

亚声速气流激励下旋转叶片的 饱和渗透现象

刘 艮¹, 陈贡发¹, 袭 安²

(1. 广东工业大学 土木与交通工程学院, 广州 510006;
2. 中华人民共和国工业和信息化部 电子第五研究所, 广州 510610)

摘 要: 研究了在 1 : 2 内共振条件下, 压气机叶片在亚声速气流作用下的非线性耦合振动响应。利用涡格法得到了三维绕流压气机叶片的横向气动载荷。采用 Chebyshev-Ritz 法获得旋转叶片的第一阶扭转模态和第二阶弯曲模态的模式函数, 并将计算出的前三阶频率并与有限元计算结果进行对比。利用 Galerkin 法对系统的偏微分方程进行截断, 得到扭转模态与弯曲模态的两自由度常微分方程。通过对存在线性刚度项耦合的系统进行了求解, 得到了系统存在的两种可能的解支, 并对其进行稳定分析。通过对系统两阶模态间能量传递的分析, 计算了当调谐参数为 $\sigma=0, \sigma_1 \neq 0$ 以及调谐参数为 $\sigma=0, \sigma_1=0$ 时系统扭转模态与弯曲模态的力-幅曲线, 分析了模态幅值间的饱和行为和能量传递的现象, 当外激励调谐参数 $\sigma_1=0$ 时, 扭转模态幅值的跳跃现象消失。同时分析了不同参数对力-频、幅-频特性的影响。

关 键 词: 亚声速气流; 压气机叶片; 非线性耦合振动; 能量传递; 饱和和跳跃现象

中图分类号: V231.3 **文献标志码:** A

Subsonic airflow load of rotating blades excited by subsonic flow

LIU Gen¹, CHEN Gongfa¹, XI An²

(1. School of Civil and Transportation Engineering,
Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;
2. The Fifth Electronic Research Institute,
Ministry of Industry and Information Technology of the People's
Republic of China, Guangzhou 510610, China)

Abstract: The nonlinear coupled vibration response of the compressor blade under subsonic flow and the condition of 1 : 2 internal resonance was studied. The transverse aerodynamic loads of three-dimensional compressor blades were obtained by the vortex lattice method (VL). The mode functions of the first torsional mode and the second bending mode of the rotating blade were obtained by the Chebyshev-Ritz method and the first three frequencies were compared with the finite element results. By using Galerkin method, the partial differential equations of the system were truncated, and the two-degree-of-freedom ordinary differential equations of the torsional mode and the bending mode were obtained. By solving the equations with linear coupling stiffness term, two possible solutions were obtained and the stability analysis was investigated. Through analysis of the energy transfer between these two modes of the system, the force amplitude curve of the torsional mode and the bending

收稿日期:2019-12-06

作者简介:刘艮(1991—),女,博士后,主要从事非线性动力学、复合材料非线性振动研究。

引用格式:刘艮,陈贡发,袭安.亚声速气流激励下旋转叶片的饱和渗透现象[J].航空动力学报,2020,35(5):909-917. LIU Gen, CHEN Gongfa, XI An. Subsonic airflow load of rotating blades excited by subsonic flow[J]. Journal of Aerospace Power, 2020,35(5):909-917.

mode of the system was calculated when the tuning parameter was $\sigma=0$, $\sigma_1 \neq 0$ and the tuning parameter was $\sigma=0$, $\sigma_1=0$. The saturation behavior and the phenomenon of energy transfer between the modal amplitudes were analyzed. When the external excitation tuning parameter was $\sigma_1=0$, the jump phenomenon of the torsional mode amplitude disappeared. At the same time, the influences of different parameters on force frequency and amplitude frequency characteristics were analyzed.

Key words: subsonic airflow load; compressor blade; nonlinear coupled vibration; energy transfer; saturation and jumping phenomena

压气机叶片是典型的高速旋转、复杂环境下工作的悬臂结构,是涡轮机械的关键部件。叶片的动态特性直接影响整个发动机的工作性能。近年来,随着复合材料技术的飞速发展,大量新型复合材料被应用到压气机叶片的设计中。这些新的应用给压气机叶片的振动或模态特性带来了挑战。因此,研究复杂工况下压气机叶片的非线性动力特性具有重要的意义。

饱和和渗透是一种与内共振有关的、非线性多自由度系统受迫振动的特有现象。在电子线路、自动控制等领域具有广泛的应用,近年来也引起了广大学者的关注。该现象最早由 Nayfeh 等^[1]在船体的运动研究中发现并提出理论。随后,在文献[2]提出了一种非线性减振器,该减振器利用了多自由度的饱和现象与二次非线性共振项,然后引入二阶控制器,并通过传感器和执行器将它们耦合。因为在传感器和执行器中反馈控制信号是二次的,一旦结构被强迫靠近它的共振频率,振动响应即可通过饱和现象抑制。在此理论基础上,不少学者研究了高速旋转叶片的饱和渗透^[3-6]等非线性动力学行为,并利用这种行为进行结构的振动控制研究。Kandil 等^[7]利用饱和和渗透的能量转换特性,提出了抑制压气机叶片振动的减震器。

对于复合材料层合结构振动特性^[8]的相关研究,国内外学者做出了大量的工作。在 20 世纪 90 年代,板壳结构的研究已经达到了一个较高的水平。吕敬等^[9]对复合材料层合板 1:1 内共振关系的参数共振问题做出了详细的分析研究。姚明辉等^[10]建立了高速旋转叶片的薄壳模型,运用高阶剪切理论,引入几何非线性得到复合材料层合板的控制方程,采用多尺度法分析了不同参数对叶片的非线性响应的影响。

