}$ 为本征序列数据样本可行域的上界值, $\ln f_1(x)$ 为 $f_1(x)$ 的对数。

式(7)应满足

$$\int_{\Omega_1} f_1(x) dx = 1 \quad (8)$$

$$\int_{\Omega_1} x^i f_1(x) dx = m_{i1} \quad (9)$$

式中 m_{i1} 为本征序列数据样本的第 i 阶原点矩, $m_{01}=1$ 。

本征序列的拉格朗日函数^[5]用 $L_1(x)$ 表示为

$$L_1(x) = H_1(x) + (c_{01} + 1) \left[\int_{\Omega_1} f_1(x) dx - 1 \right] + \sum_{i=1}^j c_{i1} \left[\int_{\Omega_1} x^i f_1(x) dx - m_{i1} \right] \quad (10)$$

首个拉格朗日乘子 c_{01} 应满足

$$c_{01} = - \ln \left[\int_{\Omega_1} \exp \left[\sum_{i=1}^j c_{i1} x^i \right] dx \right] \quad (11)$$

其他 j 个拉格朗日乘子应满足

$$1 - \frac{\int_{\Omega_1} x^i \exp \left[\sum_{i=1}^j c_{i1} x^i \right] dx}{m_{i1} \int_{\Omega_1} \exp \left[\sum_{i=1}^j c_{i1} x^i \right] dx} = 0 \quad (12)$$

为了使求解收敛,通过变量替换,将原始数据区间 Ω_1 映射到区间 $[-e, e]$ 中。令

$$x = a_1 t + b_1 \quad (13)$$

式中 a_1, b_1 为本征序列数据样本的映射参数; t 为所要变换的自变量, $t \in [-e, e]$ 。

最大熵概率密度函数变换为

$$f_1(t) = \exp \left[c_{01} + \sum_{i=1}^j c_{i1} (a_1 t + b_1)^i \right] \quad (14)$$

1.3 置信区间求解

假设置信水平为 P , 显著性水平为 $\alpha, \alpha \in [0, 1]$, 则 P 可以表示为

$$P = (1 - \alpha) \times 100\% \quad (15)$$

设置信水平 P 条件下性能随机变量的置信区间为 $[x_{l1}, x_{u1}]$, 下界值 x_{l1} 应满足

$$\frac{1}{2}\alpha = \int_{x_{\min}}^{x_{l1}} f_1(x) dx \quad (16)$$

上界值 x_{u1} 应满足

$$1 - \frac{1}{2}\alpha = \int_{x_{\min}}^{x_{u1}} f_1(x) dx \quad (17)$$

式(16)和式(17)中 x_{l1} 和 x_{u1} 分别为本征序列数据样本随机变量置信区间的下界值和上界值。

1.4 求解变异概率和性能保持可靠度

记录 w 个时间序列样本数据超出区间 $[X_{l1}, X_{u1}]$ 的个数 Q_1, Q_r, Q_w , 计算各个时间序列所对应的时间段内轴承性能的变异概率 $\lambda_1, \lambda_r, \lambda_w$ 。

$$\lambda_1 = \frac{Q_1}{N}; \quad \lambda_r = \frac{Q_r}{N}; \quad \lambda_w = \frac{Q_w}{N} \quad (18)$$

任何计数过程均可用泊松过程^[6, 17-18]描述为

$$Z = \exp(-\lambda\theta) \frac{(-\lambda\theta)^v}{v!} \quad (19)$$

式中 θ 为单位时间, $\theta = 1, 2, \dots, \theta \geq 1$; λ 为变异概率; v 为失效事件发生的次数, $v = 0, 1, 2, \dots$; Z 为失效事件发生 v 次的概率。因此, 可以运用泊松过程计算轴承振动性能可靠度 R 。 $v = 0$ 表示轴承未发生失效的概率; $\theta = 1$ 对应当前时间段内滚动轴承性能可靠度。因此, 可靠度可以表示为

$$R(\lambda) = \exp(-\lambda) \quad (20)$$

基于泊松过程, w 个时间序列的性能保持可靠性函数表示为

$$\begin{aligned} R(\lambda_1) &= \exp(-\lambda_1); \quad R(\lambda_r) = \exp(-\lambda_r) \\ R(\lambda_w) &= \exp(-\lambda_w); \quad r = 2, 3, \dots, w-1 \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $R(\lambda_1), R(\lambda_r), R(\lambda_w)$ 分别为各个时间序列的性能保持可靠度函数。

1.5 计算变异速度和加速度

在滚动轴承服役期间, 对时间变量进行离散化处理, 认为变异概率随时间变化而变化。 τ 为时间间隔, 是取值很小的常数。用 y 时刻的变异速度来表征轴承性能的变异趋势, 用 y 时刻的变异加速度来表征轴承性能的变异速度的变化快慢程度^[5]。

$$v_\lambda(y) = \frac{\Delta\lambda}{\tau} = \frac{\lambda(y+\tau) - \lambda(y)}{\tau} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} v_R(y) &= \frac{\Delta R}{\tau} = \frac{R(y+\tau) - R(y)}{\tau} \approx \\ &\frac{\exp[-\lambda(y+\tau)] - \exp[-\lambda(y)]}{\tau} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_\lambda(y) &= \frac{\Delta v_\lambda}{\tau} = \frac{v_\lambda(y+\tau) - v_\lambda(y)}{\tau} \approx \\ &\frac{\lambda(y+2\tau) - 2\lambda(y+\tau) + \lambda(y)}{\tau^2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} a_R(y) &= \frac{\Delta v_R}{\tau} = \frac{v_R(y+\tau) - v_R(y)}{\tau} \approx \\ &\frac{\exp[-\lambda(y+2\tau)] - 2\exp[-\lambda(y+\tau)] + \exp[-\lambda(y)]}{\tau^2} \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $v_\lambda(y), v_R(y), a_\lambda(y), a_R(y)$ 分别为 y 时刻轴承最佳振动性能状态的变异概率和性能保持可靠性的变异速度和加速度, $\Delta\lambda, \Delta R, \Delta v_\lambda, \Delta v_R$ 分别为在时间间隔 τ 内轴承最佳振动性能状态的变异概率和性能保持可靠性及其变异速度的变化量, $\lambda(y+\tau), R(y+\tau), \lambda(y), R(y)$ 分别为 $y+\tau, y$ 时刻轴承的变异概率和性能保持可靠度。

