

采用二维贝叶斯方法求解旋转盘腔 导热反问题

杨 阳¹, 曹 楠¹, 陈 航¹, 罗 翔^{2,3}

- (1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 102206;
2. 北京航空航天大学 航空发动机研究院, 北京 102206;
3. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 102206)

摘 要: 为了研究压气机旋转盘腔换热特性, 实现准确求解转盘表面传热系数, 引入二维贝叶斯方法, 此方法采用先验分布优化测温误差, 并且更加符合转盘的二维特性。通过加入噪声的模拟数据验证方法的可行性, 结果表明无测温误差时方法的平均误差是 3.2%, 有测温误差时方法的平均误差是 10.6%, 并分析了误差来源。通过与已有实验结果对比, 发现方法更适用于计算转盘迎风面与背风面传热差异较大时的表面传热系数, 平均相对误差为 9.6%, 满足实际工程精度的要求。通过改变盘面温度测点数量, 发现测点增加会提升计算精度, 并采用统计抽样理论分析原因, 发现在可接受误差为 10% 时, 所需要的测点数量比较合理。

关 键 词: 热传导反问题; 表面传热系数; 旋转盘腔; 贝叶斯方法; 统计抽样

中图分类号: V231.1

文献标志码: A

Use two-dimensional Bayesian method to solve inverse heat conduction problem for rotating disc cavity

YANG Yang¹, CAO Nan¹, CHEN Hang¹, LUO Xiang^{2,3}

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 102206, China;

2. Research Institute of Aero-Engine,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 102206, China;

3. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 102206, China)

Abstract: In order to study the heat transfer characteristics of compressor rotating disc cavity, and calculate the surface heat transfer coefficient on rotating disc accurately, a two-dimensional Bayesian method was introduced. Using prior distribution to optimize temperature measurement error, this method agreed well with the two-dimensional characteristics of rotating disc. Using simulation data with noise to verify the feasibility of method, the results showed that the average error without temperature measurement error was 3.2% and the average error with temperature measurement error was 10.6%. The error source was analyzed too. By comparing with existing experimental data, results showed that the method was more suitable for calculating surface heat transfer coefficient when the windward and leeward surfaces had a large difference in heat transfer. The average relative error was 9.6%, meet-

收稿日期: 2020-05-27

基金项目: 国家科技重大专项(2017-III-0011-0037); 国家自然科学基金重大项目(61890923)

作者简介: 杨阳(1995—), 男, 硕士生, 研究方向为航空发动机盘腔流动与换热分析。E-mail: yangyang1@buaa.edu.cn

引用格式: 杨阳, 曹楠, 陈航, 等. 采用二维贝叶斯方法求解旋转盘腔导热反问题[J]. 航空动力学报, 2020, 35(12): 2562-2572.

YANG Yang, CAO Nan, CHEN Hang, et al. Use two-dimensional Bayesian method to solve inverse heat conduction problem for rotating disc cavity[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(12): 2562-2572.

ing actual engineering accuracy requirements. By changing the number of temperature measurement points on disc surface, it was found that the increase in measurement points could improve calculation accuracy, and the statistical sampling theory was used to analyze the phenomenon. It was found that when the acceptable error was 10%, the number of measuring points required was reasonable.

Key words: inverse heat conduction problem; surface heat transfer coefficient; rotating disc cavity; Bayesian method; statistical sampling

在航空发动机的二次空气系统中,冷却气体通常从前级压气机适当的位置引出并对涡轮盘与叶片等热端部件进行冷却以及封严。在流动过程中会经过高压压气机各级旋转腔,部分气体会流入腔中并与转盘与盘罩发生换热,因此压气机旋转腔内换热会直接影响整个空气系统的冷却效果。为了更准确地得到转盘及腔内(简称盘腔)的温度和热应力等物理量的分布以及对盘腔以及发动机进行更合理的冷却设计,对压气机旋转盘腔的换热特性的研究逐渐受到重视,其中盘面的努塞尔数(表面传热系数)是换热特性中最重要的研究参数之一^[1-5]。

关于通过测量盘面温度从而获得盘面表面传热系数的研究开始于 20 世纪 60 年代,目前主要采用的测量与计算方法主要包括以下两类:第一类方法是直接求解导热微分方程。Owen、Farthing、蔡旭等^[6-8]对湍流状态下的下游加热盘进行了换热特性的实验研究。在实验中,使用加热丝对转盘进行加热并使用热电偶测量转盘面温度,通过直接求解导热微分方程计算热流从而得到表面传热系数,该方法使用简便,同时最符合物理意义,但是它忽视了不定性的影响,因为热流是温度的一阶导数,温度测量误差在反问题计算过程中会被放大^[9]。此外,Owen 等^[10-11]通过推导二维形式导热微分方程,得出理论形式上的直接求解算法,不过这个算法局限于转盘温度关于中心对称,也就是说迎风面和背风面温度相同。

第二类方法是迭代求解法,其主要思路是将被测温度作为目标函数,迭代计算表面传热系数使相应的温度场最接近被测温度,研究方向集中在迭代计算的算法改进上。端维伟、Cu 等^[12-13]对 Levenberg-Marquard 算法(LM 方法)进行了一定的改进,采用复变量矩阵作为灵敏度矩阵,但是以被测温度作为目标函数就难以避免测温误差,实际工程中转盘高速旋转,测温误差较大。Tang 等^[14]提出运用贝叶斯统计对反问题求解,贝叶斯统计与经典热传导反问题方法(LM 方法)相比,

在迭代中增加了先验分布项,有助于平滑测温误差,较好地解决了不定性的影响^[15]。

但是 Tang 等^[14]将盘腔模型简化为一维模型,此时转盘被视作一个环形肋片,只考虑径向温度分布。在真实情况中,虽然转盘由于其厚度较薄,迎风面和背风面的温度差异较小,但是转盘两侧流场结构一定有极大的区别。根据以往的研究表明迎风面受冷气冲击影响比较强烈,而背风面是由已经冷却过迎风面的冷气来冷却,热流大小以及表面传热系数必然不一样^[4,6]。因此将转盘简化为一维模型存在一定的缺陷,无法准确地研究转盘的换热特性。针对上述研究的缺陷,本文在一维贝叶斯方法的基础上,将原一维环形肋片问题拓展为二维圆盘问题,增加了轴向上的温度差异,探究二维贝叶斯方法计算表面传热系数的可行性。