流体激发板壳非线性振动的研究也受到了研究者的广泛关注。较早的,Dowell^[11]对平板的颤振

问题做了系统的研究。在 Amabili 和 Paidoussis^[12]的综述中,对流体中的板壳结构的振动问题进行了较为全面的总结。在现有文献中,气流激励的速度往往都处在超声速阶段,研究的内容也都关注于板壳结构的气动弹性问题。Singha^[13]研究了系统参数对斜形层合板超声速颤振行为的影响。Haddadpour 等^[14]研究了功能梯度平板的非线性气动弹性行为。Kuo^[15]研究了不同层铺间距对矩形平板的超声速颤振的影响。Zhao 等^[16]用三阶活塞理论计算了复合材料层合板的振动问题,周正贵等^[17]采用二维的 Navier-Stokes 方程对压气机静子叶片和转子叶片内的流动情况进行了数值模拟,结果表明不同的叶间距受到的非定常气动力基本由一阶傅里叶分量决定。Young 等^[18]利用数值方法模拟了压气机叶片在横向振动方向上的翼型的涡脱落现象。张伟等^[19]基于薄翼型理论,在薄翼型上沿平均弧线分布涡旋,推导出作用在可展开机翼上的气动激励力表达式。

本文在对系统控制方程经过模态截断之后,运用多尺度法对旋转叶片一阶扭转模态和二阶弯曲模态构成两自由度非线性系统进行摄动分析,得到了系统在直角坐标系下的平均方程。通过改变气动力的幅值,研究了气动力对旋转叶片非线性动力行为的影响。然后根据求解系统离散后的强耦合非线性方程,得到系统的两种可能的解支,研究了不同参数对系统的饱和和渗透非线性动力学行为的影响。

1 亚声速气动力的表达式

为了获得叶片上的气动载荷,本节对叶片的工作环境进行了理想化处理,考虑了亚声速流动中的气流载荷,并采用涡格法(vortex lattice method)^[20]计算作用在叶片上的气流气动激励载荷。与机翼周围的二维流动^[21]不同,机翼周围三维流动的主要特征是升力沿翼展的变化。对于有限长翼展的升力面,下方的高压空气会在翼尖处

向上方的低压空气翻过去,其结果是翼尖附近上表面处的压强趋向于和下表面的压强相等,从而导致翼面单位展长上的升力是由翼根向翼尖递减的。下面利用翼面三维绕流场所产生的涡强度分布规律进行压气机叶片翼面横向气动载荷的求解。

将旋转叶片简化为绕其轴向旋转的带预扭转角的板模型,如图 1 所示。利用马蹄涡对其表面的流场进行离散。其中 LE 表示叶片的前缘,TE 表示后缘。 α_0 为根部迎角, α_1 为叶片端部扭转角, c 为弦长, ω 为平板旋转转速。叶片分为 5 个面板元件,每个面板从前缘延伸到后缘。

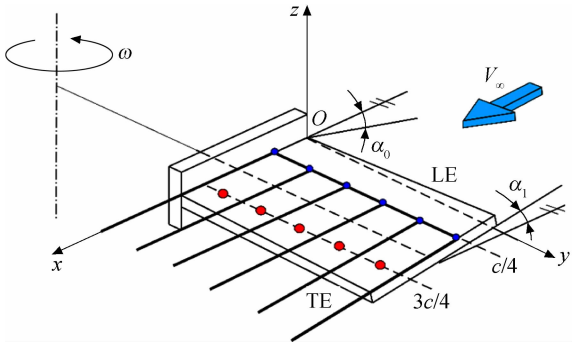


图 1 旋转平板的马蹄涡分布图

Fig.1 Layout of the vortex lattice on the rotating plate

涡线布置在前缘 1/4 弦上,控制点位于 3/4 弦上。由于叶片在 z 方向上存在空间的几何位置分量,因此所布涡的坐标总结如下:

$$x_{nm} = \frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cos \alpha_{nm}, \quad y_{nm} = \frac{2n-1}{2i} b, \quad z_{nm} = -\frac{c}{4} \sin \alpha_{nm} \quad (1a)$$

$$x_{1n} = \frac{c}{4} + \frac{c}{4} (1 - \cos \alpha_{n-1}), \quad y_{1n} = \frac{n-1}{i} b, \quad z_{1n} = \frac{c}{4} \sin \alpha_{n-1} \quad (1b)$$

$$x_{2n} = \frac{c}{4} + \frac{c}{4} (1 - \cos \alpha_n), \quad y_{2n} = \frac{n}{i} b, \quad z_{2n} = \frac{c}{4} \sin \alpha_n \quad (1c)$$

其中 (x_{nm}, y_{nm}, z_{nm}) 为控制点的位置坐标, (x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}) 和 (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) 为马蹄涡的位置坐标。

通过计算实际马蹄涡和控制点的几何位置,利用涡格法求解了各马蹄涡在控制点处的涡强度

$$\Gamma_r = \alpha \alpha_r A \quad (2)$$

其中

$$A =$$

$$\begin{bmatrix} 0.116 + 0.0439 + 0.0235 + 0.0130 + 0.624 \\ 0.0496 + 0.134 + 0.0491 + 0.0245 + 0.0111 \\ 0.0307 + 0.0624 + 0.138 + 0.0447 + 0.0183 \\ 0.0204 + 0.0386 + 0.0652 + 0.134 + 0.0331 \\ 0.0236 + 0.0129 + 0.0371 + 0.588 + 0.1205 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_r = \left(\alpha_0 + \frac{2k-1}{mn} \delta \right) + \alpha \cos(\omega t),$$

$$r, k = 1, 2, \dots, 5, \quad a = 4\pi b V_\infty, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{10},$$

$$\delta = \frac{\pi}{12}, \quad m = 5, \quad n = 2 \quad (3)$$

其中 A 是通过涡格法计算出来的涡强的系数, α_0 是预安装角, δ 是根部与叶片顶部之间的扭转率。定义 $\alpha \cos(\omega t)$ 是攻角的一个周期扰动。

根据涡格法,翼面的升力载荷为

$$L_0 = \rho_\infty V_\infty \sum_{n=1}^5 \Gamma_n \Delta y_n \quad (4)$$

把涡强方程(2)和坐标参数代入方程(4)得到作用在旋转叶片上的横向气动载荷为

$$P = 0.1\rho V_\infty b [16.477b V_\infty \alpha \cos(\omega t) + 7.262b V_\infty] \quad (5)$$