1.6 性能保持可靠度的动态评估

选取不同的样本间距时, 根据式(21)可以计算出 y 时刻滚动轴承性能保持可靠度的小数据样本 $R_N(y)$ 。

$$R_N(y) = [R_{N1}(y), R_{N2}(y), R_{N3}(y), \dots] \quad (26)$$

从而可得 y 时刻滚动轴承性能保持可靠度的置信区间 $[R_l(y), R_u(y)]$ 。

$$[R_l(y), R_u(y)] = [R_{\min}(y), R_{\max}(y)] \quad (27)$$

滚动轴承性能保持可靠度区间的波动范围表示为

$$U_{R(y)} = R_u(y) - R_l(y) \quad (28)$$

式中 $U_{R(y)}$ 为性能保持可靠度的估计不确定度, 即置信水平为 P 时的瞬时不确定度。通常, 置信水平 P 越大, 评估结果的不确定性就越大。 $P = 100\%$ 时评估结果最可信, 但不确定度越大, 估计结果越失真。

定义

$$\begin{aligned} U_{\text{mean}} &= \\ &\frac{1}{M} [U_{R(y_1)} + U_{R(y_2)} + \dots + U_{R(y_M)}] \Big|_{P_r=100\%} \end{aligned} \quad (29)$$

式中 M 为需要预测的时间点的总个数; $U_{R(y_M)}$ 为第 M 个时间点的性能保持可靠性的估计不确定度; U_{mean} 为动态平均不确定度; $|_{P_r=100\%}$ 表示在

$P_r=100\%$ 的条件下实现。

置信水平 P 应使动态平均不确定度 U_{mean} 最小

$$U_{\text{mean}} \rightarrow \min$$

(30)

动态平均不确定度 U_{mean} 可以作为滚动轴承振动性能保持可靠性评估结果的不确定性的有效评价指标。实际分析中,振动性能保持可靠性评估结果的不确定性用 U_{mean} 来表达,也可称为动态平均不确定度。

2 实 验

2.1 案例 1

用 ABLT-1A 型轴承寿命强化实验机采集轴承全寿命周期内的振动时间序列样本数据,实验机照片及实验头如图 1 和图 2(a)~图 2(c)所示。实验所用轴承为 P2 级角接触球轴承,型号为 7008AC;轴承内径为 40 mm;轴承外径为 68 mm;轴承厚度为 15 mm。实验所用振动加速度传感器为远东测振系统工程技术有限公司生产的 YD-1 型压电式传感器,量程为 $\pm 2\,000g$ 、分辨率为 0.000 1g。实验条件如下:实验转速为 6 000 r/min;径向载荷为 4.17 kN;轴向载荷为 4.58 kN;N32 油润滑。数据采集系统 1 min 采集一次振动数据方均根值,设定振动幅值上界值为 25 m/s^2 ,当超过该界定值时,实验机自动停止运转,实验终止。轴承振动数据由计算机控制系统自动采集,如图 3 所示。

如图 3 所示,滚动轴承振动时间序列具有明

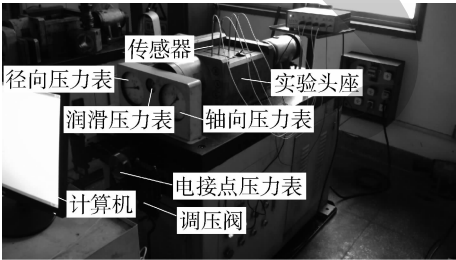
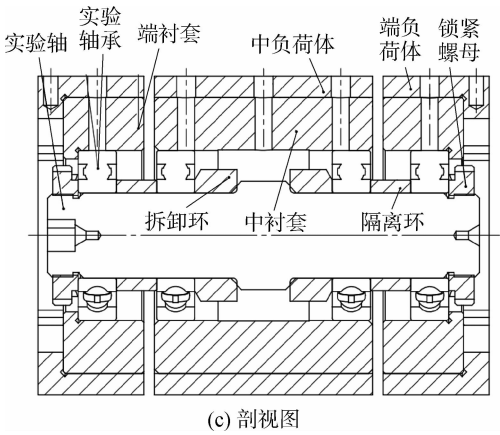
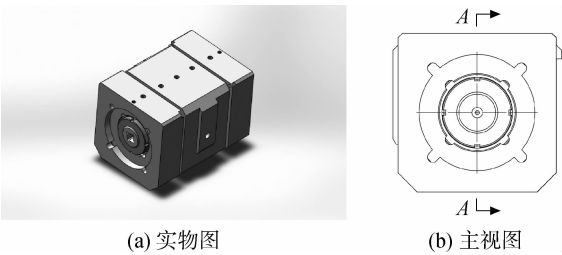


图 1 实验机照片
Fig.1 Photo of testmachine



(c) 剖视图

图 2 实验头原理图

Fig.2 Schematic diagram of testing head

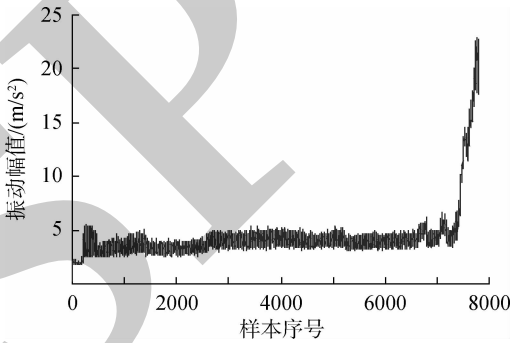


图 3 转速为 6 000 r/min 时轴承振动性能数据样本
Fig.3 Data sample of bearing vibration performance
when rotation rate is 6 000 r/min

显的非线性、随机性与不确定性特征,因此需要根据该类复杂多变的振动信息,对滚动轴承的振动性能保持可靠性进行动态预测和评估。第 1~212 个振动数据数值在 $0.3\sim 2.5\text{ m/s}^2$ 之间,此段时间内轴承振动性能平稳;第 213~472 个振动数据数值在 $2.5\sim 5.5\text{ m/s}^2$ 之间,此段时间内轴承振动信号有所加强,且波动剧烈;第 473~2 574 个振动数据数值在 $2.5\sim 5.1\text{ m/s}^2$ 之间,此段时间内轴承振动性能平稳;第 2 575~6 659 个振动数据数值在 $3\sim 5.5\text{ m/s}^2$ 之间,此段时间内轴承振动信号有所加强;第 6 660~7 446 个振动数据数值在 $3.4\sim 7.7\text{ m/s}^2$ 之间,此段时间内轴承振动信号有所加强,且波动剧烈;第 7 447~7 793 个振动数据数值在 $8.2\sim 22.9\text{ m/s}^2$ 之间,此段时间内轴承振动信号有线性增加的趋势。因此,可以认为第 1~472 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于初期磨合时期;第 473~2 574 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于最佳时期;第 2 575~6 659 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于正常磨损时期;