1 物理模型与算法介绍

1.1 物理模型与正问题求解

典型的航空发动机高压压气机盘腔模型的径向-轴向二维截面如图 1 所示。实际中转盘的壁厚

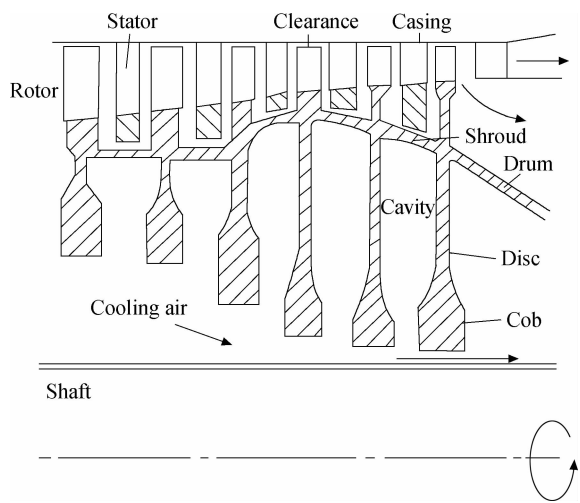


图 1 高压压气机盘腔模型示意图^[14]
Fig. 1 Schematic diagram of high-pressure compressor disc cavity model^[14]

很薄,同时转速极高,所以可简化为周向温度分布均匀,因此只需要研究柱坐标系下径向-轴向(r - z)二维截面的传热规律即可^[16-17]。本文取图 1 中转盘(disc)部分为研究对象,为了便于研究,将转盘简化为等厚度的模型,即忽略下方榫头(cob)结构。

简化后模型如图 2 所示,对于圆盘区域($0.1\text{ m}\leq r\leq 0.35\text{ m}, 0\text{ m}\leq z\leq 0.05\text{ m}$)内的柱坐标系下的无源项、稳态导热问题,其控制方程为

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \tag{1}$$

选用边界条件为

$$\text{B1: } -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = h_1(T - T_{\text{fluid}}), z = 0\text{ m} \tag{2}$$

$$\text{B2: } -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = h_r(T - T_{\text{fluid}}), z = 0.05\text{ m} \tag{3}$$

$$\text{B3: } T = f(z), r = 0.1\text{ m} \tag{4}$$

$$\text{B4: } T = f(z), r = 0.35\text{ m} \tag{5}$$

式中 κ 为导热系数; T 为转盘表面温度; T_{fluid} 为环境温度; h_1, h_r 分别为迎风面 B1、背风面 B2(下文简称左侧、右侧)上的表面传热系数; $f(z)$ 为边界 B3、B4 上的温度分布。

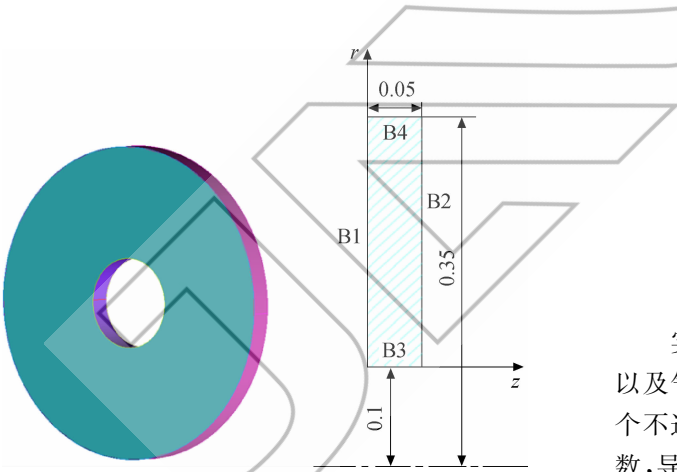


图 2 简化后模型(单位:m)
Fig. 2 Simplified model (unit:m)

利用有限差分法将圆盘区域离散为 $M \times N$ 个网格,离散后式(1)变为

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{T_{m+1,n} - T_{m-1,n}}{2\Delta r} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta z^2} = 0 \tag{6}$$

在定解条件也就是边界条件确定情况下求解式(6),可以得到各节点处的温度 $T_{m,n}$ ($m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N$),这个过程即是正问题

求解。

1.2 反问题求解与贝叶斯方法

热传导反问题(inverse heat conduction problems)^[18]是指根据测量数据反推边界条件或物理参数,本文中的反问题指已知左右盘面的温度分布和上下盘面的边界条件,反推左右盘面的表面传热系数。前人所研究的传统热传导反问题(LM 方法)^[12-13]步骤如图 3 所示,其中残差 $S(h_1, h_2, \dots,$

$$h_N) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_1^M [T_m^{\text{measure}} - T_m(h_1, h_2, \dots, h_N)]^2}$$

收敛条件为 $S \leq 10^{-4}$ 。

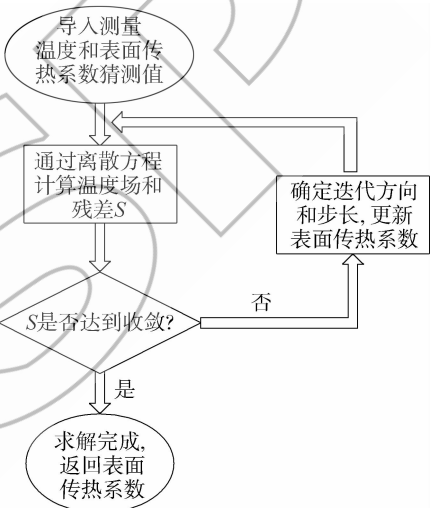


图 3 采用 LM 方法的反问题流程图
Fig. 3 Flow chart of inverse problem using LM method

实际情况中盘面导热、盘面向冷却气体传热以及气体对流换热同时发生且相互影响,构成一个不适定的强共轭问题^[17],并且热流是温度的导数,导致所测温度误差会极大地影响所推导表面传热系数的准确性。而 LM 方法并未对测温误差作处理,会导致较大的计算误差^[19]。

为了解决此问题和减小测温误差影响,本文采用贝叶斯方法解决此问题,它的基本原理是将未知参数(表面传热系数 h)的先验信息和由样本信息(通过热电偶所测的温度值)所导出的似然函数相结合,从而得出后验分布函数,然后根据后验概率去推断未知参数。因为采用先验分布辅助方法计算而不是只对所测实验温度进行迭代逼近,贝叶斯统计可以平滑所测温度误差的影响,较好解决不适定性^[20-21]。由图 4 可知,其相比于 LM 方法的主要改变就是加入了先验分布。其中残差