其中 b 是叶片的展向长度, ρ 是来流密度, α 是攻角, V_∞ 是来流速度,且与压气机旋转速度有关。

2 旋转叶片的动力学建模

如图 2 所示,将航空发动机叶片简化为一个固定在刚性轮毂并且带有预扭转角和预安装角的悬臂板模型。叶片截面随着板展向伸长方向的扭转角度线性变化。设叶片根部的迎角为 α ,初始角度即叶片根部的安装角为 α_0 ,叶片尖端处迎角为 α_1 。沿着叶片展向迎角发生线性改变, $\alpha = \alpha_0 + x(\Delta\alpha/b)$,其中 b 为展长, $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ 。叶片采用复合材料层合结构, h 为叶片厚度, h_i 为单层厚度, i 为层数。图 2 中为对称铺设方式, V_∞ 为来流速度, F

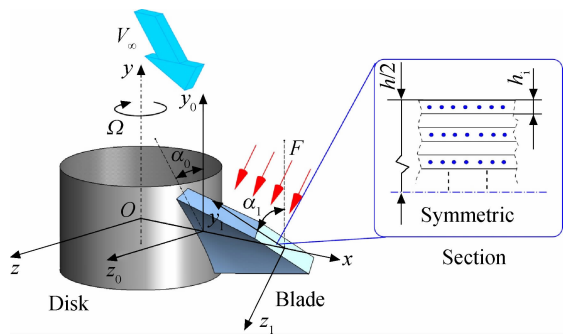


图 2 旋转叶片模型图

Fig.2 Schematic diagram of the rotating blade

为气动载荷, Ω 为叶片轮盘系统的转动速度。

其几何关系、本构关系及建模过程参照文献 [22], 本文不再赘述。

3 旋转叶片的固有频率分析

通常,除了个别较为简单的模型外,一般的层合板模型很难求出其频率的解析解,所以工程中常用近似解法来获得层合板模型的频率近似解。常用的近似解法包括有限元法,基于能量变分原理的 Rayleigh-Ritz 法和 Galerkin 法等。为了分析前一节所建旋转叶片动力学模型的频率,系统的位移分量可以用位移幅值函数表示如下

$$u(x,y,t) = U(x,y)e^{i\omega t} \tag{6a}$$

$$v(x,y,t) = V(x,y)e^{i\omega t} \tag{6b}$$

$$w(x,y,t) = W(x,y)e^{i\omega t} \tag{6c}$$

$$\Phi_x(x,y,t) = \Phi_x(x,y)e^{i\omega t} \tag{6d}$$

$$\Phi_y(x,y,t) = \Phi_y(x,y)e^{i\omega t} \tag{6e}$$

其中 $U(x,y), V(x,y), W(x,y)$ 为振型函数, $\Phi_x(x,y)$ 和 $\Phi_y(x,y)$ 表示位移在 x, y 轴的扭转角位移。

根据 Chebyshev 多项式^[23], 将其展开为如下形式

$$U(\xi,\lambda) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} T_m(\xi) T_n(\lambda) \tag{7a}$$

$$V(\xi,\lambda) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} T_m(\xi) T_n(\lambda) \tag{7b}$$

$$W(\xi,\lambda) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} T_m(\xi) T_n(\lambda) \tag{7c}$$

$$\Phi_x(\xi,\lambda) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{xmn} T_m(\xi) T_n(\lambda) \tag{7d}$$

$$\Phi_y(\xi,\lambda) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{ymn} T_m(\xi) T_n(\lambda) \tag{7e}$$

为了研究数值结果的有效性,将数值结果与有限元结果进行了比较。本节选取前五阶进行截断,即 $m=n=5$ 。表 1 列出了通过有限元方法得到的前三阶频率与 Chebyshev 多项式得到的前三阶频率的对比结果。

表 1 叶片前三阶横向模态对应的频率
Table 1 The first three order frequencies of the blade

模态	频率/Hz	
	Chebyshev 多项式	有限元
一阶弯曲模态	780.5	796.1
一阶扭转模态	2861.1	2781.0
二阶弯曲模态	5750.3	6095.3

进一步从图 3 中的对比可以得出,两者的计算结果相对误差较小,可以满足计算需要。

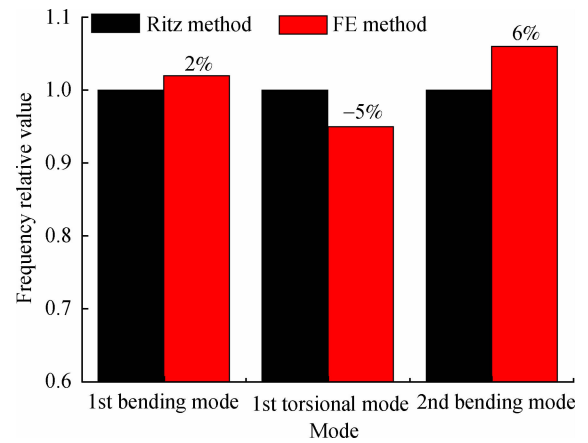


图 3 Chebyshev-Ritz 法所得结果与有限元法所得结果的相对值

Fig. 3 Frequency relative value between the Chebyshev-Ritz method and the finite element method

4 叶片扭-弯模态 1 : 2 内共振条件下的摄动分析

根据文献[22]中的无量纲化后的系统控制方程,本节应用多尺度法得到旋转叶片非平面振动的近似解析解。由于系统的线性刚度项第一阶扭转模态 ω_1 与第二阶弯曲模态 ω_2 耦合,在结合实际参数代入计算后发现线性刚度前的系数不能设为小量。在实际离散完成后,发现作用在两阶模态上的外力的幅值量级不同,作用在第一阶扭转模态上的外激励明显小于第二阶弯曲的外激励,因此在尺度变换后第一阶外力的幅值会消失。