第 6660~7446 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于退化时期;第 7447~7793 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于恶化时期。

最终,轴承外圈、内圈、钢球均剥落,如图 4(a)~图 4(c)所示。

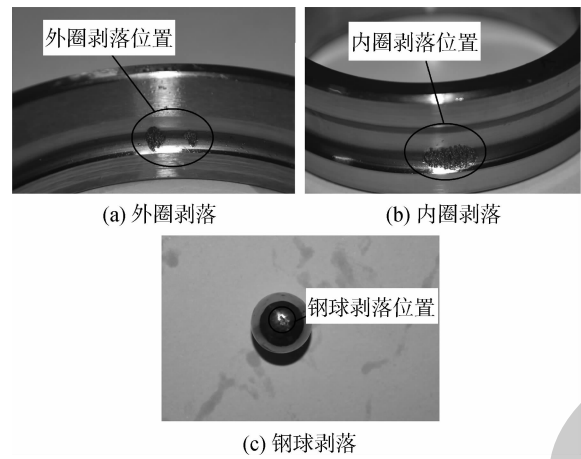


图 4 轴承各部件剥落图

Fig. 4 Peeling diagrams of bearing components

从该轴承最佳振动性能时期算起,共有 7321 个振动信号。其中第 473~6472 个数据,每隔 1500 个分一段,分为 4 段;第 6473~7793 个数据独立为一段,即第 5 段。

对于第 1 时间序列,基于最大熵法计算可得:各阶原点矩 $[m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{41}, m_{51}] = [-0.761119, 1.23545, -1.76624, 3.28358, -5.53189]$;拉格朗日乘子 $[c_{01}, c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}, c_{51}] = [-0.523391, -0.821585, -0.7864, -0.335052, 0.0246533, 0.0636048]$;映射参数 $a_1 = 1.88189$; $b_1 = -7.15117$ 。置信水平 $P = 100\%$ 条件下,本征序列的最大熵估计区间为 $[2.5, 5.1] \text{ m/s}^2$ 。

基于最大熵原理,计算概率密度估计真值函数 $f_1(x)$ 如图 5 所示, x 表示振动幅值。

5 个数据样本落在本征时间序列置信区间外的个数 n 分别为 0, 1, 6, 3, 581。因此,各个振动数据样本超出本征序列最大熵区间外的频率 $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5] = [0, 0.000667, 0.004, 0.002, 0.439818]$ 。

同样地,将时间序列数据样本每隔 1000 个分为一段,可以分为 8 段;每隔 900 个分为一段,可以分为 9 段;每隔 800 个分为一段,可以分为 10 段;每隔 700 个分为一段,可以分为 11 段;每

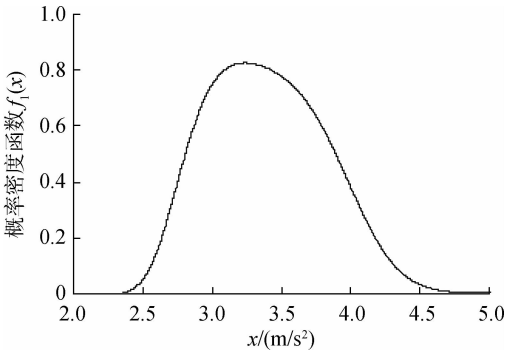


图 5 转速为 6000 r/min 时本征序列数据样本的概率密度函数

Fig. 5 Probability density function of the intrinsic sequence data sample when rotation rate is 6000 r/min

隔 600 个分为一段,可以分为 13 段;每隔 500 个分为一段,可以分为 15 段;每隔 400 个分为一段,可以分为 19 段。依次计算不同样本量下,轴承最佳振动性能状态的变异概率,轴承最佳振动性能状态的变异概率与样本量的关系如图 6 所示。

如图 6 所示,从总体上来看,最佳振动性能状态的变异概率呈现非线性和不确定性。在第 3000 个左右振动数据对应的时间点之前,最佳振动性能状态的变异概率几乎为零;在第 3000~4500 个振动数据对应的时间点之间,变异概率有先增大后减小的趋势,这可能是由于轴承在磨损一段时间之后接触方式、接触角发生变化而引起的“自愈”现象;在第 4500~6000 个振动数据对应的时间点之间,变异概率几乎为零;在第 6000~7321 个振动数据对应的时间点之间,变异概率有快速增加到 1 的趋势。样本量为 1500 即分 5 段时,最终失效时的变异概率才为 0.43982,与工程实际不太相符。而选取其他样本量值时,

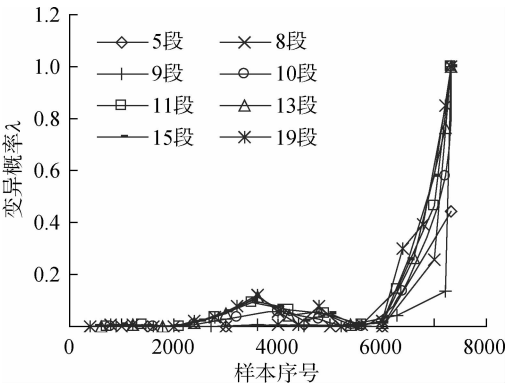


图 6 转速为 6000 r/min 时变异概率与样本量的关系
Fig. 6 Relationship between variation probability and sample size when rotation rate is 6000 r/min

最终变异概率值均为 1,从而可以看出样本量太大会导致无法具体分析最佳振动性能状态的变异过程以及最终分析结果不正确。第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,当样本量值小于 800 时,变异概率值均不到 0.1。当样本量值选取过小时,计算过程比较繁琐,而且本征序列样本蕴含的信息量少,进而导致计算其概率密度函数时误差偏大,因此文中样本量值最小选取为 400。

