

弹性支承黏弹性阻尼-航空发动机薄壁机匣动力学特性分析

吴宏春^{1,2}, 韩清凯^{1,2}

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819;

2. 东北大学 机械工程与自动化学院

教育部航空动力装备振动及控制重点实验室, 沈阳 110819)

摘 要: 面向航空发动机薄壁机匣部件黏弹性约束层阻尼减振分析的工程需求,开展黏弹性阻尼-机匣弹性支承边界模拟和结构动力学分析研究。将机匣进行力学简化为圆柱壳体模型,通过引入一系列人工弹簧,将圆柱壳边界载荷的转化为弹簧的弹性势能,实现了机匣任意边界支撑刚度的有效模拟。结果表明:增大边界刚度可以提高机匣的固有频率,机匣的阻尼特性对支撑刚度的敏感性与固有频率相反。此外,在机匣工程设计过程中,可以通过加强支撑结构的环向和法向刚度,获得满意的结构动力学特性。

关 键 词: 机匣; 薄壁圆柱壳; 黏弹性阻尼; 弹性边界; 动力学特性

中图分类号: V214

文献标志码: A

Dynamic characteristics analysis of aero engine casing structures with viscoelastic damping materials under elastic supports

WU Hongchun^{1,2}, HAN Qingkai^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110819, China;

2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System Ministry
of Education, School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: The analysis approach of the casing with viscoelastic damping material treatment under arbitrary elastic supports was proposed for the requirement of the vibration control of aero engine casing. The casing was considered as a thin-wall cylindrical shell. Then the governing dynamic equation of casing treated with the constrained layer damping was established, in which the effects of shear stress due to viscoelastic damping material were considered. By introducing a series of boundary spring elements, the boundary load of the casing was transformed into the elastic potential energy of the spring, and the effective simulation of the arbitrary boundary support stiffness on the casing was realized. Results showed that the increasing boundary stiffness could improve the natural frequencies of the casing, while

收稿日期:2019-11-09

基金项目:国家自然科学基金面上项目(11472068)

作者简介:吴宏春(1983—),男,工程师,博士生,主要从航空发动机结构设计研究。

通信作者:韩清凯(1969—),男,教授、博士生导师,博士,主要从事机械结构动力学研究。E-mail:qingkai_han@hotmail.com

引用格式:吴宏春,韩清凯.弹性支承黏弹性阻尼-航空发动机薄壁机匣动力学特性分析[J].航空动力学报,2020,35(7):1413-1424.
WU Hongchun, HAN Qingkai. Dynamic characteristics analysis of aero engine casing structures with viscoelastic damping materials under elastic supports[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(7): 1413-1424.

the sensitivity of the damping characteristics to the support stiffness was opposite to the natural frequencies. In addition, in the design process of engineering casing, the satisfactory structural dynamic characteristics can be obtained by strengthening the circumferential and normal stiffness of the supporting structure.

Key words: casing; thin-walled cylindrical shell; viscoelastic damping materials; elastic edges; dynamic characteristics

薄壁圆柱壳构件结构广泛应用于航空发动机、燃气轮机的机匣、盘鼓组合式转子等结构,如图 1 所示,其动力学特性对航空发动机和燃气轮机的工作性能有重要的影响。随着以美国 F119、F120,欧洲的 EJ2000 和俄罗斯 AL41 为代表的第四代航空发动机研制成功与服役,以高流量比、高压比、高温和低耗油率为重要指标的新一代航发对航空薄壁壳体部件提出了轻质高效的技术要求。由于气动、振动、温度和噪声等复杂多物理场耦合环境共同作用下,轻质航空发动机薄壁构件振动问题日益突出,传统的通过单一结构改进增加加强筋避开共振区域实现减振的处理方法,间接增加了航空发动机总体质量,对发动机推重比指标产生不利影响。目前,采用新型阻尼材料进行薄壁结构振动抑制业已成为研究的热点工作,在航空领域通过在机匣等薄壁圆柱壳部件表面贴附耐高温黏弹性约束层阻尼提高结构阻尼能力,可以有效降低薄壁结构振动实现减振。但航空发动机薄壁构件(特别是薄壁盘鼓组合构件)联接条件复杂,考虑到薄壁构件振动行为对支撑边界敏感,加之黏弹性阻尼材料带来的材料非线性因素,导致对于复杂边界载荷下黏弹性阻尼材料-航空薄壁构件动力学行为认识不足,严重制约了高推比航空发动机薄壁构件阻尼设计与应用。因此,深入开展复杂边界条件下黏弹性阻尼-航空发动机薄壁构件的动力学行为研究,在结构动态设计

与优化、排故以及提高构件使用寿命等方面具有重要理论意义与工程应用价值。

工程中常常将机匣和鼓筒等薄壁壳体部件简化为薄壁圆柱壳体结构便于开展基本的力学分析,经过多年的发展,特别是随着航空航天技术的发展,圆柱壳体类部件获得了广泛的应用,关于薄壁壳体部件的动力学研究一直是国际上力学和工程中的热点,针对不同的结构对象,经过多年的探索提出了以 Aron、Love's、Sanders、Flügge、Donnell 为代表的薄壳理论和 Reissner 和 Naghdi 厚壳理论。目前,虽然各向同性和复合材料壳体的动力学建模的近似假设、理论方法和技术手段取得了长足的进步,但如何解决航空航天工程中所遇到的实际问题,仍是板壳结构动力学领域的热点研究方向,经过国内外学者多年的研究探索,在壳体动力学研究取得丰富的研究成果,对于各向同性材料壳体动力学相关研究进展,这里不再赘述。

由于航空发动机和燃气轮机工作条件复杂且严酷,薄壁壳体构件的振动问题始终无法避免的,针对航空发动机特定的工作环境,开展结构振动抑制是工程应用领域关注的重点。常用的振动抑制手段是在结构的特定部位通过施加振动耗能装置改变结构固有的阻尼特性,达到降低结构振动幅值的目的。在众多的振动抑制手段中,采用黏弹性阻尼材料是较为常见的处理方法,特别是对于航空航天薄壁构件振动抑制,黏弹性阻尼材料具有非常明显的技术优势与应用前景。在板壳结构动力学分析领域,黏弹性约束层阻尼-薄壁构件属于由弹性-黏弹性-弹性材料构成的多层复合结构。针对多层复合结构,研究人员开展了大量的动力学建模和试验研究,取得了丰富的成果,简要评述如下:Kerwin、Ross 和 Mead 等^[1-3]最早研究了带黏弹性约束层阻尼材料梁的振动特性和动力学响应问题。Rao 等^[4]建立了黏弹性约束层阻尼梁动力学有限元模型,并对初始应力作用下黏弹性约束层阻尼梁振动特性进行了分析。对于自由