将各变量和参数做如下尺度变换:

$$\begin{aligned} \mu_2 &\rightarrow \epsilon \mu_2, m_{22} \rightarrow \epsilon m_{22}, m_{26} \rightarrow \epsilon m_{26}, m_{28} \rightarrow \epsilon m_{28}, \\ m_{29} &\rightarrow \epsilon^2 m_{29}, m_{210} \rightarrow \epsilon^2 m_{210}, \mu_3 \rightarrow \epsilon \mu_3, \\ m_{23} &\rightarrow \epsilon m_{23}, m_{36} \rightarrow \epsilon m_{36}, m_{28} \rightarrow \epsilon^2 m_{28}, \\ m_{21} &\rightarrow \epsilon^2 m_{21}, m_{24} \rightarrow \epsilon^2 m_{24}, m_{25} \rightarrow \epsilon^2 m_{25}, \\ m_{27} &\rightarrow \epsilon^2 m_{27}, m_{31} \rightarrow \epsilon^2 m_{31}, m_{34} \rightarrow \epsilon^2 m_{34}, \\ m_{35} &\rightarrow \epsilon^2 m_{35}, m_{37} \rightarrow \epsilon^2 m_{37}, m_{38} \rightarrow \epsilon^2 m_{38}, \\ m_{39} &\rightarrow \epsilon^2 m_{39}, m_{310} \rightarrow \epsilon^2 m_{310} \end{aligned} \tag{8}$$

将方程(8)带入到系统的平均方程,得到变换后的方程如下:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \epsilon \mu_2 \dot{w}_1 + k_{21} w_1 + k_{22} w_2 + \epsilon^2 m_{21} w_1^3 + \\ \epsilon m_{22} w_1^2 + m_{23} w_1 w_2 + \epsilon^2 m_{24} w_1 w_2^3 + \epsilon^2 m_{25} w_1^2 w_2 + \\ \epsilon m_{26} w_2^2 + \epsilon^2 m_{27} w_2^3 = \epsilon^2 m_{28} p_{21} \cos \Omega t + \\ \epsilon^2 m_{29} p_{23} + \epsilon^2 m_{210} \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 + \epsilon \mu_3 \dot{w}_2 + k_{31} w_1 + k_{32} w_2 + \epsilon^2 m_{31} w_2^3 + \\ \epsilon m_{32} w_2^2 + m_{33} w_1 w_2 + \epsilon^2 m_{34} w_1 w_2^2 + \epsilon^2 m_{35} w_1^2 w_2 + \\ \epsilon m_{36} w_1^2 + \epsilon^2 m_{37} w_1^3 = \epsilon^2 m_{38} p_{21} \cos \Omega t + \\ \epsilon^2 m_{39} p_{23} + \epsilon^2 m_{310} \end{aligned} \quad (9b)$$

运用多尺度法进行多尺度分析,假设上述强非线性方程微振动的一次近似解的形式为

$$w_1 = w_{10}(T_0, T_1) + \epsilon w_{11}(T_0, T_1) + \dots \quad (10a)$$

$$w_2 = w_{20}(T_0, T_1) + \epsilon w_{21}(T_0, T_1) + \dots \quad (10b)$$

将方程(10)带入方程(9)后比较同次幂,得到 ϵ^0 阶

$$D_0^2 w_{10} + k_{21} w_{10} + k_{22} w_{20} = 0 \quad (11a)$$

$$D_0^2 w_{20} + k_{31} w_{10} + k_{32} w_{20} = 0 \quad (11b)$$

ϵ^1 阶

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{11} + k_{21} w_{11} + k_{22} w_{21} = -2D_1 D_0 w_{10} - \\ \mu_2 D_0 w_{10} - m_{23} w_{10} w_{20} - m_{210} \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{21} + k_{31} w_{11} + k_{32} w_{21} = -2D_1 D_0 w_{20} - \\ \mu_3 D_0 w_{20} - m_{33} w_{10} w_{20} + m_{38} p_{21} \cos \Omega t + \\ m_{39} p_{23} - m_{310} \end{aligned} \quad (12b)$$

由于式(12)刚度项是耦合的,所以假设出的解的形式必须是耦合且存在一定的关系,才能让同时满足两个方程。

式(12)的解可以设为

$$w_{10} = A_1(T_1) e^{j\omega_1 T_0} + A_2(T_1) e^{j\omega_2 T_0} + cc \quad (13a)$$

$$w_{20} = \Gamma_1 A_1(T_1) e^{j\omega_1 T_0} + \Gamma_2 A_2(T_1) e^{j\omega_2 T_0} + cc \quad (13b)$$

将式(13)代入方程(11)得到

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{11} + k_{21} w_{11} + k_{22} w_{21} = -m_{23} A_1^2 \Gamma_1 e^{2j\omega_1 T_0} - \\ m_{23} A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_1 - m_{23} A_1 A_2 \Gamma_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2) T_0} - \\ m_{23} \bar{A}_1 \Gamma_1 A_1 - m_{23} \bar{A}_1 A_2 \Gamma_2 e^{j(\omega_1 T_0 + \sigma T_1)} - \\ m_{23} A_1 A_2 \Gamma_1 e^{j(\omega_1 + \omega_2) T_0} - m_{23} \bar{A}_1 A_2 \bar{\Gamma}_1 e^{j(\omega_1 T_0 + \sigma T_1)} - \\ m_{23} A_2 \bar{A}_2 \bar{\Gamma}_2 - m_{23} A_2 \bar{A}_2 \Gamma_2 - j\mu_2 \omega_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - \\ 2j\omega_1 D_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - j\mu_2 A_2 \omega_2 e^{j\omega_2 T_0} - \\ m_{23} A_2^2 \Gamma_2 e^{2j\omega_2 T_0} - 2j\omega_2 D_1 A_2 e^{j\omega_2 T_0} - m_{210} + cc \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 w_{21} + k_{31} w_{11} + k_{32} w_{21} = -m_{33} A_1^2 \Gamma_1 e^{2j\omega_1 T_0} - \\ m_{33} A_2^2 \Gamma_2 e^{2j\omega_2 T_0} - m_{33} A_1 \bar{A}_1 \bar{\Gamma}_1 - \\ m_{33} A_1 A_2 \Gamma_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2) T_0} - m_{33} A_1 \bar{A}_1 \bar{\Gamma}_1 - \\ m_{33} A_2 \bar{A}_1 \Gamma_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1) T_0} - m_{33} A_1 A_2 \Gamma_1 e^{j(\omega_1 + \omega_2) T_0} - \\ m_{33} A_2 \bar{A}_1 \bar{\Gamma}_1 e^{j(\omega_2 - \omega_1) T_0} - m_{33} A_2 \bar{A}_2 \bar{\Gamma}_2 - \\ m_{33} A_2 \bar{A}_2 \Gamma_2 - j\mu_3 \omega_2 A_2 \Gamma_2 e^{j\omega_2 T_0} - \\ 2j\omega_1 \Gamma_1 D_1 A_1 e^{j\omega_1 T_0} - 2j\omega_2 \Gamma_2 D_1 A_2 e^{j\omega_2 T_0} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j\mu_3 \omega_1 A_1 \Gamma_1 e^{j\omega_1 T_0} + \frac{1}{2} m_{38} p_{21} e^{j\omega T_0} + \\ m_{39} p_{23} - m_{310} + cc \end{aligned} \quad (14b)$$