为了进一步研究样本量对轴承最佳振动性能状态的变异概率的具体影响,计算变异概率的变异速度和加速度与样本量的关系,如图 7 和图 8 所示。

如图 7 所示,在第 3 000 个左右振动数据对应的时间点之前,最佳振动性能状态的变异概率的变异速度几乎为零;在第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,变异速度的绝对值有先增大后减小的趋势;在第 4 500~6 000 个振动数据对应的时间点之间,变异速度几乎为零;在第 6 000~7 321 个振动数据对应的时间点之间,变异速度有快速增加的趋势。样本量为 1 500 即分 5 段时,临终时的变异概率的变异速度为 -0.00029 min^{-1} ,而且变异速度值波动较大。而选取其他样本量值时,最终变异概率值均大于 0,从而也可以看出样本量太大会导致无法具体分析最佳振动性能状态的变异过程以及最终分析结果不正确。第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,当样本量值小于 800 时,无法分析出变异速度的绝对值有先增大后减小的趋势。当样本量值选取过小时(如取 400 时),导致变异速度值波动较大甚至计算结果不正确。

如图 8 所示,在第 3 000 个左右振动数据对应

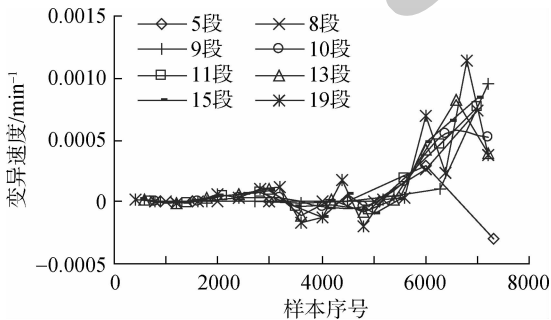


图 7 转速为 6 000 r/min 时变异概率的变异速度与样本量的关系

Fig. 7 Relationship between the variation speed of variation probability and sample size when rotation rate is 6 000 r/min

的时间点之前,最佳振动性能状态的变异概率的变异加速度几乎为零;在第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有先增大后减小到零,再增大又减小到零的趋势;在第 4 500~6 000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度几乎为零;在第 6 000~7 321 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度有快速增加的趋势,且随着样本量的减小(时间序列段数的增加),加速度波动地越剧烈。第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,当样本量值小于 800 时,无法分析出变异加速度的绝对值有先增大后减小到零,再增大又减小到零的趋势。当样本量值选取过小时(如取 400 时),导致变异加速度值波动较大甚至计算结果不正确。

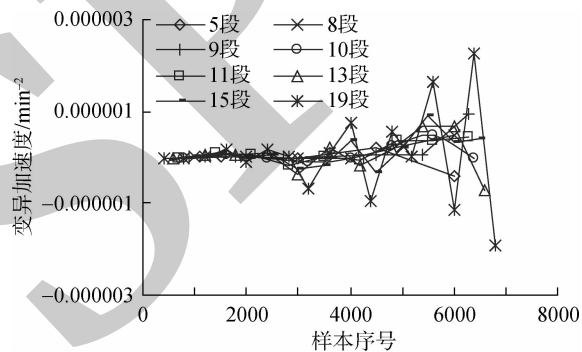


图 8 转速为 6 000 r/min 时变异概率的变异加速度与样本量的关系

Fig. 8 Relationship between the variation acceleration of the variation probability and sample size when rotation rate is 6 000 r/min

轴承振动性能保持可靠性与样本量的关系,如图 9 所示。

如图 9 所示,在第 3 000 个左右振动数据对应的时间点之前,振动性能保持可靠度几乎为 1;在第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,振动性能保持可靠度有先减小后增大的趋势;在第 4 500~6 000 个振动数据对应的时间点之间,振动性能保持可靠度几乎为 1;在第 6 000~7 321 个振动数据对应的时间点之间,振动性能保持可靠度有快速减小的趋势。

为了进一步研究样本量对轴承振动性能保持可靠性的具体影响,计算其性能保持可靠性的变异速度和加速度与样本量的关系,如图 10 和图 11 所示。

如图 10 所示,在第 3 000 个左右振动数据对应的时间点之前,振动性能保持可靠性的变异速

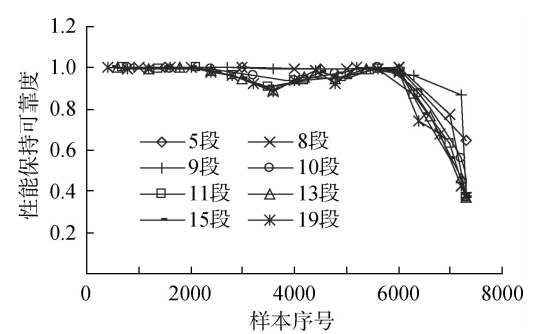


图 9 转速为 6000 r/min 时性能保持可靠性与样本量的关系

Fig. 9 Relationship between performance maintaining reliability and sample size when rotation rate is 6000 r/min

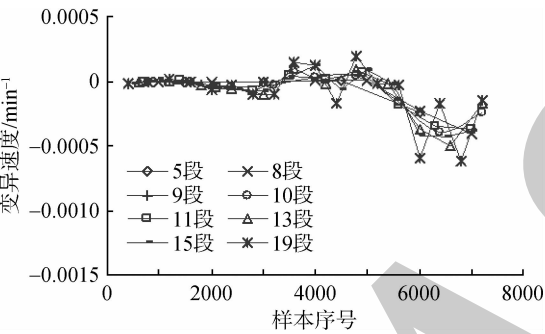


图 10 转速为 6000 r/min 时性能保持可靠性的变异速度与样本量的关系

Fig. 10 Relationship between the variation speed of performance maintaining reliability and sample size when rotation rate is 6000 r/min

度几乎为零;在第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,变异速度有先增大后减小的趋势;在第 4 500~6 000 个振动数据对应的时间点之间,变异速度几乎为零;在第 6 000~7 321 个振动数据对应的时间点之间,变异速度的绝对值有快速增加的趋势,且随着样本量的减小(时间序列段数的增加),其波动越剧烈。

如图 11 所示,在第 3 000 个左右振动数据对应的时间点之前,振动性能保持可靠性的变异加速度几乎为零;在第 3 000~4 500 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有先增大后减小到零,再增大又减小到零的趋势;在第 4 500~6 000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度几乎为零;在第 6 000~7 321 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有增加的趋势,且随着样本量的减小(时间序列段数的增加),其波动越剧烈。

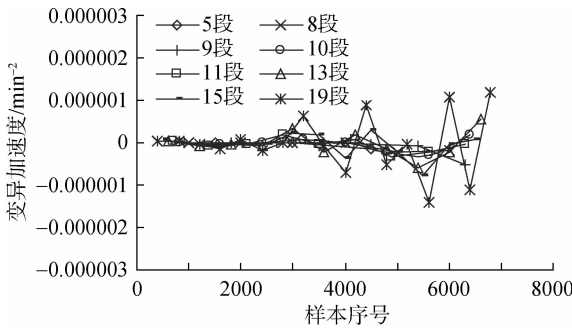


图 11 转速为 6000 r/min 时性能保持可靠性的变异加速度与样本量的关系

Fig. 11 Relationship between the variation acceleration of performance maintaining reliability and sample size when rotation rate is 6000 r/min