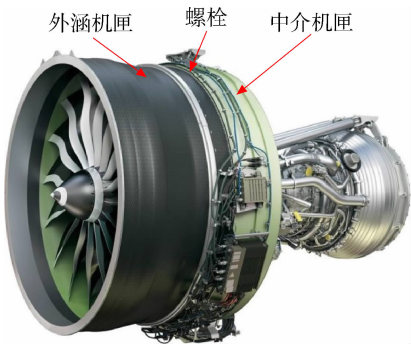


图 1 航空发动机机匣
Fig. 1 Casing of aero engine

层和局部黏弹性约束层阻尼悬臂梁,Ravi 等^[5]用模态叠加法求解了其结构振动响应问题。Zhang 等^[6]分析了阻尼的结构参数与材料参数对黏弹性约束层阻尼梁动力学特性的影响规律。在黏弹性阻尼壳体研究领域,Pan^[7]最先分析了黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳的固有特性,并提出了衡量结构阻尼能力的模态损耗因子概念。此后,在众多学者的努力下,在黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的动力学分析领域形成了较为完整的研究体系和方法,如有解析法、半解析法、有限单元法以及基于试验测试研究方法等。Alam 等^[8-9]在其综述文章中对于黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的理论建模与数值计算方法发展情况进行了系统的评述。在众多数值和理论方法中,以传递矩阵法为代表的半解析法成为复合材料结构动力学分析的重要手段之一。李恩奇、Xiang 等^[10-11]建立了黏弹性阻尼-层合圆柱壳的传递矩阵半解析动力学分析模型,并系统分析了典型的固定、简支和自由边界条件和结构阻尼参数对黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳动力学特性影响规律。Zheng 等^[12]改进了 Li 的传递矩阵法,获得了多层阻尼层方案圆柱壳结构的动力学与响应特性。近年来,以有限元法为代表的数值方法在结构动力学领域特别是工程技术领域获得了越来越广泛的应用。Ramesh 等^[13-15]建立了黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳有限元分析模型,并讨论了不同黏弹性层材料参数和几何参数薄壁圆柱壳动力学特性。Chen 与 Wang 等^[16-17]提出了一种全新的 12 自由度单元,建立了有限元模型并分析局部黏弹性约束层阻尼圆柱壳的动力学特性。Hu 等^[18]分析了简支黏弹性约束层阻尼圆柱壳体在振动响应,值得注意的是在 Hu 的研究中借鉴了 Douglas 等^[19]的研究成果,充分考虑了黏弹性阻尼的频率依赖性,因此 Hu 的研究更能反映出黏弹性材料本身的力学性能。Zheng 等^[20]以振动位移和结构体积最小为优化目标函数,对局部黏弹性阻尼带的位置、数量和长宽比进行了优化。通过上文综述可以看出,现有的黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳体的动力学分析多集中在传统的典型边界条件(固支、简支和自由支撑),但工程实际中,由于安装条件的限制和组合结构影响,航空发动机薄壁圆柱壳结构大多属于非典型支撑。以如图 1 所示的机匣与中介机匣联接为例,外涵机匣通过螺栓安装在刚度较小的中介机匣上,此时两者的联接不属于传统固定边界条件,特别是当联接螺栓由于温度载荷和振动载荷的作用出现松

脱时,机匣和中介机匣的联接为典型的弹性边界。目前,采用有限元法通过引入约束弹簧可以实现弹性边界的模拟,但在理论分析方面,弹性支撑边界条件下黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳缺乏有效的解析建模手段,导致工程技术人员对安装边界刚度退化和组合结构带来的弹性支撑边界改变情况下黏弹性材料-航空薄壁圆柱壳的振动行为分析缺乏分析手段。

本文针对以机匣为代表的航空发动机薄壁构件复杂边界条件下黏弹性阻尼结构动力学分析的需求,以黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳为对象开展复杂弹性边界模拟和结构动力学特性研究。通过黏弹性阻尼材料基本假设和层间变形协调关系,有效减少了动力学建模过程中变量控制数目,降低了动力学方程维度。通过引入人工边界弹簧,将薄壁圆柱壳边界载荷的转化为人工弹簧的弹性势能。采用 Rayleigh-Ritz 法获得了任意弹性支撑边界下黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳动力学微分方程。搭建了模态试验系统,通过模态实验验证本文提出的计算方法的准确性。最后,系统讨论了黏弹性约束层阻尼薄壁圆柱壳环向波数和连续线性变化边界弹簧刚度对结构固有特性与损耗因子的影响。

1 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳动力学建模

1.1 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳坐标系

本文建模分析的黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳由基层、黏弹阻尼层和约束层 3 部分组成,如图 2 所示。图 2 中基体薄壁圆柱壳长、中面半径和厚度分别为 L 、 R_s 和 H_s 。表示, R_f 与 H_f 为黏弹

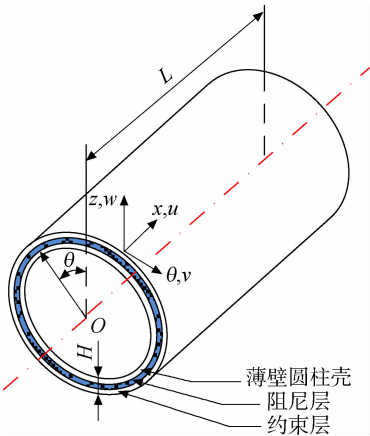


图 2 黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳坐标系
Fig. 2 Coordinate system of viscoelastic shell

性阻尼层的中间半径和厚度,约束层的半径和厚度用 R_c, H_c 表示。符号 u, v 和 w 为基层壳体在柱坐标系 $O-x\theta z$ 中沿 x, θ 和 z 向的位移。

1.2 黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳基本假设

黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳在外部载荷作用下振动时,各层会产生变形。由于各层材料刚度的不同,导致明显的层间变形差异,其中黏弹性层刚度远小于约束层和基基层,导致约束层和基基层的形变要远小于黏弹性阻尼层,因此认为约束层对黏弹性阻尼层的形变有抑制作用,使得黏弹性阻尼层引入新的剪切变形。黏弹性阻尼层的剪切变形使得系统的动能转化为阻尼层的内能,实现结构振动抑制。考虑到整个变形过程以及薄壁壳体假设,在黏弹性约束层阻尼薄壁圆柱壳的建模过程做如下简化:

1) 忽略黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳在厚度方向的应变。认为黏弹性阻尼材料振动时以剪切变形为主,因此忽略黏弹性阻尼层的拉伸、抗弯刚度,只考虑剪切刚度。

2) 基基层、黏弹性阻尼层和约束层之间结合完好没有滑移并且层间位移连续变化。同时,认为 3 层材料具有相同的径向位移。

3) 忽略壳体截面转动惯量,在黏弹性阻尼层中只考虑横(径)向振动惯量,忽略面内惯性。

1.3 黏弹性阻尼结构变形协调关系

由于本文研究的黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳为 3 层层合薄壁结构,包含基基层、黏弹性阻尼材料与约束层,分别用 s, f, c 表示。根据文中第 1.2 节假设,3 层之间的变形协调关系如图 3 所示。

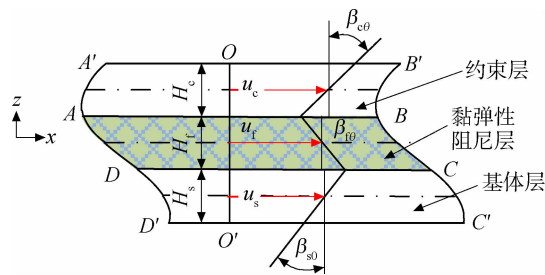


图 3 黏弹性约束层阻尼结构变形协调关系

Fig. 3 Deformation distribution and continuity of the structure with viscoelastic damping treatment

在黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳振动产生形变时,各层之间的变形协调关系可以通过结合面处的位移表示如下:

$$\begin{aligned} u_{cj}(x, \theta) - \frac{H_c}{2} \beta_{cj}(x, \theta) &= u_{ij}(x, \theta) + \\ &H_f / 2 \beta_{fj}(x, \theta) \\ u_{sj}(x, \theta) + \frac{H_s}{2} \beta_{sj}(x, \theta) &= u_{ij}(x, \theta) - \\ &H_f / 2 \beta_{fj}(x, \theta) \quad (j = x, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 β_j 为各层扭转变形角度。

进一步整理式(1)可以获得黏弹性阻尼层的位移与转角表达式

$$\begin{aligned} u_{ij}(x, \theta) &= \frac{1}{2} \left[u_{cj}(x, \theta) - \frac{H_c}{2} \beta_{cj}(x, \theta) + \right. \\ &u_{sj}(x, \theta) + \left. \frac{H_s}{2} \beta_{sj}(x, \theta) \right] \\ \beta_{ij}(x, \theta) &= \frac{1}{H_f} \left[u_{cj}(x, \theta) - \frac{H_c}{2} \beta_{cj}(x, \theta) - \right. \\ &u_{sj}(x, \theta) + \left. \frac{H_s}{2} \beta_{sj}(x, \theta) \right] \end{aligned} \quad (j = x, \theta) \quad (2)$$

通过式(2)将黏弹性阻尼材料层的位移、转角通过基基层、约束层的位移和转角表示。

1.4 黏弹性约束层阻尼薄壁圆柱壳能量表达式

根据能量叠加原理,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳整体的动能可以通过各层动能叠加的形式获得

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} L H_i \rho_i \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2) R_i d\xi d\theta \\ (i &= s, f, c) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\xi = \frac{x}{L}$ 为无量纲长度, ρ_i 为黏弹性阻尼圆柱壳各层的密度。

根据文中第 1.2 节基本假设,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳基基层与约束层的弯曲势能可写成如下形式:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{R_i}{2} \int_{-\frac{H_i}{2}}^{\frac{H_i}{2}} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{E_i}{1 - \mu_i^2} [(\epsilon_x^i)^2 + (\epsilon_\theta^i)^2] + \right. \\ &\left. \frac{2\mu_i E_i}{1 - \mu_i^2} \epsilon_x^i \epsilon_\theta^i + G_i (\gamma_{x\theta}^i)^2 \right\} d\theta dx dz \quad (i = s, f) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 E_i 与 μ_i 分别弹性模量和泊松比。约束层与基基层材料的剪切模量为 $G_i = E_i / 2(1 + \mu_i)$, $i = s, c$, 基于 Donnell 壳体假设式(4)中应变表达式为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{L \partial \xi} - z \frac{\partial^2 w}{L^2 \partial \xi^2}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - z \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + z \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{L \partial \xi} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} - z \frac{2}{RL} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + z \frac{1}{RL} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (5)$$

根据本文第 1.2 节中的假设,黏弹性阻尼层

剪切变形引起的剪切势能如下

$$U_f = \frac{L}{2} \int_{-H_f/2}^{H_f/2} \int_0^{2\pi} (\tau_{xz}^v \gamma_{xz}^v + \tau_{\theta z}^v \gamma_{\theta z}^v) R_f d\theta dx dz \tag{6}$$

1.5 黏弹性约束层阻尼圆柱壳弹性支撑边界模拟

图 1 所示薄壁机匣通过螺栓联接在中介机匣上,由于热载荷变化和振动带来的交变载荷,会引起螺栓的松脱,使得边界联接刚度退化。对于机匣边界联接刚度改变的力学计算,可以近似归结为弹性地基上的薄壁圆柱壳动力学分析问题。目前,关于弹性地基支撑动力学分析问题工程界开展了大量研究,并形成了一系列的有效的简化处理方法,其中以温克尔(Winkler)地基模型最为简

$$U_{spr} = \frac{1}{2} \sum_{i=s,f,c} \int_0^{2\pi} \left\{ k_u^0 [u_i(0,\theta,t)]^2 + k_v^0 [v_i(0,\theta,t)]^2 + k_w^0 [w(0,\theta,t)]^2 + k_\theta^0 \frac{1}{L^2} + \left[\frac{\partial w(0,\theta,t)}{\partial \xi} \right]^2 \right\} R d\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=s,f,c} \int_0^{2\pi} \left\{ k_u^1 [u_i(1,\theta,t)]^2 + k_v^1 [v_i(1,\theta,t)]^2 + k_w^1 [w(1,\theta,t)]^2 + k_\theta^1 \frac{1}{L^2} \left[\frac{\partial w(1,\theta,t)}{\partial \xi} \right]^2 \right\} R d\theta \tag{7}$$

(i = s, f, v)

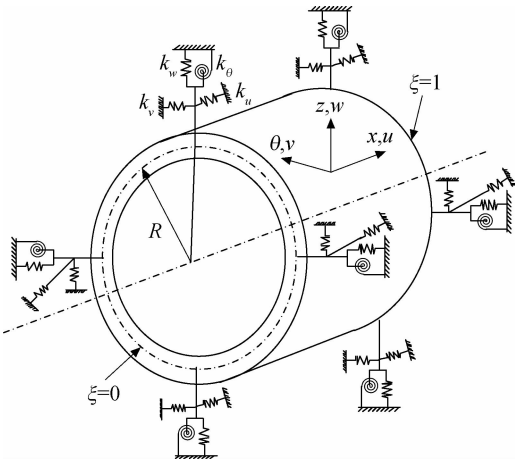


图 4 人工弹簧模拟弹性支撑薄壁圆柱壳示意图
Fig. 4 Simulation of the cylindrical shell with elastic support

1.6 黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳动力学方程

由于本文通过式(3)与式(4)的变形协调关系,简化了建模过程中变量的数目,在本文振动方程建模和求解过程中,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳振动的位移可以写成如下形式

$$\begin{cases} u_i = e^{-j\omega t} \cos n\theta U_i(\xi) \\ v_i = e^{-j\omega t} \sin n\theta V_i(\xi) \\ w = e^{-j\omega t} \cos n\theta W(\xi) \end{cases} \quad (i = s, c) \tag{8}$$

其中 n 为圆柱壳的环向波数, ω 为壳体的固有频率,圆柱壳在 x 、 y 和 z 方向的振型函数用 $V(\xi)$

单和常用。在 Winkler 模型假设中,认为支撑基础为均质的、各向同性线弹性材料,同时假设弹性基础支反力与该点的挠度成正比,基于地基的均质假设,认为地基的弹性系数为常量。基于上述分析,本文在弹性支撑边界计算时将支撑边界用一系列具有相同弹性系数的离散人工弹簧组合进行模拟。考虑壳体单元承受的内力主要为弯矩和剪力,因此在薄壁壳体自由边的轴向、周向、法向和转角方向分别引入单位位移弹簧,分别用 k_u^0 , k_v^0 , k_w^0 , k_θ^0 和 k_u^1 , k_v^1 , k_w^1 和 k_θ^1 表示。根据上文的分析,弹性支撑边界下的黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳如图 4 所示。对于两端弹性支撑的圆柱壳边界弹簧产生的弹性势能表达式为