其中 cc 表示复数部分, $\bar{A}_1$ 和 $\bar{A}_2$ 的上划线表示其复数共轭。

研究扭转模态与弯曲模态之间 1 : 2 的内共振关系。引入调谐参数 σ 描述 ω_2 和 $2\omega_1$ 的接近度。于是,内共振可以表示为

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon \sigma, \quad \sigma = o(1) \quad (15)$$

如果系统线性部分完全解耦,则方程(12)左端频率为 ω_1 或者为 ω_2 的谐波项自相平衡,令方程右端对应项的系数为零即可消除永年项,但是,由于系统存在线性项耦合,为了消除永年项,确定方程的可解性条件,设特解

$$w_{11} = W_{11} e^{j\omega_1 T_0} + W_{12} e^{j\omega_2 T_0} \quad (16a)$$

$$w_{21} = W_{21} e^{j\omega_1 T_0} + W_{22} e^{j\omega_2 T_0} \quad (16b)$$

将式(16)代入式(14),比较两端频率为 ω_1 和 ω_2 的谐波的系数

$$(k_{21} - \omega_r^2) W_{1r} + k_{22} W_{2r} = q_{1r}, \quad r = 1, 2 \quad (17a)$$

$$k_{31} W_{1r} + (k_{32} - \omega_r^2) W_{2r} = q_{2r}, \quad r = 1, 2 \quad (17b)$$

得到系统消除永年项的条件为

$$\begin{aligned} -2j\omega_1 (1 + \Gamma_1^2) D_1 A_1 - j\omega_1 A_1 (\mu_2 + \mu_3 \Gamma_1^2) \\ - \bar{A}_1 A_2 (\bar{\Gamma}_1 + \Gamma_2) (m_{23} + m_{33} \Gamma_1) e^{j\sigma T_1} = 0 \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} -2j\omega_2 (1 + \Gamma_2^2) D_1 A_2 - j\omega_2 A_2 (\mu_2 + \mu_3 \Gamma_2^2) - \\ A_1^2 \Gamma_1 (m_{23} + m_{33} \Gamma_2) e^{-j\sigma T_1} + \\ \frac{1}{2} \Gamma_1 \Gamma_2 m_{38} p_{21} \eta_3 e^{-j\sigma T_1} = 0 \end{aligned} \quad (18b)$$

引入极坐标系下幅值与相位的关系

$$A_r(T_1) = \frac{a_r(T_1)}{2} e^{j\beta_r(T_1)}, \quad r = 1, 2 \quad (19)$$

得到消除长期项后的系统复数形式的平均方程

$$D_1 a_1 = B_1 a_1 + \frac{1}{2} C_1 \eta_1 a_1 a_2 \cos \varphi_2 \quad (20a)$$

$$D_1 a_2 = B_2 a_2 + \frac{1}{2} C_2 \eta_2 a_1^2 \cos \varphi_2 + \eta_3 f \cos \varphi_1 \quad (20b)$$

$$a_1 D_1 \varphi_1 = a_2 \sigma_1 + \frac{1}{2} C_2 \eta_2 a_1^2 \sin \varphi_2 - \eta_3 f \sin \varphi_1 \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} a_2 D_1 \varphi_2 = a_2 \sigma - C_1 \eta_1 a_2^2 \sin \varphi_2 + \\ \frac{1}{2} C_2 \eta_2 a_1^2 \sin \varphi_2 - \eta_3 f \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (20d)$$

对于稳态响应,按照 $\bar{a}_1$ 是否为零分为两种情况,找到两个可能的解,即单模态解和双模态解。

1) $\bar{a}_1=0$,即单模态解,得到

$$\bar{a}_1 = 0 \tag{21a}$$

$$\bar{a}_2 = |\eta_3| \frac{f}{\sqrt{B_2^2 + \sigma_1^2}} \tag{21b}$$

2) $\bar{a}_1 \neq 0$,即双模态解,得到

$$\bar{a}_1 = \sqrt{-\xi_1 \pm \sqrt{\left(\frac{2\eta_3 f}{C_2 \eta_2}\right)^2 - \xi_3^2}} \tag{22a}$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{|C_1 \eta_1|} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + 4B_1^2} \tag{22b}$$

根据求得的单模态解和双模态解,下面对这两种解进行稳定性分析。

5 结构的力频响应和幅频响应分析

根据定常解的稳定性条件,下面通过一系列的力幅曲线、幅频曲线形象地展示了系统在 1 : 2 内共振情况下的丰富动力学特性。在图 4 中($\sigma=0, \xi_1<0, c_1=1.333, c_2=5.165$)给出 a_1 和 a_2 随激励幅值 f 的变化曲线。其中,稳定解用实线表示,不稳定解用虚线表示, c_1, c_2 是由稳定性分析得出系统发生状态改变的转速的临界值。从图中可以看出,随着外激励振幅的逐渐增加,振幅 a_1 保持为零,振幅 a_2 沿着式(21b)所确定的渐近解递增。当外激励幅值大于点 $c_2=5.165$ 时,幅值 a_1 和 a_2 进入由双模态解所确定的渐近解支,单模态解失去稳定性,此时第二阶模态的响应独立于外激励幅值。幅值 a_1 发生跳跃进入由式(22a)