S_1 与图 3 中 S 属于同一类型,对应式(10)中的

$$\exp\left\{-\frac{\sum_{n=2}^M[\Theta_n - \theta(h)_n]^T[\Theta_n - \theta(h)_n]}{2\epsilon^2}\right\},$$

式中 Θ 为温度测量值, θ 为过余温度, ϵ 为温度误差; S_2 对应式(10)中的 $\exp\left(-\frac{1}{2}h^T C^{-1}h\right)$ 。

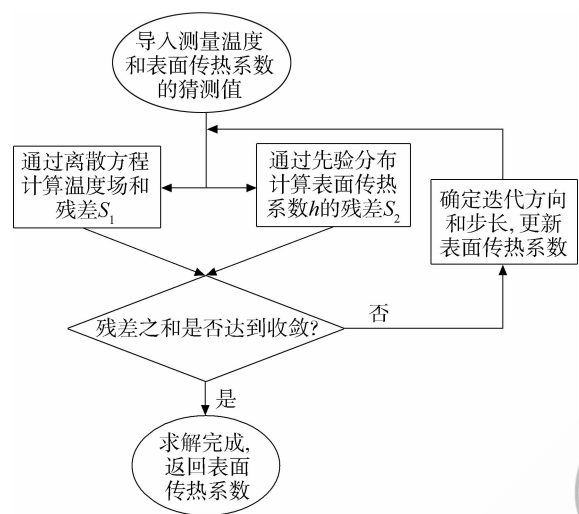


图 4 采用贝叶斯方法的反问题流程图

Fig. 4 Flow chart of inverse problem using Bayesian method

下面简单介绍贝叶斯方法有关公式的推导,其中加粗黑体代表具有方向性的矢量(二维性),采用过余温度 θ 代替 T , 根据条件概率公式(式(7))可以根据先验分布 $P(h)$ 和似然函数 $P(\theta|h)$ 求解后验分布 $P(h|\theta)$ 。

先验分布 $P(h)$ 相当于对 h 的猜测, 根据已有理论基础采用 Matern 类协方差多维正态分布^[22-23], 其广泛用于空间统计, 可以确定协方差矩阵 C 中的参数 $q=2, R$ 为转盘外径, 表达式如式(8)、式(9): 似然函数 $P(\theta|h)$ 如式(10)所示是指在给定 h 条件下温度 θ 的概率密度分布^[24], 理想情况下已知 h , 通过导热微分方程求解可以得到相应的真实值 θ , 但是因为存在测温误差, 测量值 Θ 很可能不等于真实值, 而是围绕真实值上下波动, 但反问题还是以测量值 Θ 为基准进行计算的。其中 $\theta(h)$ 表示以表面传热系数为自变量, 通过微分方程求出来的温度场。

经过上面的分析, 已经得到了 $P(h)$ 和 $P(\theta|h)$, 根据式(7)~式(10), 可以得到式(11) $P(h|\theta)$, 式中 σ^2 为方差, K 为第二类修正贝塞尔函数, $\Gamma(q)$ 为 gamma 函数。当后验分布 $P(h|\theta)$ 取最大值(最大后验概率分布)时, 对应的 h 就是贝叶斯方法所求解出来的 h 。

$$P(h|\theta) \propto P(h) \cdot P(\theta|h)$$
 (7)

$$P(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+1)}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}h^T C^{-1}h\right)$$
 (8)

$$C(x_m, x_n) = \frac{\sigma^2}{2^{q-1}\Gamma(q)} \left(\frac{|x_m - x_n|}{L}\right)^q K\left(\frac{|x_n - x_m|}{L}\right)$$
 (9)

$$P(\theta|h) = \frac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{M/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=2}^M[\Theta_n - \theta(h)_n]^T[\Theta_n - \theta(h)_n]}{2\epsilon^2}\right\}$$
 (10)

$$P(h|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+1)}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}h^T C^{-1}h\right) \cdot \frac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{M/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{n=2}^M[\Theta_n - \theta(h)_n]^T[\Theta_n - \theta(h)_n]}{2\epsilon^2}\right\}$$
 (11)

2 结果及分析

2.1 计算工况简介

本文设置了两组计算工况, 第一组工况采用人为设定的模拟数据进行计算和验证, 同时与 LM 方法计算结果对比, 计算模型如图 2 所示, z 方向节点数为 5, r 方向节点数为 35, 流体温度为 288 K, 边界条件分别为

B1: $-\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = h_1(T - T_{\text{fluid}})$
 $h_1 = 200(r/R)^3$ (12)

B2: $-\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = h_r(T - T_{\text{fluid}})$
 $h_r = 300(r/R)^2$ (13)

B3: $T = 300 \text{ K}$ (14)

B4: $T = 400 \text{ K}$ (15)

通过正问题有限差分法计算的左右侧(B1, B2)温度曲线和温度云图(图 5、图 6), 将计算出

的左右侧温度和作为边界条件的上下侧温度代入反问题中计算,图中 r/R 为无量纲径向距离。

因为实际工程中热电偶测量温度会有一定误差,给 B1 和 B2 的温度加上误差 ϵ ,视其为模拟的实验温度。此处温度误差 ϵ 为均值为 0,标准差

为 0.3 的正态分布随机数,因为大部分实验研究中的测温误差大约是 0.3 K,也就是标准差为 0.3^[9],那么加上误差后的左右侧温度为 $T+\epsilon$ 。

第二组工况采用 Atkins^[25] 的实验数据第 3a、3b 组,因为能与一维贝叶斯方法的结果进行对比^[14],实验装置见图 7,metal thermocouple 就是温度测点。本文忽略下方棒头和上方盘罩的温度测点,只研究迎风面和背风面的温度测点,实验数据如图 8 所示。

2.2 数值模拟数据计算结果及分析

图 9、图 10 为采用文中第 2.1 节数值计算工况的计算结果。图中“Bayesian”指不加入测温误差时二维贝叶斯方法的计算结果,“True”指初始设定的表面传热系数,视作真实值。可以看出计算结果与真实值非常接近,因为低半径处表面传热系数接近于零,采用平均绝对误差除以表面传热系数平均值作为相对误差,B1 和 B2 的平均相对误差为 3.2%。