和 $W(\xi)$ 表示。详细的振型函数具体构造方法及多项式阶次选择见文献[21-22]。

将圆柱壳基体、约束层与黏弹性层的势能相加获得黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的总势能为

$$U = U_s + U_c + U_f + U_{spr} \tag{9}$$

根据文献[21-22]中 Rayleigh-Ritz 法处理过程,弹性支撑边界条件下黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳的特征值可以写成如下形式

$$\omega^2 = \frac{U_{max} + U_{spr}}{T_{num}} \tag{10}$$

其中

$$U_{max} = (U_s)_{max} + (U_f)_{max} + (U_c)_{max} \tag{11}$$

将式(10)对振型函数中的待定系数求偏导,并取极值,可以获得频率方程如下:

$$[K^{Re} + iK^{Im} + K_{spr} - \omega^2 M]X = 0 \tag{12}$$

其中 $X = \{a \ b \ c \ d \ e\}^T$ 为里兹向量, $i^2 = -1$ 为虚数。 K^{Re} 为刚度矩阵, K^{Im} 为由于黏弹性阻尼材料带来的虚数矩阵, K_{spr} 为边界刚度矩阵,表达式为

$$K^{Re} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} & K_{ad} & K_{ae} \\ K_{ab}^T & K_{bb} & K_{bc} & K_{bd} & K_{be} \\ K_{ac}^T & K_{bc}^T & K_{cc} & K_{cd} & K_{ce} \\ K_{ad}^T & K_{bd}^T & K_{cd}^T & K_{dd} & K_{de} \\ K_{ae}^T & K_{be}^T & K_{ce}^T & K_{de}^T & K_{ee} \end{bmatrix}_{5N \times 5N} \tag{13a}$$

$$\mathbf{K}^{\text{lm}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} & \mathbf{K}_{ad} & & \\ & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} & & \mathbf{K}_{be} \\ & & \mathbf{K}_{cc} & & \mathbf{K}_{ce} \\ & & & \mathbf{K}_{dd} & \\ & & & & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix}_{5N \times 5N}$$

(13b)

$$\mathbf{K}_{\text{spr}} = \begin{bmatrix} ks^{aa} & & & ks^{ad} & \\ & ks^{bb} & & & ks^{be} \\ & & ks^{cc} & & \\ ks^{da} & & & ks^{dd} & \\ & ks^{be} & & & ks^{ee} \end{bmatrix}_{5N \times 5N}$$

(13c)

式(13)中矩阵具体的表达式见附录。

黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳动力学方程的质量矩阵 $\mathbf{M}$ 表达式为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ac} & \mathbf{M}_{ad} & & \\ & \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bc} & & \mathbf{M}_{be} \\ \mathbf{M}_{ac}^T & \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{cd} & \mathbf{M}_{ce} & \\ \mathbf{M}_{ad}^T & \mathbf{M}_{cd}^T & \mathbf{M}_{dd} & & \\ & \mathbf{M}_{bd}^T & \mathbf{M}_{cd}^T & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix}_{5N \times 5N}$$

(14)

式(14)中具体的表达式见附录。

求解方程(12)可以获得弹性支撑边界条件下黏弹性阻尼-薄壁壳固有特性。

2 黏弹性阻尼层合薄壁圆柱壳的模态试验研究

为了验证本文方法的收敛性和准确性,对图 5 所示的黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳的开展模态试验。图 5 中的黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳的材料参数和几何参数如表 1 所示。试验件的基体为 Q235 钢,黏弹性阻尼材料为 DY-AD606,约束层采用铝板。图 5 中黏弹性约束层阻尼试验件通过圆周均布 24 个螺栓联接在夹具上,模拟经典的固定-自由支撑边界条件。

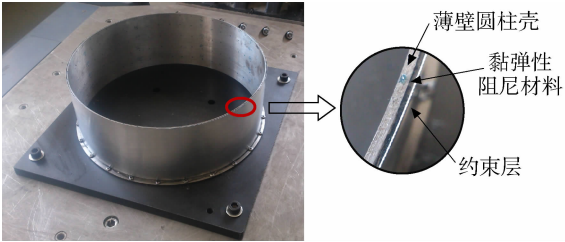


图 5 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳试验件

Fig. 5 Thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping

表 1 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳结构及几何参数

Table 1 Physical and geometrical parameters of the thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping

物理量	薄壁壳体	黏弹性层	约束层
长度/mm	105	100	100
半径/mm	145		
厚度/mm	1.5	0.5	0.3
密度/(kg/m ³)	7800	999	2700
弹性模量/GPa	206	G_f	70
泊松比	0.3	0.3	0.3

注: $G_f=0.796(1+0.95i)$ MPa。

在工程实际中,一般将刚度大于 10^8 N/m 的弹簧认为是刚性支承,因此在本节计算悬臂圆柱壳时,通过设置一端的四个边界弹簧刚度 $k_u^0 = k_v^0 = k_w^0 = k_\theta^0 = 10^{11}$ N/m 模拟固定边界,另一端 $k_u^1 = k_v^1 = k_w^1 = k_\theta^1 = 0$ N/m 模拟自由边界。通过试验模态分析和本文解析法求得的固有频率和模态损耗因子对比如表 2 和表 3 所示,模态振型如图 6 所示。在表 2、表 3 中,由于实验误差的原因,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的前 4 阶环向波数振型并没有被激发。当 $n=5$ 时,试验测试的结果与解析计算的固有频率结果误差为 2.84%,随着环向波数的增大,实验结果与计算结果误差在 5% 以内。当 $n=9$ 时,试验测试的结果与解析计算的模态损耗因子结果误差为 13.2%,考虑到结构和测试精度的影响,模态损耗因子误差范围在可接受范围内。根据文献[22]的分析,计算时选取的多项式截断阶次(N)影响计算的精度,本文选取截断阶次 $N=15$ 开展计算,通过对比表 2 与表 3 表明本文的计算方法和选取的多项式截断阶次具有较高的精度,后续计算分析具有合理性。

表 2 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳固有频率

Table 2 Natural frequencies of the thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping

(m, n)	试验结果/Hz	本文解析/Hz	误差/%
(1,5)	1030.9	1060.2	2.84
(1,6)	1053.2	1067.6	1.36
(1,7)	1125.3	1135.6	0.91
(1,8)	1301.4	1326.1	1.89
(1,9)	1520.3	1490.9	1.93
(1,10)	1761.7	1782.2	1.16

表 3 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳部件模态损耗因子

Table 3 Model loss factors of the thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping

(m, n)	模态损耗因子/%		误差/%
	试验结果	本文解析	
(1,5)	1.11	1.27	7.08
(1,6)	2.34	2.45	4.48
(1,7)	4.41	4.01	9.97
(1,8)	5.02	4.52	11.1
(1,9)	4.79	4.23	13.2
(1,10)	3.39	3.76	9.87

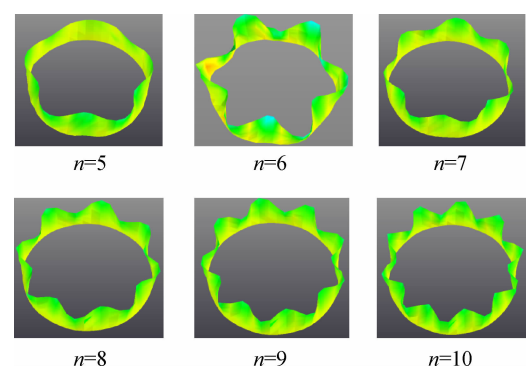


图 6 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳模态振型

Fig. 6 Experimental mode shapes of thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping

3 数值算例与结果讨论

3.1 黏弹性阻尼层合圆柱壳固有特性

图 7 为表 1 中的黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳的固有频率与模态损耗因子随环向波数变化情况。在图 7 中包含了四种典型的安装边界,分别为:两端固支(C-C)、悬臂(C-F)、固支-简支(C-S)和两端简支(S-S)。由图 7(a)可以看出,随着环向波数 n 的增加,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的固有频率随环向波数增大首先减小,在环向波数 $n=6$ 时,黏弹性阻尼-薄壁壳体固有频率达到最小值。对任意确定的环向波数 n ,两端固支边界拥有最大的固有频率值,随后为固支-简支、两端简支和悬臂支撑边界的固有频率。值得注意的是,当 $n>10$ 时各种边界条件下的固有频率收敛于某一特定值,这一结果表明:当环向波数较大时,黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳固有频率对边界支撑条件变化不敏感。

图 7(b)为黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳损耗因子随环向波数 n 的变化趋势。与图 7(a)中固有频率变化相反,随着环向波数的增大,黏弹性阻尼圆柱壳的模态损耗因子随环向波数变化表现为先增大后减小趋势。与图 7(a)中具有一致性,高阶环向波数情况下模态损耗因子收敛,说明模态损耗因子对高阶振动振型不敏感。对任意确定的环向波数 n ,悬臂支撑边界拥有最大的模态损耗因子,随后为两端简支、固支-简支和两端固定支撑情况。对比图 7(a)与图 7(b),图 7(b)中模态损耗因子曲线与图 7(a)中固有频率曲线随边界支撑变化的敏感性相反。

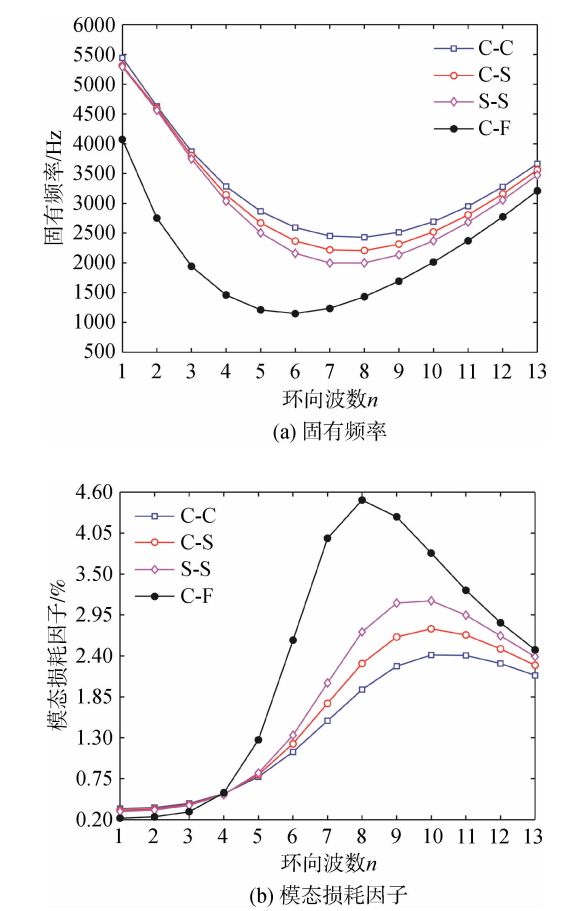


图 7 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳振动特性随环向波数 n 变化

Fig. 7 Vibration characteristics of thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping with respect to wave number n

3.2 弹性边界黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳固有特性分析

针对工程实际中广泛存在复杂边界支撑情况,本文提出的计算方法对处理复杂边界,特别是弹性支撑边界的结构的振动问题具有明显的技术

优势。本节假设黏弹性阻尼层合圆柱壳的支撑方式为—端固支,另一端为弹性支撑,在计算过程中假设圆柱壳—端的人工弹簧刚度无限大来模拟固定边界,壳体另一端的人工弹簧刚度数值线性变化,具体如下: $k_u^0=k_v^0=k_w^0=k_\theta^0=10^{11}$ N/m, $k_i^1 \in [10^{-3}, 10^{11}]$, $j=u, v, w, \theta$ 。

图 8 为轴向半波数 $m=1$ 、环向波数 $n=5$,即 (1,5) 模态振型的黏弹性圆柱壳的振动特性随人工弹簧刚度变化关系曲线,其中图 8(a) 为固有频率,图 8(b) 为模态损耗因子。当人工边界弹簧刚度 $k_u^0=k_v^0=k_w^0=k_\theta^0=10^{11}$ N/m, $k_u^1=k_v^1=k_w^1=k_\theta^1=0$ 时,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳为—端固支—端自由(C-F)支撑。以图 8(a) 所示的固有频率为例,当人工弹簧刚度位于 $k_i^1 \in [10^{-3}, 10^3]$ 区间变化时,固有频率曲线为—条平行弹簧刚度轴的直线,此时边界弹簧刚度的改变并没有明显影响黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的固有频率,此时黏弹性层合圆柱壳的支撑方式仍然接近初始的悬臂支撑情况。随着人工弹簧刚度数值增大,当弹簧刚度数值位于 $k_i^1 \in [10^3, 10^8]$ 区间内时,固有频率为弹簧刚度的单调递增函数。通过对比不同方向的边界弹簧的曲线,法向人工弹簧 k_w 最先影响圆柱壳的固有频率。当所有的支撑刚度接近无限大,即 $k_i^1 \in [10^8, 10^{11}]$ 时,人工弹簧刚度的改变对黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳固有频率影响很小。对比不同方向的人工弹簧刚度,环向刚度 k_v 对固有频率的影响最为敏感,其次是轴向刚度 k_u 、法向刚度 k_w ,扭转刚度 k_θ 对固有频率影响非常小。

图 8(b) 描述了模态损耗因子随着支撑刚度的变化情况。与图 8(a) 中曲线变化趋势具有一致性,当支撑刚度 $k_i^1 \in [10^{-3}, 10^3]$ 在区间变化时,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的模态损耗因子曲线仍然为平行于刚度坐标轴的直线,证明在此区间内人工弹簧支撑刚度对黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳

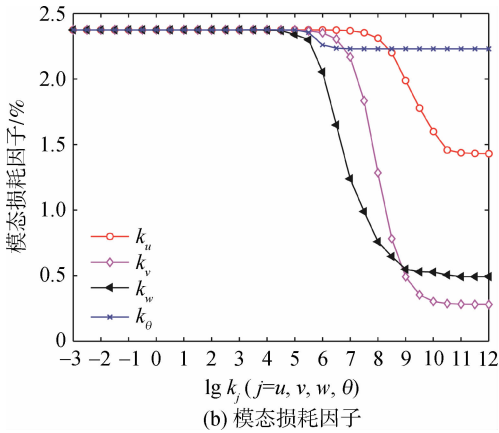


图 8 黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳振动特性随支撑刚度变化 ($n=5$)