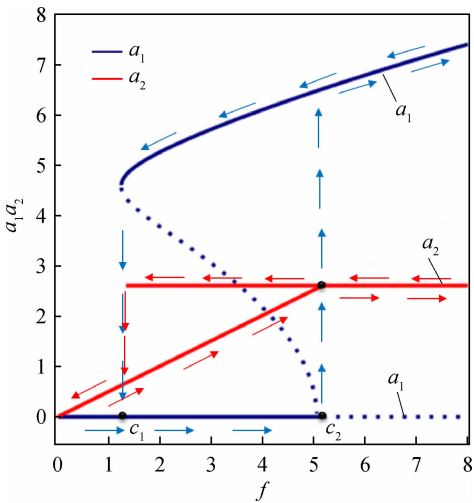


图 4 $\sigma=0, \sigma_1 \neq 0$ 时的力-幅曲线

Fig. 4 Amplitudes response as function of the amplitude of the excitation when $\sigma=0, \sigma_1 \neq 0$

确定的渐近解递增,幅值 a_2 进入由式(22b)确定的渐近解转变为饱和行为,随着外激励幅值的增加, a_2 幅值保持不变。

当外激励由高到低回落时,幅值 a_1 和 a_2 继续沿着双模态解锁控制的解支变化,幅值 a_1 逐渐变小,幅值 a_2 沿着式(22b)继续饱和状态。当外激励幅值越过 $c_1=1.333$ 时,幅值 a_1 和 a_2 发生变化, a_1 和 a_2 回落到由单模态解所确定的解支, a_1 由拐点跳落到零值, a_2 退出饱和状态。

图 5($\sigma=0, \sigma_1=0, \xi_1>0, c_2=3.2667$)给出了内共振和外激励都精确调谐时的力幅状态,幅值 a_2 的饱和行为和能量传递的现象依然存在,但 a_1 的跳跃现象消失。

图 6 给出了不同外激励调谐参数 σ_1 所对应的幅频响应曲线,图中划分了稳定与不稳定区域,其中蓝色部分为稳定区域,绿色部分为不稳定区域。在力幅平面对由不同调谐参数 σ_1 所截得的不同力频曲线进行截取,得到了图 7 不同外激励调谐参数下的力幅曲线。

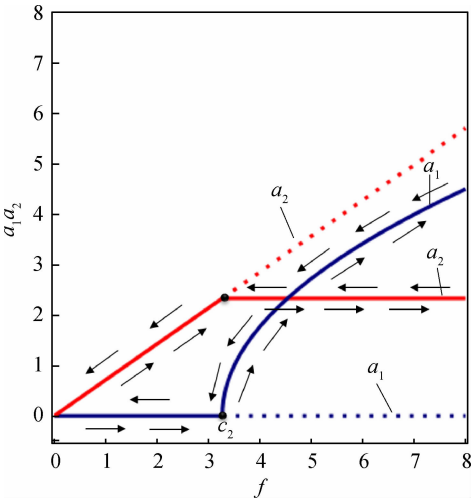


图 5 $\sigma=0, \sigma_1=0$ 时的力-幅曲线

Fig. 5 Amplitudes response as function of the amplitude of the excitation when $\sigma=0, \sigma_1=0$

通过力频曲线图 6 及图 7 可以得到不同外激励调谐参数所对应的力幅关系。从图中可以看出,随着外激励调谐参数的减小,力频关系不稳定区域减小。当外激励调谐参数趋于 0 时, a_1 幅值所对应的力频关系与图 5 中幅值 a_1 的变化趋势一致。

在 (σ_1, a_1) 上对力频关系稳定与不稳定区域分割点进行投影,各点连线形成 (σ_1, a_1) 平面。从平面上的趋势线可以看出,随着激励调谐参数的增加,不稳定区域逐渐加大。

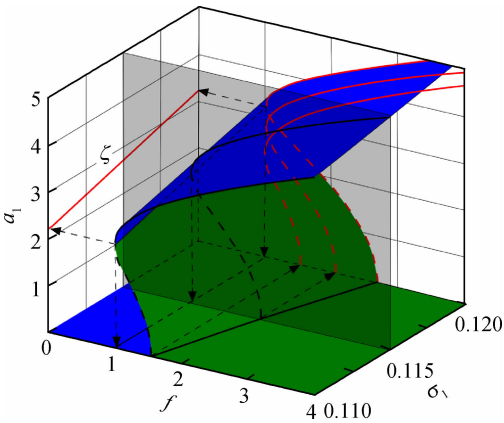


图 6 不同调谐参数下的力频关系

Fig. 6 Relationship between frequencies and excitation under different turned parameters

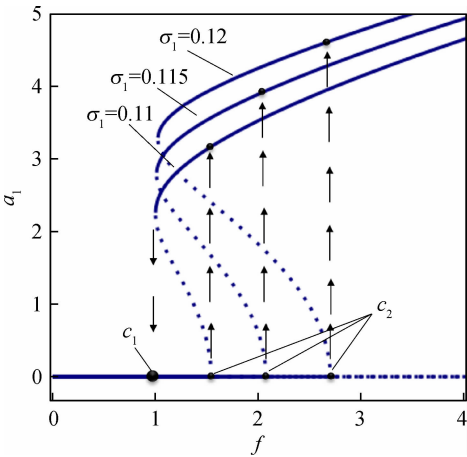


图 7 不同调谐参数所对应的力幅曲线

Fig. 7 Amplitudes of response as functions of the amplitude of the excitation under different turned parameters