综上所述,样本量选取过大或过小均将导致最佳振动性能状态的变异概率和性能保持可靠性及其变异速度和变异加速度的计算结果不正确,从而无法精准地评估出轴承最佳振动性能状态的具体变异过程。因此,针对本案例,可以选取样本量为 800~1 000,既可以使本征序列数据样本蕴含足够的最佳振动性能状态信息,进而有效地计算出本征序列的概率密度函数;又可以将原数据序列分成足够多的段数,从而对轴承振动性能的具体变异过程进行有效地评估。

根据样本量值选取的不同,可以计算出轴承振动性能保持可靠度的上下限值随时间变化的具体情况,如图 12 所示。

从轴承最佳振动性能状态时期(第 473 个数据开始),每隔半天计算轴承性能保持可靠度,因此第一次应该从 0.8278 d(472 min+0.5 d)算起。由图 12 可以计算出评估结果的不确定度,如表 1 所示。

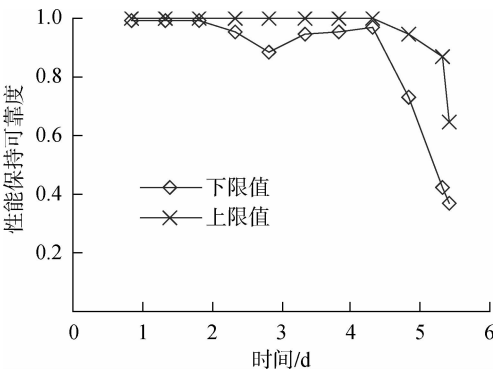


图 12 转速为 6000 r/min 时振动性能保持可靠性的动态评估结果

Fig. 12 Dynamic evaluation result of vibration performance maintaining reliability when rotation rate is 6000 r/min

表 1 转速为 6000 r/min 时评估结果的估计不确定度
Table 1 Estimated uncertainty of evaluation result when rotation rate is 6000 r/min

时间 y/d	下限值 $R_l(y)$	上限值 $R_u(y)$	估计不确定度 $U_{R(y)}$
0.8278	0.9961	1.0000	0.0039
1.3278	0.9946	1.0000	0.0054
1.8278	0.9910	1.0000	0.009
2.3278	0.9528	0.9994	0.0466
2.8278	0.8825	0.998	0.1155
3.3278	0.9425	0.9972	0.0547
3.8278	0.9537	0.9973	0.0436
4.3278	0.9665	0.9993	0.0328
4.8278	0.7294	0.9424	0.213
5.3278	0.4262	0.8718	0.4456
5.4118	0.3679	0.6442	0.2763

计算轴承振动性能各个时间序列性能保持可靠性的动态平均不确定度, $U_{\text{mean}}=1.2464/11=0.1133$ 。

2.2 案例 2

实验机及所用轴承和案例 1 完全一样, 改变实验条件: 实验转速为 4 000 r/min; 径向载荷为 4.17 kN; 轴向载荷为 4.58 kN; N32 油润滑。实验采集数据样本如图 13 所示。

如图 13 所示, 第 1~333 个振动数据数值在 $1.3\sim1.9\text{ m/s}^2$ 之间, 此段时间内轴承处于初级磨合阶段, 振动性能平稳; 第 334~1 627 个振动数据数值在 $1.5\sim2.6\text{ m/s}^2$ 之间, 此段时间内轴承振动性能平稳; 第 1 628~2 955 个振动数据数值

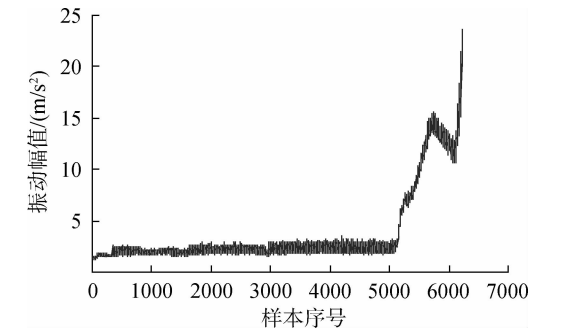


图 13 转速为 4000 r/min 时轴承振动性能数据样本
Fig. 13 Data sample of bearing vibration performance when rotation rate is 4000 r/min

在 $1.6\sim2.9\text{ m/s}^2$ 之间, 此段时间内轴承振动信号有所加强; 第 2 956~5 143 个振动数据数值在 $1.7\sim3.6\text{ m/s}^2$ 之间, 此段时间内轴承振动信号有所加强; 第 5 144~6 216 个振动数据数值在 $3.3\sim23.6\text{ m/s}^2$ 之间, 此段时间内轴承振动信号有先增大后减小再增大的趋势。因此, 可以认为第 334~1 627 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于最佳时期; 第 1 628~2 955 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于正常磨损时期; 第 2 956~5 143 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于退化时期; 第 5 144~6 216 个振动数据所对应的时间段内该轴承振动性能处于恶化时期。

从该轴承最佳振动性能时期算起, 共有 5 883 个振动数据。其中第 334~5 333 个数据, 每隔 1 000 个分为一段, 分为 5 段; 第 5 334~6 216 个数据独立为一段, 即第 6 段。

对于第 1 时间序列(本征序列), 基于最大熵法计算可得: 各阶原点矩 $[m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{41}, m_{51}]=[0.0587149, 0.873682, 0.0404924, 2.01096, 0.187499]$; 拉格朗日乘子 $[c_{01}, c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}, c_{51}]=[0.57532, 0.385448, -0.434491, -0.26444, -0.0287918, 0.0372169]$; 映射参数 $a_1=4.4481; b_1=-9.1186$ 。取显著性水平 α 为 0, 可得置信水平 $P=100\%$ 条件下, 本征序列的最大熵估计区间为 $[1.5, 2.6]\text{ m/s}^2$ 。