图 9、图 10 中的“LM”为 LM 方法的计算结果,其平均误差为 27.8%。LM 方法计算步骤如图 3 所示,第 $p+1$ 次 k 位置处的迭代计算 $h_k^{p+1} = h_k^p + \delta^p$, δ^p 是迭代步长,公式如下,其中 J 表示雅可比矩阵, μ 是阻尼因子,diag 表示矩阵对角线元素, T^* 表示测量温度:

$$\delta^p = \frac{J^T [T_i^* - T_i(p)]}{[J^T J + \mu \text{diag}(J^T J)]} \quad (16)$$

图 9、图 10 中“Bayesian with deviation”指在加入测温误差时二维贝叶斯方法的计算结果,此时 B1 和 B2 的平均相对误差为 10.6%。计算结果在低半径处较好地符合真实值,在高半径处偏差较大,这是因为真实 h 值在高半径处上升较快,相应的温度测量误差导致 h 值误差也会较大。

此外,加入误差后 LM 方法结果在高半径和低半径处与真实的表面传热系数相差很大,这是热传导反问题的不适定性造成的。热流是温度的导数,微小的测温误差会极大影响求导结果,导致计算结果误差很大。对比说明贝叶斯方法可以较好解决热传导反问题中的不适定性问题。

为了定量分析传热误差 $\xi = h_{\text{true}} - h_{\text{compute}}$,对式(11)求对数,此处采用 T 代替过余温度 θ ,并且忽略与 h 无关的项,可以得到

$$F(h|T) = -\frac{1}{2} h^T C^{-1} h - \frac{[T - T(h)]^T [T - T(h)]}{2\epsilon^2} \quad (17)$$

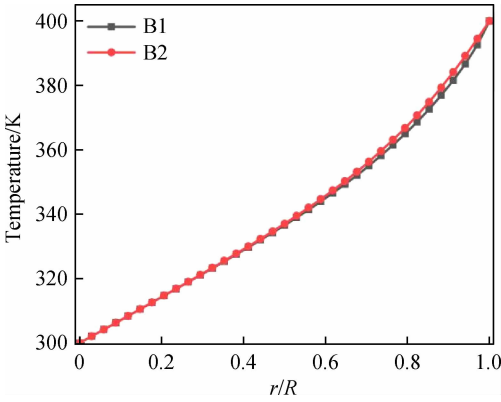


图 5 正问题计算出的 B1、B2 温度

Fig. 5 B1 and B2 temperature calculated by positive problem

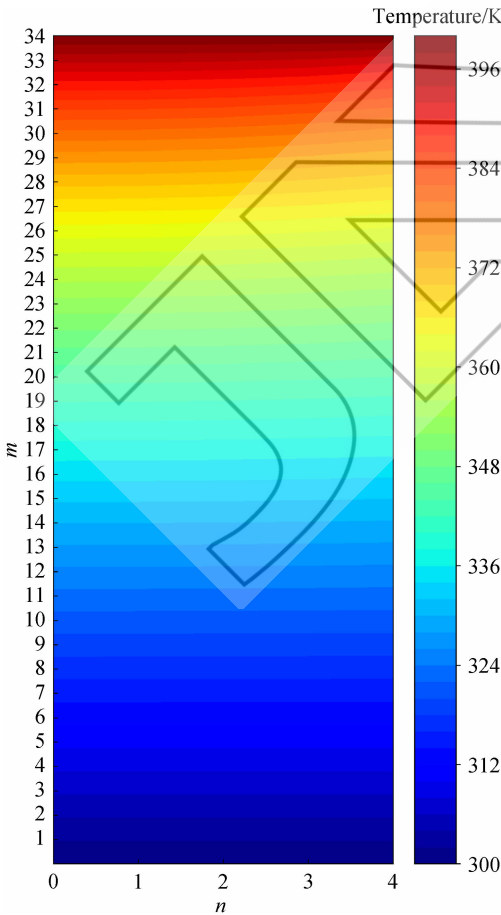


图 6 正问题计算出的温度云图

Fig. 6 Temperature cloud calculated by positive problem

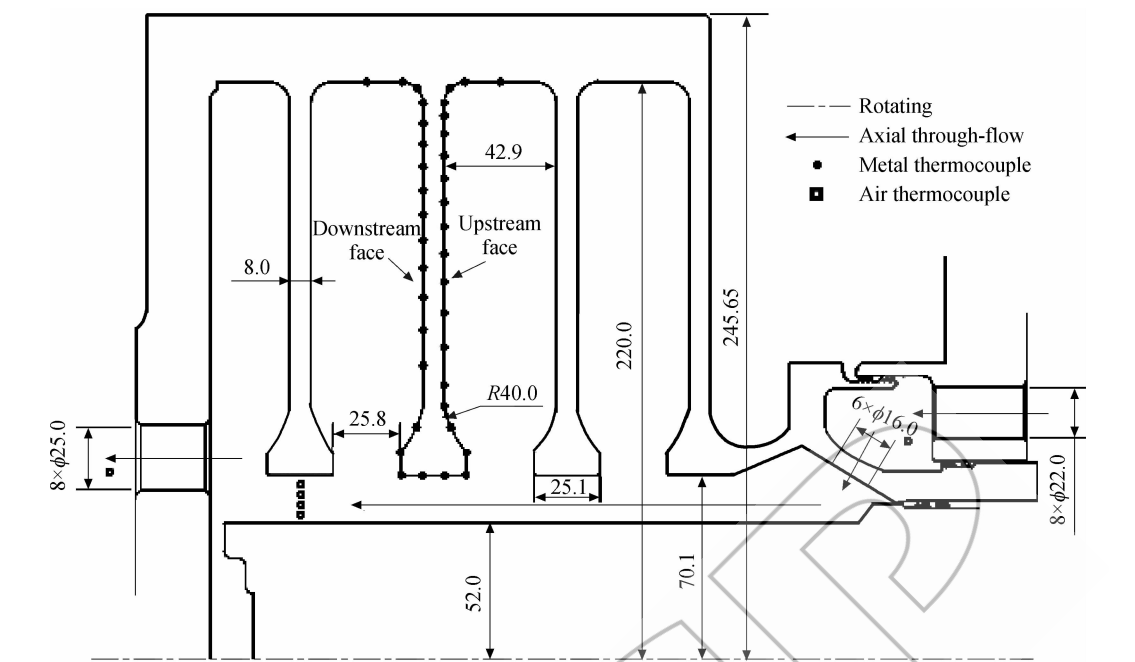


图 7 实验装置示意图^[25] (单位:mm)
Fig. 7 Experimental apparatus schematic^[25] (unit:mm)