在图 7 中给出了稳态响应下力幅曲线随外激励调谐参数的变化情况,计算了正向外激励幅值增加与反向外激励负值减小的跳跃点与回落点的数值。其中对应于不同的外激励幅值 $\sigma_1=0.11$, $c_1=1.0974$ 和 $\sigma_1=0.12$, 各力频曲线发生跳跃的点各有不同,得到了不同外激励调谐参数下的跳跃点的数值。从图中可以看出,随着外激励调谐参数的增大,跳跃点逐渐延迟,与之对应的跳跃之后幅值也有所加大。从图中还可以看出,虽然对应着不同外激励调谐参数,但是各个调谐参数缩影的幅值的回落点几乎贴近,即 $c_1=1.0719(\sigma_1=0.11)$, $c_1=1.0974(\sigma_1=0.115)$ 和 $c_1=1.1229(\sigma_1=0.12)$, 可见当相对坐标轴反向施加外激励幅值时,幅值由稳定状态回落到另一稳定状态所对应的外激励幅值几乎不变。

在考察了力频关系后,对系统的幅频关系进

行了分析。图 8~图 11 给出了内共振精确调谐 ($\sigma=0$) 时,不同参数所对应的幅频关系曲线。

在图 8 中,箭头为频率响应曲线随调谐参数变化的变化趋势。由图可以看出,在调谐参数接近共振时,两个幅值反生跳跃,当内部共振被精确调谐时,频率响应曲线具有左右对称的特征。图 9 为在内共振非精确调谐情况下,得到的频率响应曲线。在此条件下,频率响应曲线是不对称的。

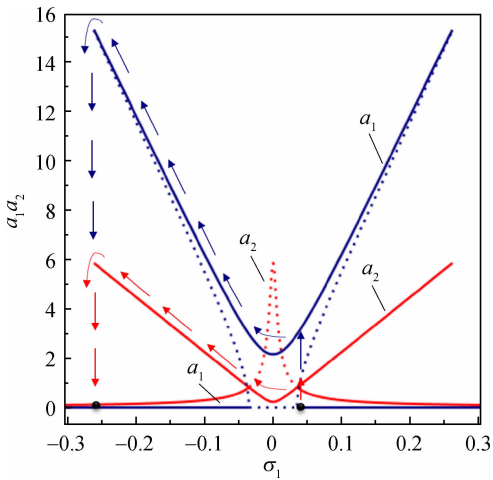


图 8 不同外激励调谐参数下的幅频响应曲线

Fig. 8 Frequency-response curve under different turned parameters

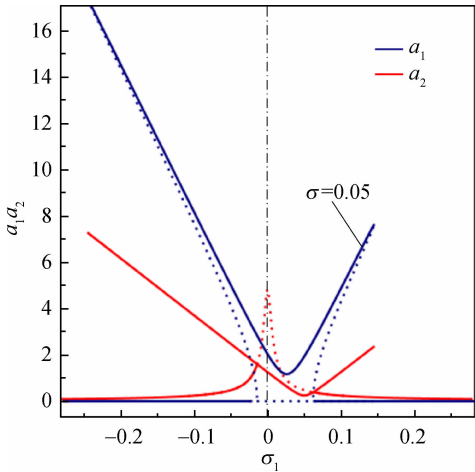


图 9 内共振非精确调谐时的幅频响应曲线

Fig. 9 Frequency-response curves when the internal resonance is not precisely tuned

图 10 给出了不同阻尼系数 (μ) 所对应的幅频曲线,从图中可以看出,当内共振精确调谐时,增大阻尼会减小各阶模态响应的幅值。图 11 为不同线性刚度耦合系数下系统的幅频响应曲线。从图中可以得出,耦合效应越小,振幅跳变现象的阈值越高。耦合系数越大,共振区域越大。图 12 为

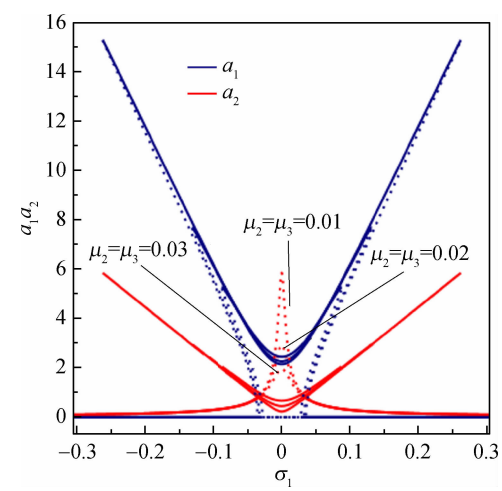


图 10 不同阻尼系数系数下的幅频响应曲线
Fig. 10 Frequency-response curve under different damping parameters

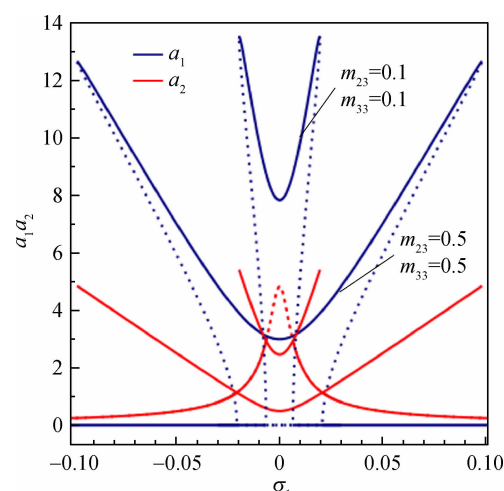


图 11 不同刚度耦合系数下的幅频响应曲线
Fig. 11 Frequency-response curves under different stiffness coupling coefficients

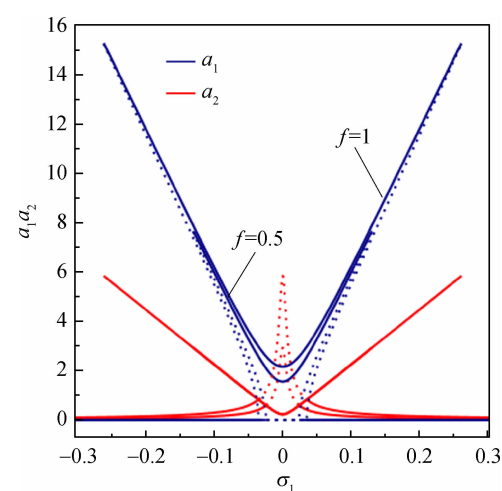


图 12 不同外激励幅值下幅频响应曲线
Fig. 12 Frequency-response curves under different amplitudes of excitation