基于最大熵原理, 计算概率密度估计真值函数 $f_1(x)$ 如图 14 所示。

6 个数据样本落在本征时间序列置信区间外的个数 n 分别为 0, 36, 149, 446, 534, 883。因此,

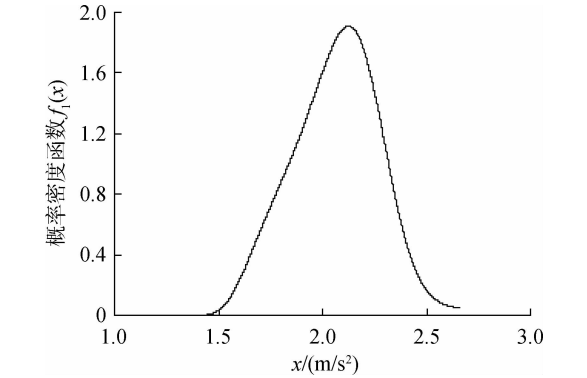


图 14 转速为 4000 r/min 时本征序列数据样本的概率密度函数
Fig. 14 Probability density function of data sample of the intrinsic sequence when rotation rate is 4000 r/min

各个振动数据样本超出本征序列最大熵区间外的频率 $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6] = [0, 0.036, 0.149, 0.446, 0.534, 1]$ 。

同样地,每隔 900 个分为一段,可以分为 7 段;每隔 800 个分为一段,可以分为 8 段;每隔 700 个分为一段,可以分为 9 段;每隔 600 个分为一段,可以分为 10 段;每隔 500 个分为一段,可以分为 12 段;每隔 400 个分为一段,可以分为 15 段;每隔 300 个分为一段,可以分为 20 段。依次计算不同样本量下,轴承最佳振动性能状态的变异概率,轴承最佳振动性能状态的变异概率与样本量的关系如图 15 所示。

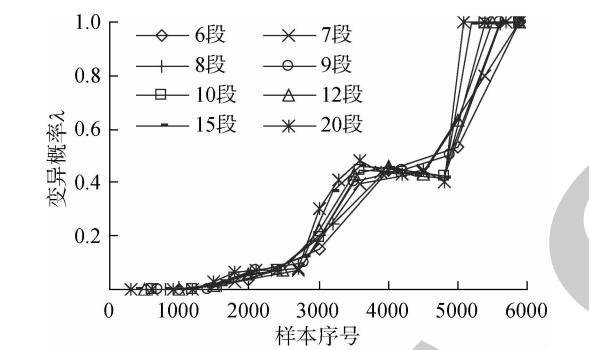


图 15 转速为 4000 r/min 时变异概率与样本量的关系
Fig. 15 Relationship between variation probability and sample size when rotation rate is 4000 r/min

如图 15 所示,从总体上来看,最佳振动性能状态的变异概率呈现非线性和不确定性。在第 1500 个左右振动数据对应的时间点之前,最佳振动性能状态的变异概率几乎为零;在第 1500~3500 个振动数据对应的时间点之间,变异概率有快速增大的趋势;在第 3500~4800 个振动数据对应的时间点之间,变异概率几乎不变,保持在 0.43 左右,这可能是由于轴承在磨损一段时间之后接触方式、接触角发生变化而引起的“自愈”现象;在第 4800~5883 个振动数据对应的时间点之间,变异概率有快速增加到 1 的趋势。当样本量值选取过小时,计算过程比较繁琐,而且本征序列样本蕴含的信息量少,进而导致其概率密度函数的计算误差偏大,因此文中样本量值最小选取为 300。与案例 1 相比,本案例中样本量值的选取比较合适。

为了进一步研究样本量对轴承最佳振动性能状态的变异概率的具体影响,计算变异概率的变异速度和加速度与样本量的关系,如图 16 和图 17 所示。

如图 16 所示,在第 2000 个左右振动数据对应的时间点之前,最佳振动性能状态的变异概率的变异速度几乎为零;在第 2000~3500 个振动数据对应的时间点之间,变异速度有先增大后减小的趋势;在第 3500~4200 个振动数据对应的时间点之间,变异速度几乎为零;在第 4200~5883 个振动数据对应的时间点之间,变异速度有先增大后减小的趋势,而且,随着样本量值的增大,变异速度增加地越大,波动地越剧烈。当样本量值小于 300 时,可能导致变异速度值波动较大甚至计算结果不正确。样本量大于 1000 时,可能会导致无法具体分析最佳振动性能状态的变异过程以及最终分析结果不正确。

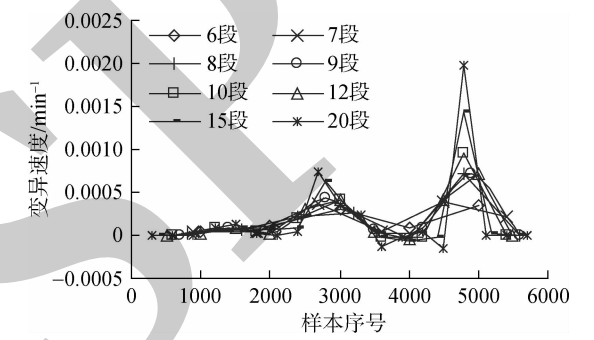


图 16 转速为 4000 r/min 时变异概率的变异速度与样本量的关系
Fig. 16 Relationship between the variation speed of variation probability and sample size when rotation rate is 4000 r/min

如图 17 所示,在第 2000 个左右振动数据对应的时间点之前,最佳振动性能状态的变异概率的变异加速度几乎为零;在第 2000~3000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有先增大后减小到零的趋势;在第 3000~4000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度几乎为零;在第 4000~5000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有增大的趋势。而且,随着样本量值的增大,变异加速度波动地越剧烈,也间接地表明样本量太大可能会导致计算结果不正确。

轴承振动性能保持可靠性与样本量的关系,如图 18 所示。

如图 18 所示,在第 1500 个左右振动数据对应的时间点之前,振动性能保持可靠度几乎为 1;在第 1500~3500 个振动数据对应的时间点之间,振动性能保持可靠度有快速减小的趋势;在第 3500~4800 个振动数据对应的时间点之间,振动

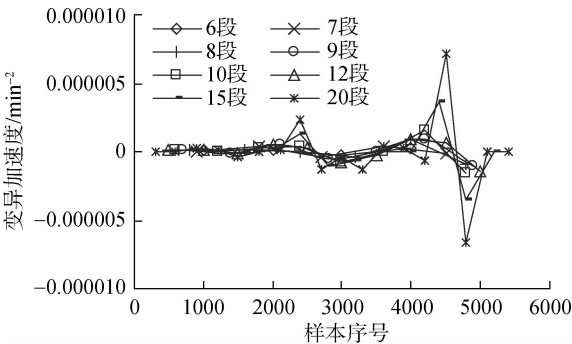


图 17 转速为 4000 r/min 时变异概率的变异加速度与样本量的关系

Fig. 17 Relationship between the variation acceleration of the variation probability and sample size when rotation rate is 4000 r/min