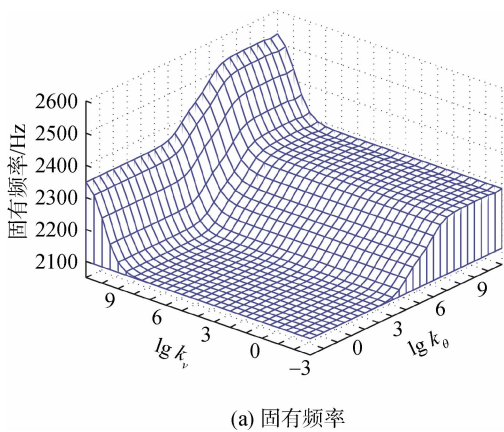
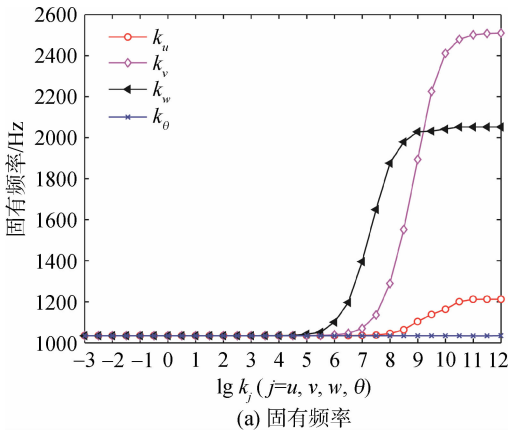
Fig. 8 Variation of vibration characteristics with brace stiffness for thin-walled cylindrical shell with viscoelastic damping ($n=5$)

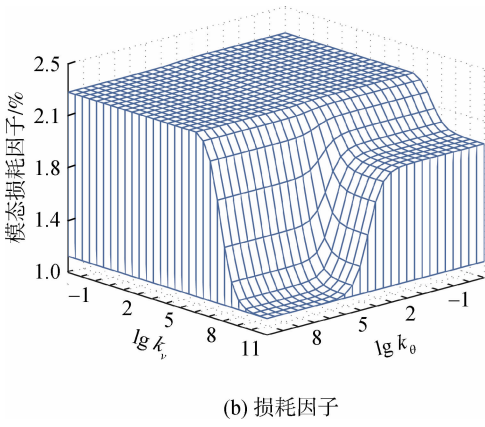
的模态损耗因子没有明显的影响。在 $k_i^1 \in [10^3, 10^8]$ 区间,随着支撑刚度的增加,模态损耗因子为支撑刚度的单调递减函数,这一变化趋势与固有频率情况相反。当所有的支撑刚度 $k_i^1 \in [10^8, 10^{11}]$ 时,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳模态损耗因子对人工弹簧刚度改变不敏感。同时,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的模态损耗因子受环向刚度 k_v 与法向支撑刚度 k_w 的影响最大,受扭转刚度 k_θ 影响最小。

3.3 组合弹性边界黏弹性约束层阻尼固有特性

图 9 与图 10 为组合边界刚度连续变化对黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的第 (1, 5) 模态的振动特性的影响规律。设定在 $x=0$ 处的人工弹簧刚度为固定支撑,即 $k_v^0=k_w^0=k_u^0=k_\theta^0=10^{11}$ N/m。在 $x=1$ 处假定两个方向的人工弹簧刚度无限大,其余两个人工弹簧在 $k_i^1 \in [10^{-3}, 10^{11}]$ 范围内线性变化。

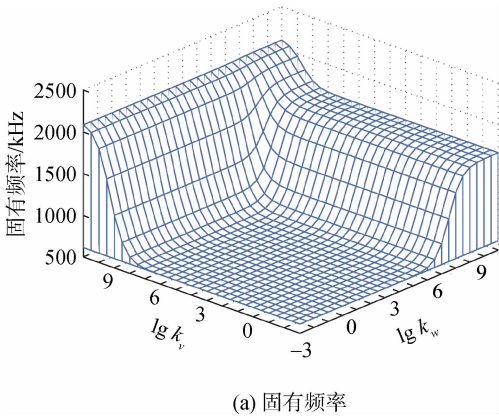
在图 9 中,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳弹性支撑



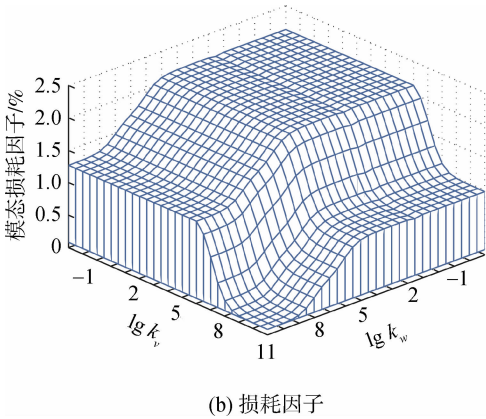


(b) 损耗因子

图 9 振动特性随边界刚度变化($k_u^{(1)} = k_\theta^{(1)} = 10^{11}$ N/m, $k_v^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$, $k_w^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$)
Fig. 9 Variation of the vibration characteristics with respect to combine boundaries stiffness ($k_u^{(1)} = k_\theta^{(1)} = 10^{11}$ N/m, $k_v^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$, $k_w^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$)



(a) 固有频率



(b) 损耗因子

图 10 振动特性随边界刚度变化($k_v^{(1)} = k_w^{(1)} = 10^{11}$ N/m, $k_\theta^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$, $k_u^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$)
Fig. 10 Variation of the vibration characteristics with respect to combine boundaries stiffness ($k_v^{(1)} = k_w^{(1)} = 10^{11}$ N/m, $k_\theta^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$, $k_u^{(1)} \in [10^{-3}, 10^{11}]$)

端的支撑方式为轴向人工边界弹簧与扭转人工边界弹簧刚度无限大,即 $k_u^{(1)} = k_\theta^{(1)} = 10^{11}$ N/m。当环向人工弹簧 $k_v^{(1)}$ 与法向人工弹簧 $k_w^{(1)}$ 的刚度在区间 $[10^{-3}, 10^{11}]$ 范围内线性增加时,固有频率首先保持定值,随后在 $[10^4, 10^8]$ 刚度范围内单调递增,当边界弹簧刚度在 10^8 N/m 以上时,固有频率随着弹簧刚度增大不再改变。与固有频率相反,模态损耗因子随着环向支撑弹簧 k_v 与法向弹簧 k_w 的刚度在区间 $[10^{-3}, 10^{11}]$ 范围内线性增加时,黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的模态损耗因子先保持定值,随后在 $[10^4, 10^8]$ 刚度范围内单调递减,当边界弹簧刚度在 10^8 N/m 以上时,模态损耗因子随着弹簧刚度增大不再改变。同时,在图 9 中截取某一特定人工弹簧刚度下的平面图(2D 图),则固有频率和模态损耗因子随着另一个支撑刚度的 2D 图变化情况与图 7 中的变化趋势具有一致性。