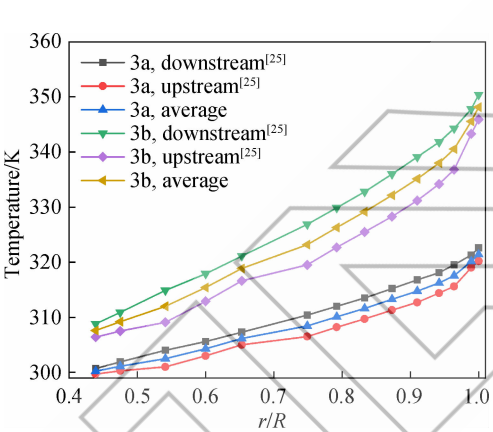


图 8 文献[25]的实验数据
Fig. 8 Experimental data of Ref. [25]

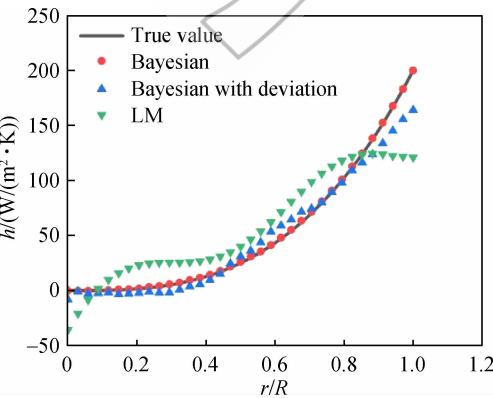


图 9 B1 计算结果
Fig. 9 Calculation results of B1

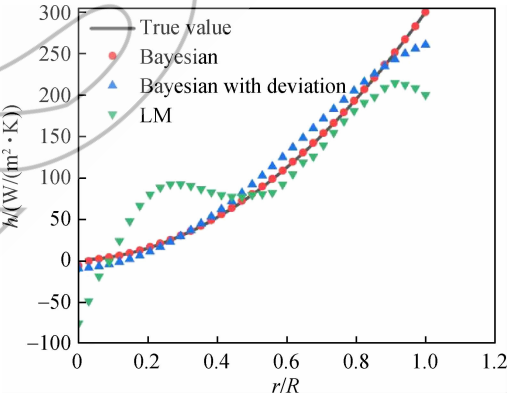


图 10 B2 计算结果
Fig. 10 Calculation results of B2

对于 $-\frac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{h}$,它代表图 4 中残差项 S_2 ,其中 $\mathbf{C}$ 是文中第 1.2 节中先验分布的协方差矩阵,也就是式(9)中的 $\mathbf{C}$ 。

对于 $\frac{[\mathbf{T}-\mathbf{T}(\mathbf{h})]^T[\mathbf{T}-\mathbf{T}(\mathbf{h})]}{2\epsilon^2}$,它代表图 4 中残差项 S_1 ,运用雅可比矩阵来分析它。雅可比矩阵定义见式(18)、式(19), I 行 J 列的雅可比矩阵 $J_{i,j}$ 中,第 i 行第 j 列的元素代表 i 处的温度变量 $\mathbf{T}$ 关于 j 处的表面传热系数 $\mathbf{h}$ 的一阶偏导数,采用中心差分近似求导数。计算出来的雅可比矩阵的大小是 35×35 ,为了方便分析,只取 6×6 的矩阵。

如果只考虑误差影响,误差项 ξ 可认为是正比于式(17)的等号右边项,见式(20)。对于

$-\frac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{h}$ 忽略 $\mathbf{h}^T$ 和 $\mathbf{h}$, 并且用雅可比矩阵 $\mathbf{J}$ 代替 $\mathbf{T}-\mathbf{T}(\mathbf{h})$, 再将负数转化为倒数^[14], 式 (20) 右端变为式 (21), 此时 $\left(\mathbf{C}^{-1}+\frac{\mathbf{J}^T\mathbf{J}}{\epsilon^2}\right)^{-1}$ 就代表贝叶斯方法中的误差分布, 见表 1。

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{h})=\begin{bmatrix}\frac{\partial\mathbf{T}_1^T}{\partial H_1}&\frac{\partial\mathbf{T}_1^T}{\partial H_2}&\cdots&\frac{\partial\mathbf{T}_1^T}{\partial H_J}\\\frac{\partial\mathbf{T}_2^T}{\partial H_1}&\frac{\partial\mathbf{T}_2^T}{\partial H_2}&\cdots&\frac{\partial\mathbf{T}_2^T}{\partial H_J}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial\mathbf{T}_l^T}{\partial H_1}&\frac{\partial\mathbf{T}_l^T}{\partial H_2}&\cdots&\frac{\partial\mathbf{T}_l^T}{\partial H_J}\end{bmatrix}\quad(18)$$

$$\mathbf{J}_{i,j}=\frac{\partial T_i}{\partial h_j}=\frac{\mathbf{T}(h_{i+1})-\mathbf{T}(h_{i-1})}{h_{j+1}-h_{j-1}}\quad(19)$$

$$\xi\propto-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}-\frac{\mathbf{J}^T\mathbf{J}}{2\epsilon^2}\quad(20)$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}-\frac{\mathbf{J}^T\mathbf{J}}{2\epsilon^2}\propto\left(\mathbf{C}^{-1}+\frac{\mathbf{J}^T\mathbf{J}}{\epsilon^2}\right)^{-1}\quad(21)$$

表 1 中 I 行和 J 列分布代表一维情况下的空间坐标, 第 i 行第 j 列的元素近似于代表 j 处的

表面传热系数 $\mathbf{h}$ 关于 i 处的测温误差 ϵ 的导数。从表 1 可以看到对角线上的元素最大, 这因为在某个位置的表面传热系数计算结果会最大程度地受到同一位置的测温误差的影响, 这是符合物理原理的。然后在对角线上头尾 ($i=1, j=1$ 以及 $i=6, j=6$) 处值最大, 表明低半径和高半径处表面传热系数受到测温误差的影响最大, 所以在同样的测温误差情况下, 低半径和高半径处的表面传热系数计算结果更偏离真实值, 这与图 (9)、图 (10) 是对应的。