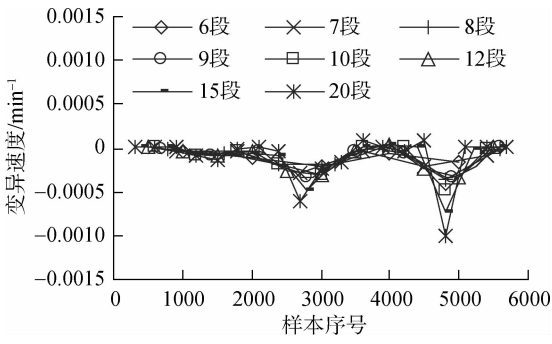


图 19 转速为 4000 r/min 时性能保持可靠性的变异速度与样本量的关系

Fig. 19 Relationship between the variation speed of performance maintaining reliability and sample size when rotation rate is 4000 r/min

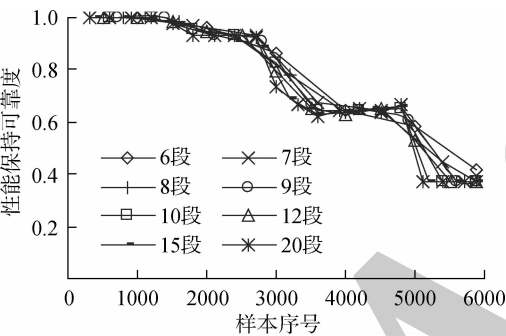


图 18 转速为 4000 r/min 时性能保持可靠性与样本量的关系

Fig. 18 Relationship between performance maintaining reliability and sample size when rotation rate is 4000 r/min

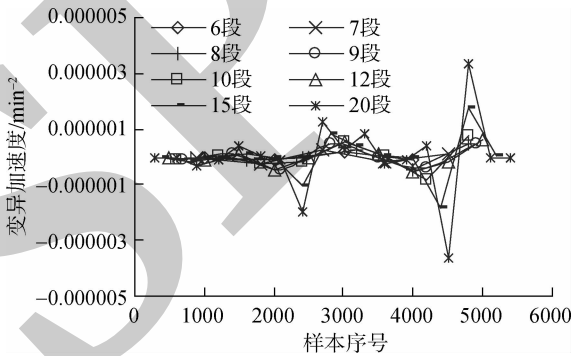


图 20 转速为 4000 r/min 时性能保持可靠性的变异加速度与样本量的关系

Fig. 20 Relationship between the variation acceleration of performance maintaining reliability and sample size when rotation rate is 4000 r/min

性能保持可靠度几乎不变,保持在 0.60 左右;在第 4800~5883 个振动数据对应的时间点之间,振动性能保持可靠度有快速减小的趋势。

为了进一步研究样本量对轴承振动性能保持可靠性的具体影响,计算性能保持可靠性的变异速度和加速度与样本量的关系,如图 19 和图 20 所示。

如图 19 所示,在第 2000 个左右振动数据对应的时间点之前,振动性能保持可靠性的变异速度几乎为零;在第 2000~3500 个振动数据对应的时间点之间,变异速度的绝对值有先增大后减小的趋势;在第 3500~4200 个振动数据对应的时间点之间,变异速度几乎为零;在第 4200~5883 个振动数据对应的时间点之间,变异速度的绝对值有先增大后减小的趋势,而且随着样本量值的增大,变异速度波动地越剧烈。

如图 20 所示,在第 2000 个左右振动数据对

应的时间点之前,振动性能保持可靠性的变异加速度几乎为零;在第 2000~3000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有先增大后减小到零的趋势;在第 3000~4000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度几乎为零;在第 4000~5000 个振动数据对应的时间点之间,变异加速度的绝对值有增大的趋势,而且随着样本量值的增大,变异加速度波动地越剧烈。

因此,针对本案例,可以选取样本量为 500~900,既可以使本征序列数据样本蕴含足够的最佳振动性能状态信息,进而有效地计算出本征序列的概率密度函数;又可以将原数据序列分成足够多的段数,从而对轴承振动性能的具体变异过程进行有效地评估。

根据样本量值选取的不同,可以计算出轴承振动性能保持可靠度的上下限值随时间变换的具体情况,如图 21 所示。

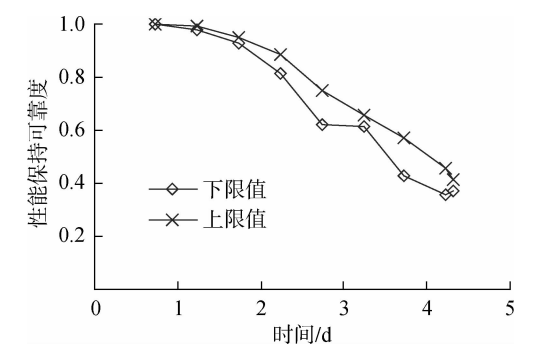


图 21 转速为 4000 r/min 时振动性能保持可靠性的动态评估结果

Fig. 21 Dynamic evaluation result of vibration performance maintaining reliability when rotation rate is 4000 r/min

从轴承最佳振动性能状态时期(第 333 个数据开始),每隔半天计算轴承性能保持可靠度,因此第一次应该从 0.7313 d(333 min+0.5 d)算起。由图 21 可以计算出评估结果的不确定度,如表 2 所示。

表 2 转速为 4000 r/min 时评估结果的估计不确定度
Table 2 Estimated uncertainty of evaluation result when rotation rate is 4000 r/min

时间 y/d	下限值 $R_l(y)$	上限值 $R_u(y)$	估计不确定度 $U_{R(y)}$
0.7313	0.9988	1.0000	0.0012
1.2313	0.9788	0.9942	0.0154
1.7313	0.9295	0.9523	0.0228
2.2313	0.8122	0.8883	0.0761
2.7313	0.6188	0.7509	0.1321
3.2313	0.6143	0.6537	0.0394
3.7313	0.4278	0.5683	0.1405
4.2313	0.3558	0.4587	0.1029
4.3167	0.3679	0.4135	0.0456