图 10 为扭转人工弹簧刚度与轴向人工弹簧刚度对黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳的(1,5)固有频率和模态损耗因子的影响曲线。图 10 计算的黏弹性阻尼圆柱壳支撑的横向人工弹簧与周向人工弹簧刚度为 $k_v^{(1)} = k_w^{(1)} = 10^{11}$ N/m,扭转人工弹簧 $k_\theta^{(1)}$ 与轴向人工弹簧 $k_u^{(1)}$ 在 $[10^{-3}, 10^{11}]$ 区间内线性变化。这一结果表明,薄壁圆柱壳部件的固有特性和阻尼特性对于边界刚度具有一定的“敏感区间”,在 $[10^4, 10^8]$ 区间内,薄壁圆柱壳的固有频率和模态损耗因子出现剧烈的变化,因此在工程实际中应引起注意,避免由于支撑刚度变化引起结构共振。通过对比图 9 与图 10,模态损耗因子与固有频率具有相同的变化趋势,这里不再赘述。

值得指出的是,通过分析图 9 与图 10 的分析可以得出,相比于扭转人工弹簧 $k_\theta^{(0)}$ 与轴向人工弹簧 $k_u^{(0)}$ 组合,环向支撑弹簧 k_v 与法向弹簧 k_w 组合对结构的振动行为影响更大,在工程实际中应对这两个方向的边界刚度予以重视,因此在设计支撑机匣和盘鼓组合结构时,必要时需要加强支撑机匣(轮盘)的环向刚度和法向刚度,保证机匣和鼓筒的动力学特性稳定。

4 结 论

本文针对以机匣、盘鼓组合结构为代表的复杂边界条件下黏弹性约束层阻尼-航空薄壁壳体部件动力学分析的需求,通过将上述结构简化为薄壁圆柱壳体,提出了适用于黏弹性阻尼-薄壁圆

柱壳弹性边界模拟方法,发展了黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳动力学分析方法,系统研究了黏弹性阻尼圆柱壳动力学特性、阻尼特性随连续线性的弹性边界刚度变化规律。

通过模态试验与数值算例表明本文所提出的通过人工弹簧模拟弹性支撑下黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳的方法,在满足典型边界与任意弹性边界支撑的黏弹性阻尼-薄壁圆柱壳固有特性与模态损耗因子分析的基础上,同时具有较高的计算精度。对于高阶振动模态,固有频率和模态损耗因子的收敛,即在较高的环向波数时,黏弹性约束层阻尼-薄壁圆柱壳固有特性和模态损耗因子对支撑边界敏感性降低。在黏弹性阻尼圆柱壳支撑边界线性改变的情况下,环向刚度 k_v 对固有特性的影响最为敏感,其次是轴向刚度和法向刚度,值得注意的是扭转刚度对固有特性影响最小。因此在薄壁壳体类部件工程设计过程中,可以通过加强支撑结构的环向和法向刚度,获得满意的结构动力学特性。

此外,通过修改黏弹性阻尼材料的积分区域,可以将本文提出的计算方法拓展应用于局部贴附约束层阻尼的薄壁圆柱壳动力学分析。

参考文献:

- [1] KERWIN J, EDWARD M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1959, 31(7): 952-962.
- [2] ROSS D, UNGAR E, KERWIN E M. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate in structural damping[M]. New York: ASME, 1959.
- [3] MEAD D J, MARKUS S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1969, 10(2): 163-175.
- [4] RAO V S, SANKAR B V, SUN C T. Constrained layer damping of initially stressed composite beams using finite elements[J]. Journal of Composite Materials, 1992, 26(12): 1752-1766.
- [5] RAVI S S, KUNDRA T K, NAKRA B C. A response re-analysis of damped beams using eigenparameter perturbation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 179(3): 399-412.
- [6] ZHANG Shaohui, CHEN Hualing. A study on the damping characteristics of laminated composites with integral viscoelastic layers[J]. Composite Structures, 2006, 74(1): 63-69.
- [7] PAN H. Axisymmetrical vibrations of a circular sandwich shell with a viscoelastic core layer[J]. Journal of Sound and Vibration, 1969, 9(2): 338-348.

- [8] ALAM N, ASNANI N. Vibration and damping analysis of a multilayered cylindrical shell; Part I theoretical analysis[J]. AIAA Journal, 1984, 22(6): 803-810.
- [9] ALAM N, ASNANI N. Vibration and damping analysis of a multilayered cylindrical shell; Part II numerical results[J]. AIAA Journal, 1984, 22(7): 975-981.
- [10] 李恩奇, 李道奎, 唐国金, 等. 基于传递函数方法的局部覆盖环状 CLD 圆柱壳动力学分析[J]. 航空学报, 2007, 28(6): 1487-1493.
LI Enqi, LI Daokui, TANG Guojin, et al. Dynamic analysis of cylindrical shell with partially covered ring-shape constrained layer damping by the transfer function method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28(6): 1487-1493. (in Chinese)
- [11] XIANG Yu, HANG Yuying, LU Jing, et al. New matrix method for analyzing vibration and damping effect of sandwich circular cylindrical shell with viscoelastic core[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(12): 1587-1600.
- [12] ZHENG Ling, QIU Quan, WAN Haochuan, et al. Damping analysis of multilayer passive constrained layer damping on cylindrical shell using transfer function method[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2014, 136(3): 031001. 1-031001. 9.
- [13] RAMESH T C, GANSEAN N. Orthotropic cylindrical shells with a viscoelastic core; a vibration and damping analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 175(4): 535-555.
- [14] RAMESH T C, GANSEAN N. Finite element analysis of cylindrical shells with a constrained viscoelastic layer[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 172(3): 359-370.
- [15] RAMESH T C, GANSEAN N. Influence of constrained damping layer on the resonant response of orthotropic cylindrical shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 185(3): 483-500.
- [16] CHEN L, HUANG S. Vibrations of a cylindrical shell with partially constrained layer damping (CLD) treatment[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999, 41(12): 1485-1498.
- [17] WANG H, CHEN L. Finite element dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells with a constrained damping layer[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40(7): 737-755.
- [18] HU Y C, HUANG S C. The frequency response and damping effect of three-layer thin shell with viscoelastic core[J]. Computers and Structures, 2000, 76(5): 577-591.
- [19] DOUGLAS B E, YANG J C. Transverse compressional damping in the vibratory response of elastic-viscoelastic-elastic beams[J]. AIAA Journal, 1978, 16(9): 925-930.
- [20] ZHENG H, CAI C, PAU G, et al. Minimizing vibration response of cylindrical shells through layout optimization of passive constrained layer damping treatments[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279(3): 739-756.
- [21] SONG Xuyuan, ZHAI Jingyu, CHEN Yugang, et al. Trav-

eling wave analysis of rotating cross-ply laminated cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh-Ritz method[J]. Composite Structures, 2015, 133: 1101-1115.

[22] SONG Xuyuan, HAN Qingkai, ZHAI Jingyu. Vibration analyses of symmetrically laminated composite cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh-Ritz method[J]. Composite Structures, 2015, 134: 820-830.