类比地分析 LM 方法的误差, 此方法中只包含残差项 $S_1=\frac{[\mathbf{T}-\mathbf{T}(\mathbf{h})]^T[\mathbf{T}-\mathbf{T}(\mathbf{h})]}{2\epsilon^2}$, 相应的 $\xi\propto\left(\frac{\mathbf{J}^T\mathbf{J}}{\epsilon^2}\right)^{-1}$, 计算结果见表 2。可以看出 LM 方法的对角线上的误差量级明显比贝叶斯方法大, 这是因为贝叶斯方法引入了先验分布平滑了误差项。同时 LM 方法的误差也是对角线上最大, 然后在对角线上头尾 ($i=1, j=1$ 以及 $i=6, j=6$) 处值最大, 这也与图 (9)、图 (10) 是对应的。

表 1 贝叶斯法误差分布矩阵

Table 1 Error analysis matrix by Bayesian method

<i>i</i>	<i>j</i> =1	<i>j</i> =2	<i>j</i> =3	<i>j</i> =4	<i>j</i> =5	<i>j</i> =6
1	1.6×10 ⁻⁶	-2×10 ⁻⁷	-3.6×10 ⁻⁷	1.5×10 ⁻⁷	-3.9×10 ⁻⁸	-2.8×10 ⁻⁹
2	-2×10 ⁻⁷	6.7×10 ⁻⁷	-1.1×10 ⁻⁷	-9.9×10 ⁻⁹	7.9×10 ⁻⁹	6.2×10 ⁻¹⁰
3	-3.6×10 ⁻⁷	-1.1×10 ⁻⁷	3.5×10 ⁻⁷	-8.6×10 ⁻⁸	7.2×10 ⁻⁹	-9.1×10 ⁻¹¹
4	1.5×10 ⁻⁷	-9.9×10 ⁻⁹	-8.6×10 ⁻⁸	2.3×10 ⁻⁷	-6.8×10 ⁻⁸	-2.5×10 ⁻⁹
5	-3.9×10 ⁻⁸	7.9×10 ⁻⁹	7.2×10 ⁻⁹	-6.8×10 ⁻⁸	1.7×10 ⁻⁶	1.3×10 ⁻⁸
6	-2.8×10 ⁻⁹	6.2×10 ⁻¹⁰	-9.1×10 ⁻¹¹	-2.5×10 ⁻⁹	1.3×10 ⁻⁸	2.4×10 ⁻⁵

表 2 LM 方法误差分布矩阵

Table 2 Error analysis matrix by LM method

<i>i</i>	<i>j</i> =1	<i>j</i> =2	<i>j</i> =3	<i>j</i> =4	<i>j</i> =5	<i>j</i> =6
1	0.002	4.5×10 ⁻⁸	1.9×10 ⁻⁹	5.8×10 ⁻¹¹	1.5×10 ⁻¹²	4.2×10 ⁻¹⁴
2	4.5×10 ⁻⁸	7.3×10 ⁻⁵	2.7×10 ⁻⁸	1.2×10 ⁻⁹	3.5×10 ⁻¹¹	4.3×10 ⁻¹⁴
3	1.9×10 ⁻⁹	2.7×10 ⁻⁸	3.5×10 ⁻⁵	1.5×10 ⁻⁸	6.4×10 ⁻¹⁰	4.9×10 ⁻¹³
4	5.8×10 ⁻¹¹	1.2×10 ⁻⁹	1.5×10 ⁻⁸	1.3×10 ⁻⁴	8.6×10 ⁻⁹	1.1×10 ⁻¹¹
5	1.5×10 ⁻¹²	3.5×10 ⁻¹¹	6.4×10 ⁻¹⁰	8.6×10 ⁻⁹	2×10 ⁻⁴	2.3×10 ⁻¹⁰
6	4.2×10 ⁻¹⁴	4.3×10 ⁻¹⁴	4.9×10 ⁻¹³	1.1×10 ⁻¹¹	2.3×10 ⁻¹⁰	0.004

2.3 实验数据计算结果及分析

一维贝叶斯方法计算结果见图 11, 它是将迎风面和背风面的温度值进行算术平均处理, 用平

均温度作为测点温度进行计算, 从而简化为一维温度场问题。其中 Nu 是代表表面传热系数 h 的无量纲参数:

$$Nu = \frac{hr}{\kappa} \tag{22}$$

采用图 11 中同样的数据和设定条件,用二维贝叶斯方法计算,将结果中的迎风面与背风面的努塞尔数进行算术平均,结果见图 12。与图 11 中文献[14]中所用一维贝叶斯方法相对比,二维贝叶斯方法的结果偏大,这可能是因为二维情况误差更多,但总体比较符合,在左右侧盘面差距较大的情况下,二维贝叶斯方法可以有效地分别测量上游和下游的表面传热系数。

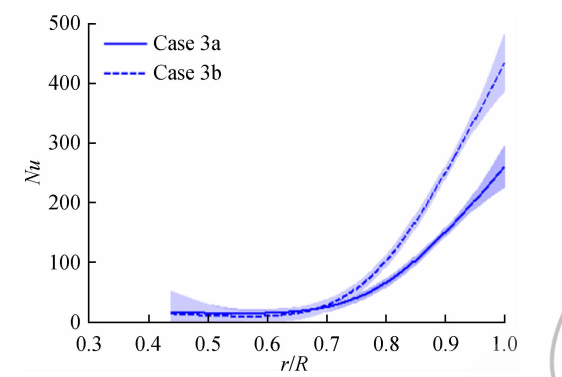


图 11 文献[14]中采用一维贝叶斯方法的计算结果
Fig. 11 Result of using one-dimensionai Bayesian method in Ref. [14]