不同外激励幅值所对应的幅频响应曲线。同样的可以从图中看出,在小的外部激励作用下,系统中跳跃现象的阈值较高。当饱和现象发生时,不同激励的两个振幅之间的振幅是相同的,不同的是达到饱和和所需的阈值的范围是不同的。

6 结 论

本文研究了亚声速气流作用下叶片的非线性耦合振动响应。采用 Chebyshev-Ritz 法获得旋转叶片的第一阶扭转模态和第二阶弯曲模态的模式函数,利用 Galerkin 法对系统的偏微分方程进行截断,得到扭转模态与弯曲模态的两自由度常微分方程。采用摄动法,得到了系统在直角坐标系下的平均方程,通过改变气动力的幅值,研究了气动力对旋转叶片非线性动力行为的影响。通过摄动分析对存在线性刚度项耦合的系统进行了求解,计算了幅值响应随激励变化的趋势。对两阶模态间的能量传递进了分析,发现了扭转模态与弯曲模态间存在着饱和与渗透现象,模态本身存在着跳跃现象,同时分析了不同参数对力频、幅频特性的影响。

参考文献:

[1] NAYFEH A H, MOOK D T, MARSHALL L R. Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions[J]. Journal of Hydronautics, 1973, 7(4): 145-152.

[2] UEINI S S, NAYFEH A H, PRATT J R. A nonlinear vibration absorber for flexible structures[J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 15(3): 259-282.

[3] WANG Fengxia, ZHANG Wei. Stability analysis of a nonlinear rotating blade with torsional vibrations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(26): 5755-5773.

[4] ZHANG Bo, ZHANG Yanlei, YANG Xiaodong. Saturation and stability in internal resonance of a rotating blade under thermal gradient[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 440: 34-50.

[5] YANG Xiaodong, ZHANG Wei. Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal-transversal vibrations[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(4): 2547-2556.

[6] WANG Dan, CHEN Yushu, WIERCIGROCH M, et al. Bifurcation and dynamic response analysis of rotating blade excited by upstream vortices[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(9): 1251-1274.

[7] KANDIL A, EI-GOHARY H A. Suppressing the nonlinear vibrations of a compressor blade via a nonlinear saturation controller[J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(8): 1488-1504.

[8] 陈建霖, 励争, 储鹏程. 大开口复合材料层合板强度破坏研究[J]. 力学进展, 2016, 48(6): 1326-1333.

CHEN Jianlin,LI Zheng,CHU Pengcheng. Strenght analysis of friber reinforced composite laminates with big cut-outs[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,2016,48(6):1326-1333. (in Chinese)

[9] 吕敬,丁千,张伟. 复合材料层合板 1 : 1 参数共振的分叉研究[J]. 力学学报,2004,36(1):64-71.

LÜ Jing,DING Qian,ZHANG Wei. The bifurcation analysis on the laminated composite plate with 1 : 1 parametrically resonance[J]. Acta Mechanica Sinica,2004,36(1):64-71. (in Chinese)

[10] YAO Minghui,NIU Yan,HAO Yuxin. Nonlinear dynamic responses of rotating pretwisted cylindrical shells[J]. Nonlinear Dynamics,2019,95:151-174.

[11] DOWELL E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate [J]. AIAA Journal,1966,4(7):1856-1862.

[12] AMABILI M,PAÏDOUSSIS M P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels with and without fluid-structure interaction [J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(4):349-381.

[13] SINGHA M K,GANAPATHI M. A parametric study on supersonic flutter behavior of laminated composite skew flat panels[J]. Composite Structures,2005,69(1):55-63.

[14] HADDADPOUR H,NAVAZI H M,SHADMEHRI F. Nonlinear oscillations of a fluttering functionally graded plate[J]. Composite Structures,2007,79(2):242-250.

[15] KUO S Y. Flutter of rectangular composite plates with variable fiber pacing [J]. Composite Structures, 2011, 93(10):2533-2540.

[16] ZHAO Minghui, ZHANG Wei. Nonlinear dynamics of composite laminated cantilever rectangular plate subject to third-order piston aerodynamics [J]. Acta Mechanica, 2014,225:1985-2004.

[17] 周正贵,胡骏. 轴流压气机动静叶片排非定常气动力分析[J]. 航空动力学报,2003,18(1):46-50.

ZHOU Zhenggui,HU Jun. The analysis of unsteady blade force in a rotor/stator axial compressor [J]. Journal of Aerospace Power,2003,18(1):46-50. (in Chinese)

[18] YOUNG J,LAI J C S. Oscillation frequency and amplitude effects on the wake of a plunging airfoil[J]. AIAA Journal,2004,42(10):2042-2052.

[19] ZHANG Wei,CHEN Lulu,GUO Xiangying. Nonlinear dynamical behaviors of deploying wings in subsonic air flow [J]. Journal of Fluids and Structures,2017,74:340-355.

[20] DRELA M. Flight vehicle aerodynamics[M]. Cambridge, US:MIT Press,2014.

[21] ALTHOFF M,PATIL M J,TRAUGOTT J P. Nonlinear modeling and control design of active helicopter blades[J]. Journal of the American Helicopter Society,2012,57(1):1-11.

[22] YE Tiangui,JIN Guoyong,SU Zhu,et al. A unified Chebyshev-Ritz formulation for vibration analysis of laminated composite deep open shells with arbitrary boundary conditions[J]. Archive of Applied Mechanics,2014,84(4):441-471.

[23] 刘艮,张伟. 亚音速气流中复合材料悬臂板的非线性振动响应研究[J]. 力学学报,2019,51(3):912-921.

LIU Gen,ZHANG Wei. Nonlinear vibrations of composite cantilever plate in subsonic air flow[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,2019,51(3):912-921. (in Chinese)

(编辑:叶 青、张 雪)