附 录

式(13)中刚度矩阵及弹簧刚度矩阵具体的表达式如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{aa} &= \int_0^1 \left[\frac{R_s^2}{L^2} \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^u(\xi) + \frac{n^2(1-\mu_s)}{2} \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^u(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{ab} &= \int_0^1 \left[\frac{2n\mu_s R_s}{L} \varphi_{ij}^{u'}(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) - \frac{1-\mu_s}{2} \cdot \frac{2nR_s}{L} \varphi_{ij}^{v'}(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{ac} &= \int_0^1 \left[\frac{2n\mu_s R_s}{L} \varphi_{ij}^{u'}(\xi) \varphi_{ij}^w(\xi) \right] d\xi, \\ \mathbf{K}_{ij}^{bb} &= \int_0^1 \left[n^2 \left(\frac{H_s^2}{12R_s^2} + 1 \right) \varphi_{ij}^v(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) + \frac{(1-\mu_s)}{2} \left(\frac{R_s^2}{L^2} + \frac{H_s^2}{12L^2} \right) \varphi_{ij}^{v'}(\xi) \varphi_{ij}^{v'}(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{bc} &= \int_0^1 \left[\left(\frac{H_s^2 n^3}{6R_s^2} + 2n \right) \varphi_{ij}^v \varphi_{ij}^w - \frac{\mu_s n H_s^2}{6L^2} \varphi_{ij}^v \varphi_{ij}^{w''} + \frac{(1-\mu_s)}{2} \cdot \frac{n H_s^2}{3L^2} \varphi_{ij}^{v'} \varphi_{ij}^{w'} \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{\alpha\alpha} &= \int_0^1 \left[\left(\frac{H_s^2 n^4}{12R_s^2} + 1 \right) \varphi_{ij}^w \varphi_{ij}^w W^2 + \frac{H_s^2 R_s^2}{12L^2} \varphi_{ij}^{w''} \varphi_{ij}^{w''} + \frac{(1-\mu_s)}{2} \cdot \frac{n^2 H_s^2}{3L^2} \varphi_{ij}^{w'} \varphi_{ij}^{w'} + \left(\frac{H_c^2 n^4}{12R_c^2} + 1 \right) \varphi_{ij}^w \varphi_{ij}^w W^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{H_c^2 R_c^2}{12L^2} \varphi_{ij}^{w''} \varphi_{ij}^{w''} + \frac{(1-\mu_c)}{2} \cdot \frac{n^2 H_c^2}{3L^2} \varphi_{ij}^{w'} \varphi_{ij}^{w'} \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{ad} &= \int_0^1 \left[\frac{2n\mu_c R_c}{L} \varphi_{ij}^w(\xi) \varphi_{ij}^{u'}(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{cd} &= \int_0^1 \left[\left(\frac{H_c^2 n^3}{6R_c^2} + 2n \right) \varphi_{ij}^w \varphi_{ij}^v - \frac{\mu_c n H_c^2}{6L^2} \varphi_{ij}^{w''} \varphi_{ij}^v + \frac{(1-\mu_c)}{2} \cdot \frac{n H_c^2}{3L^2} \varphi_{ij}^{w'} \varphi_{ij}^{v'} \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{dd} &= \int_0^1 \left[\frac{R_c^2}{L^2} \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^u(\xi) + \frac{n^2(1-\mu_c)}{2} \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^u(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{de} &= \int_0^1 \left[\frac{2n\mu_c R_c}{L} \varphi_{ij}^{u'}(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) - \frac{1-\mu_c}{2} \cdot \frac{2nR_c}{L} \varphi_{ij}^{v'}(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{\alpha\epsilon} &= \int_0^1 \left[n^2 \left(\frac{H_c^2}{12R_c^2} + 1 \right) \varphi_{ij}^v(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) + \frac{(1-\mu_c)}{2} \left(\frac{R_c^2}{L^2} + \frac{H_c^2}{12L^2} \right) \varphi_{ij}^{v'}(\xi) \varphi_{ij}^{v'}(\xi) \right] d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{\alpha a} &= \frac{1}{H_f} \int_0^1 \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^u(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{ac} &= \frac{2A_1}{LH_f} \int_0^1 \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^{w'}(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{ad} &= -\frac{2}{H_f} \int_0^1 \varphi_{ij}^u(\xi) \varphi_{ij}^u(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{bb} &= A_3 \int_0^1 \varphi_{ij}^v(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{bc} &= 2nA_3A_4 \int_0^1 \varphi_{ij}^v(\xi) \varphi_{ij}^w(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{be} &= -2A_2A_3 \int_0^1 \varphi_{ij}^v(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{\alpha\alpha} &= n^2A_4 \int_0^1 \varphi_{ij}^w(\xi) \varphi_{ij}^w(\xi) d\xi + \frac{A_1^2}{L^2} \int_0^1 \varphi_{ij}^{w'}(\xi) \varphi_{ij}^{w'}(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{ij}^{\alpha\epsilon} &= -2nA_2A_4 \int_0^1 \varphi_{ij}^w(\xi) \varphi_{ij}^v(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{dd}=\frac{1}{H_{\mathrm{f}}}\int_0^1\varphi_{ij}^u(\xi)\varphi_{ij}^u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{ee}}=A_2\int_0^1\varphi_{ij}^v(\xi)\varphi_{ij}^v(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{k}s_{ij}^{aa}=\bar{k}_0^u\varphi_i^u(0)\varphi_j^u(0)+\bar{k}_1^u\varphi_i^u(1)\varphi_j^u(1)$$

$$\boldsymbol{k}s_{ij}^{bb}=\bar{k}_0^v\varphi_i^v(0)\varphi_j^v(0)+\bar{k}_1^v\varphi_i^v(1)\varphi_j^v(1)$$

$\boldsymbol{k}s_{ij}^{\mathrm{ee}}=\bar{k}_0^w\varphi_i^w(0)\varphi_j^w(0)+\bar{k}_1^w\varphi_i^w(1)\varphi_j^w(1)+\bar{k}_0^\theta[\varphi_i^w(0)]'[\varphi_j^w(0)]'+\bar{k}_1^\theta[\varphi_i^w(1)]'[\varphi_j^w(1)]'$

式(14)中质量矩阵具体的表达式如下

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{aa}=\int_0^1[\rho_sH_sR_s(\varphi_{ij}^u(\xi)\varphi_{ij}^u(\xi))+\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}(\varphi_{ij}^u(\xi)\varphi_{ij}^u(\xi))]\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{ad}=\int_0^1[\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}\varphi_{ij}^u(\xi)\varphi_{ij}^u(\xi)]\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{bb}=\int_0^1\left[\rho_sH_sR_s(\varphi_{ij}^v(\xi)\varphi_{ij}^v(\xi))+\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}\left(\frac{1}{2}+\frac{H_s}{4R_s}\right)^2(\varphi_{ij}^u(\xi)\varphi_{ij}^u(\xi))\right]\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{be}=\frac{\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}}{2}\int_0^1[\varphi_{ij}^v(\xi)\varphi_{ij}^v(\xi)]\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm{ee}}=\int_0^1[\rho_sH_sR_s\varphi_{ij}^w\varphi_{ij}^w+\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}\varphi_{ij}^w\varphi_{ij}^w+\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}\varphi_{ij}^w\varphi_{ij}^w]\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm{ee}}=\int_0^1\left[\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}\left(\frac{1}{4}+\frac{H_{\mathrm{c}}^2}{16R_{\mathrm{c}}^2}-\frac{H_{\mathrm{c}}}{4R_{\mathrm{c}}}\right)\varphi_{ij}^v\varphi_{ij}^v+\rho_{\mathrm{f}}H_{\mathrm{f}}R_{\mathrm{f}}\varphi_{ij}^v\varphi_{ij}^v\right]\mathrm{d}\xi$$

(编辑:张 雪)