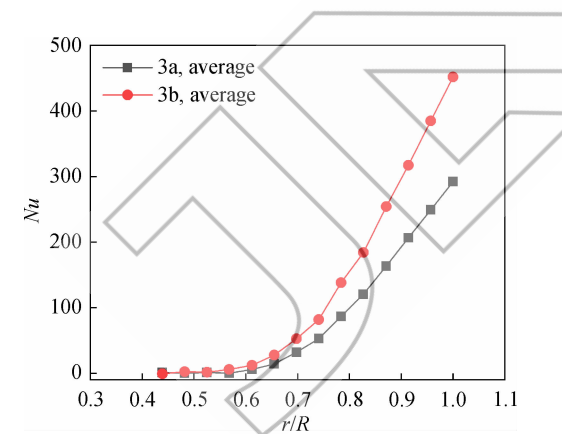


图 12 二维贝叶斯方法计算结果
Fig. 12 Result of using the two-dimensionai Bayesian method

为了量化分析二维贝叶斯方法和一维贝叶斯方法的区别,设计如式(23)~式(26)工况,其中左侧 B1 是对流换热边界条件,右侧 B2 是绝热边界条件,以便于分析两个侧面换热条件差别很大时二维方法结果。

$$\begin{aligned} \text{B1: } -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} &= h_1(T - T_{\text{fluid}}) \\ h_1 &= 200(r/R)^3 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\text{B2: } \kappa \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{24}$$

$$\text{B3: } T = 300 \text{ K} \tag{25}$$

$$\text{B4: } T = 400 \text{ K} \tag{26}$$

二维贝叶斯方法计算结果见图 13,在计算 B1 和 B2 都有计算结果偏大的现象,这是因为方法无法精确计算热流为零的情况,必然会偏向于有微小的热流,而壁面温度比流体温度高,表面传热系数也肯定是正数,所以 B2 处表面传热系数结果会是微小的正数而不是零,而另一侧的表面传热系数也会受到相应的影响。但是总体来说计算结果尚可,相比于一维贝叶斯方法,可见二维贝叶斯方法更适合于计算两侧盘面热流差别较大的情况。

因为表面传热系数在低半径处极小,采用绝对误差分析,见图 14,Δh 为表面传热系数绝对误差,其平均绝对误差为 9.8 W/(m²·K),如果除以 B1 处平均表面传热系数可得平均相对误差 9.8%,符合工程中对表面传热系数计算精度的要求[9]。

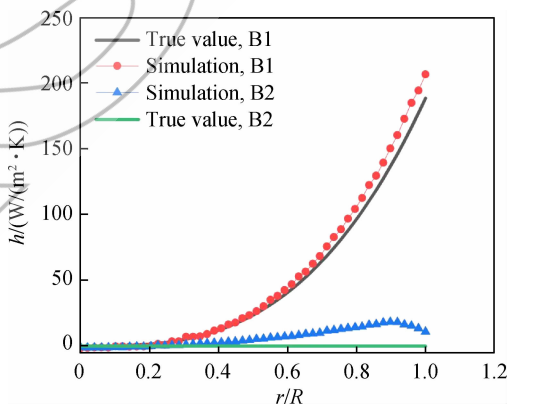


图 13 二维贝叶斯法计算结果(采用模拟工况)
Fig. 13 Result of using two-dimensional Bayesian method (simulation)

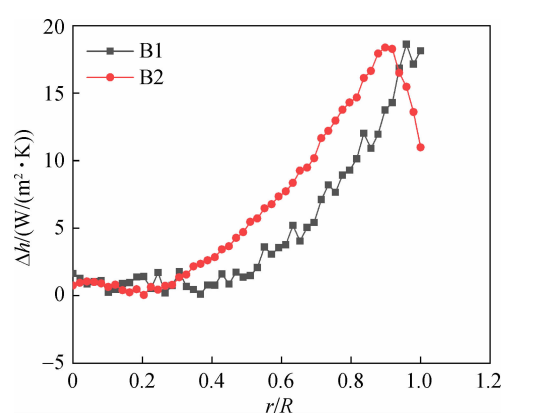


图 14 绝对误差
Fig. 14 Absolute error

2.4 温度测点数量的影响

不同于数值模拟,实验研究中温度测点数量有限。为了分析温度测点数量(N_m)的影响,采用文中第 2.1 节中数值模拟的工况,将 B1 测点数量设置成 5、15、25、35、45,其他条件不变,进行计算。

由图 15 可知,随着测点数量增加,计算结果逐渐趋向于真实值,25 个点已经足够接近真实值,和 35 个点的结果相差无几,再增加测点数量对结果改善并不大。可以引入数值计算中网格无关解进行分析,一般来说网格越密,结果越接近于真实值,计算结果之间的差别也会越来越小。

为了符合实际工程中的测温误差,加入误差后再分析测点数量的影响,由图 16 可以看出加入

误差后,测点数量偏少时(5 和 15 的情况)与真实值偏差很大,而测点数量增加后(25、35 和 45 的情况),虽然还是有相对于真实值的上下波动,但总体来说可以近似于真实值。这说明随着测点数量的增加,测温误差对计算结果的影响减小,计算精度增加。

为了分析加入误差后测点数量的影响,因为贝叶斯方法属于统计学,引入统计学中关于统计抽样的知识。统计抽样是指同时具备下列特征的抽样方法^[26]:①随机选取样本;②运用概率论评价样本结果。本文中测温热电偶不可避免地存在误差,可以近似为均值为真实值的正态分布,所以每次测量温度可近似为一次抽样得到的温度,因此满足特征一;之后采用贝叶斯方法进行处理,满足特征二。对于统计抽样存在样本容量^[27],公式如下:

$$n = \frac{Z^2 \sigma^2}{E^2}$$

(27)

其中 Z^2 为误差的置信水平,根据标准正态分布表^[28]可以得到不同置信度的 Z ; σ^2 为方差,也就是样本间的离散程度,本文中所加入的误差的标准差为 0.3,方差为 0.09; E 为可接受的抽样误差, E 越小,需要的样本容量越大,此处 E 分别取 5%、10%、15%,计算结果见表 3,此时样本容量就是满足置信度并且在可接受的抽样误差之内的所需要的测点数量。 $E=10\%$ 时,测点数量既符合工程中对表面传热系数计算精度的要求^[9],也不会数量太多,导致在实验中无法做到^[9]。

表 3 样本容量计算结果

Table 3 Calculation result of sample size

置信度	Z	样本容量		
		$E=5\%$	$E=10\%$	$E=15\%$
0.80	1.28	59	15	7
0.85	1.44	75	17	8
0.90	1.65	98	25	11
0.95	1.96	138	35	15

3 结 论

本文通过二维贝叶斯方法研究柱坐标系下的二维稳态导热反问题,以求解盘面表面传热系数,首先采用模拟数据验证此方法的可行性。没有测温误差时,计算结果与真实值非常接近,平均相对误差是 3.2%;有测温误差时,计算结果与真实值