计算轴承振动性能各个时间序列性能保持可靠性的动态平均不确定度, $U_{\text{mean}}=0.576\,0/9=0.0640$ 。

综上所述,对于不同工况下的滚动轴承,其全寿命周期内的振动性能样本数据个数不同。由案例 1 和案例 2 计算结果可知,样本量分别选取为 800~1000 和 500~900,即将振动性能样本数据划分为 10 段左右,既可以使本征序列数据样本蕴含足够的最佳振动性能状态信息,进而有效地计

算出本征序列的概率密度函数;又可以将原数据序列分成足够多的段数,从而对轴承振动性能的具体变异过程进行有效地评估。除此之外,还可以看出振动性能数据的个数是影响样本量选取的主要因素。

3 结 论

- 1) 融合最大熵法和泊松过程,分析滚动轴承最佳振动性能状态的变异概率和振动性能保持可靠性及其变异速度和变异加速度等指标与样本量的关系,从而对滚动轴承振动性能的退化过程进行动态评估。
- 2) 所建模型能够计算各个时间序列所对应的时间段内,轴承振动性能保持可靠性的估计区间及波动范围。用动态平均不确定度表征性能保持可靠性评估结果的不确定性,案例 1 中动态平均不确定度 $U_{\text{mean}}=0.113\,3$,案例 2 中 $U_{\text{mean}}=0.0640$,这是因为案例 2 中轴承转速相对较小,因此轴承振动值相对较小,振动性能波动也较小。所以,其性能保持可靠性评估结果的可信度相对较高。
- 3) 轴承振动性能样本数据的个数是影响样本量选取的主要因素。对于不同的样本数据,选取合适的样本量使其划分为 10 段左右,进而对振动性能及其可靠性的具体变异过程进行有效地评估。
- 参考文献:
- [1] 唐云冰,高德平,罗贵火. 滚动轴承非线性轴承力及其对轴承系统振动特性的影响[J]. 航空动力学报,2006,21(2): 366-373.
TANG Yunbing, GAO Deping, LUO Guihuo. Non-linear bearing force of the rolling ball bearing and its influence on vibration of bearing system[J]. Journal of Aerospace Power,2006,21(2):366-373. (in Chinese)

[2] WANG H C, CHEN J. Performance degradation assessment of rolling bearing based on bispectrum and support vector data description[J]. Journal of Vibration and Control,2014,20(13):2032-2041.

[3] NATARAJ C, HARSHA S P. The effect of bearing cage run-out on the nonlinear dynamics of a rotating shaft[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2008,13(4):822-838.

[4] YE L, XIA X T, CHANG Z. Dynamic prediction for accuracy maintaining reliability of super-precision rolling bearing in service[J]. Shock and Vibration,2018,2018:1-15.

[5] 夏新涛,叶亮,常振,等. 乏信息条件下滚动轴承振动性能可靠性变异过程预测[J]. 振动与冲击,2017,36(8):105-

112.

XIA Xintao, YE Liang, CHANG Zhen, et al. Prediction for variation process of reliability on vibration performance of rolling bearings under the condition of poor information [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36 (8): 105-112. (in Chinese)

[6] 夏新涛, 孟艳艳, 邱明. 用灰自助泊松方法预测滚动轴承振动性能可靠性的变异过程 [J]. *机械工程学报*, 2015, 51 (9): 97-103.

XIA Xintao, MENG Yanyan, QIU Ming. Forecasting for variation process of reliability of rolling bearing vibration performance using grey bootstrap Poisson method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51 (9): 97-103. (in Chinese)

[7] 张瑞涵, 王义民, 郭爱军. 样本不确定性对基于 SPI 指数干旱评估的影响 [J]. *西北农林科技大学学报 (自然科学版)*, 2019, 17 (11): 1-10.

ZHANG Ruihan, WANG Yimin, GUO Aijun. Impact of sample uncertainty on SPI index based drought evaluation [J]. *Journal of Northwest Agriculture and Forestry University (Natural Science Edition)*, 2019, 17 (11): 1-10. (in Chinese)

[8] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型 [J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34 (7): 1822-1827.

WU Lifeng, LIU Sifeng, YAO Ligen. Discrete grey model based on fractional order accumulate [J]. *Systems Engineering Theory and Practice*, 2014, 34 (7): 1822-1827. (in Chinese)

[9] 陈新美, 雷渊才, 张雄清, 等. 样本量对 MaxEnt 模型预测物种分布精度和稳定性的影响 [J]. *林业科学*, 2012, 48 (1): 53-59.

CHEN Xinmei, LEI Yuancai, ZHANG Xiongqing, et al. Effects of sample sizes on accuracy and stability of maximum entropy model in predicting species distribution [J]. *Scientia Silvae Sinicae*, 2012, 48 (1): 53-59. (in Chinese)

[10] EDWIN A B, ANGEL K M. A clustering method based on the maximum entropy principle [J]. *Entropy*, 2015, 17 (1): 151-180.

[11] FRONTINI M, TAGLIANI A. Hausdorff moment problem and maximum entropy: on the existence conditions [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218 (2): 430-433.

[12] CHEN X W and DAI W. Maximum entropy principle for uncertain variables [J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2011, 13 (3): 232-236.

[13] GALLON S, GAMBOA F, LOUBES J M. Functional calibration estimation by the maximum entropy on the mean principle [J]. *Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 2015, 49 (5): 989-1004.

[14] XIA X T, MENG Y Y, SHI B J, et al. Bootstrap forecasting method of uncertainty for rolling bearing vibration performance based on GM (1, 1) [J]. *Journal of Grey System*, 2015, 27 (2): 78-92.

[15] PATTABHIRAMAN S, LEVESQUE G, KIM N H, et al. Uncertainty analysis for rolling contact fatigue failure probability of silicon nitride ball bearings [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47 (18/19): 2543-2553.

[16] XIA X T, MENG F N. Grey relational analysis of measure for uncertainty of rolling bearing friction torque as time series [J]. *Journal of Grey System*, 2011, 23 (2): 135-144.

[17] LINDO A, ZUYEV S, SAGITOV S. Nonparametric estimation for compound Poisson process via variational analysis on measures [J]. *Statistics and Computing*, 2018, 28 (3): 563-577.

[18] 夏新涛, 常振, 叶亮, 等. 滚动轴承性能稳定性及可靠性分析 [J]. *仪器仪表学报*, 2017, 38 (6): 1421-1431.

XIA Xintao, CHANG Zhen, YE Liang, et al. Stability and reliability analysis of rolling bearing performance [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2017, 38 (6): 1421-1431. (in Chinese)

(编辑: 王碧珺)