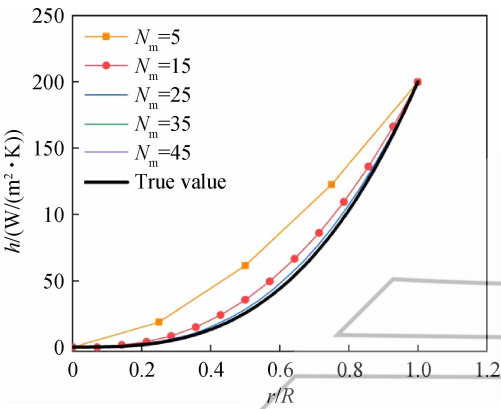


图 15 无测温误差时采用不同测点数量反求 B1 表面传热系数
Fig. 15 Reverse calculation of B1 surface heat transfer coefficient for different number of measuring points without temperature measurement error

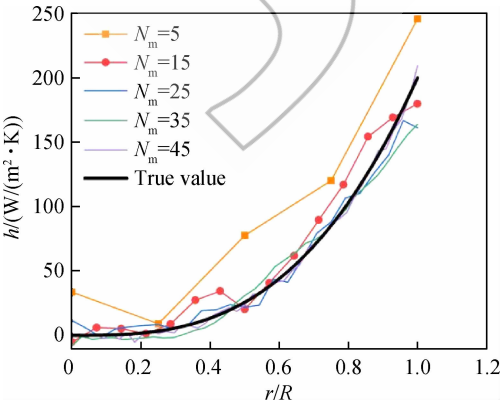


图 16 有测温误差时采用不同测点数量反求 B1 表面传热系数
Fig. 16 Reverse calculation of B1 surface heat transfer coefficient for different number of measuring points with temperature measurement error

比较接近,平均相对误差是 10.6%。与 LM 方法对比证明了此方法可以较好地消除反问题的不稳定性,并且分析了误差的来源和在空间位置的分布。

之后采用实际实验数据进行验证,二维贝叶斯方法的平均结果与论文中一维贝叶斯方法基本一致,而且相比于一维贝叶斯计算方法,它可以分别算出左右侧盘面表面传热系数,并且采用侧面换热边界条件差别很大的模拟工况进行测试。最后讨论了温度测点数量对计算结果的影响,发现随着测点数量增加,测温误差对计算结果的影响减小,通过样本容量来解释这个问题,发现在 $E=10\%$ 时,测点数量符合实际要求。

本文的计算方法是由贝叶斯一维方法所推广而来,它的优势在于左右两侧盘面温差较大或者换热差异较大时,可以计算得到更加准确的两侧表面传热系数,所以更加适用于实际的压气机和涡轮盘腔情况。

参考文献:

- [1] 杨世铭,陶文铨. 传热学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [2] 曹玉璋. 航空发动机传热学[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2005.
- [3] INCROPERA F P, DEWITT D P. Fundamentals of heat and mass transfer[M]. New York: Wiley, 2017.
- [4] 曹楠,窦志伟,罗翔,等. 轴向通流旋转盘腔换热特性[J]. 航空动力学报, 2018, 33(5): 1178-1185.
CAO Nan, DOU Zhiwei, LUO Xiang, et al. Heat transfer characteristics of rotating disk cavity with axial flow[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(5): 1178-1185. (in Chinese)
- [5] 田淑青,陶智,丁水汀,等. 轴向通流旋转盘腔内换热的数值模拟[J]. 航空动力学报, 2005, 20(4): 656-661.
TIAN Shuqing, TAO Zhi, DING Shuting, et al. Numerical simulation of heat transfer in a rotating disk cavity with axial flow through[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(4): 656-661. (in Chinese)
- [6] OWEN J M, BILIMORIA E D. Heat transfer in rotating cylindrical cavities[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2006, 19(4): 175-187.
- [7] OWEN J M, ONUR H S. Convective heat transfer in rotating cylindrical cavity[R]. ASME Paper 82-GT-151, 1982.
- [8] FARTHING P R, LONG C A, OWEN J M, et al. Rotating cavity with axial throughflow of cooling air; heat transfer[J]. Journal of Terbomachinery, 1992, 114(1): 229-236.
- [9] 蔡旭. 复杂进口条件下旋转盘腔流动和换热研究[D]. 北京:北京航空航天大学, 2014.
CAI Xu. Research on flow and heat transfer of rotating disc cavity under complex import conditions[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014. (in Chinese)
- [10] OWEN J M, ROGER R H. Flow and heat transfer in rotating disc systems; Vol. 2 rotating cavities[M]. Taunton, U K: Research Studies Press, 1995.
- [11] OWEN J M, PINCOMBE J R. Vortex breakdown in a rotating cylindrical cavity[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1979, 90(1): 109-127.
- [12] 端维伟. 求解瞬态非线性热传导反问题的改进 Levenberg-Marquardt 算法[D]. 辽宁 大连:大连理工大学, 2016.
DUAN Weiwei. Improved Levenberg-Marquardt algorithm for solving the inverse problem of transient nonlinear heat conduction [D]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology, 2016. (in Chinese)
- [13] CU M, DUAN W W, GAO X W. A new inverse analysis method based on a relaxation factor optimization for solving transition nonlinear inverse heat conduction problem [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015, 90: 491-498.
- [14] TANG H, SHARDLOW T, OWEN J M. Use of fin equation to calculate Nusselt numbers for rotating disks[J]. Journal of Turbomachinery, 2015, 137 (12): 121003. 1-121003. 10.
- [15] KAIPIO J P, FOX C. The Bayesian framework for inverse problems in heat transfer[J]. Heat Transfer Engineering, 2011, 32(9): 718-753.
- [16] FARTHING P R, LONG C A, OWEN J M, et al. Rotating cavity with axial through flow of cooling air; flow structure [J]. Journal of Turbomachinery, 1992, 114(1): 237-246.
- [17] ALEXIOU A, HILLS N, LONG C A, et al. Heat transfer in high-pressure compressor gas turbine internal air systems; a rotating disc-cone cavity with axial throughflow [J]. Experimental Heat Transfer, 2000, 13(4): 299-328.
- [18] 肖庭延,于慎根,王彦飞. 反问题的数值解法[M]. 北京:科学出版社, 2003.
- [19] KELLER J B. Inverse problems[J]. American Mathematical Monthly, 1976, 83(2): 107-118.
- [20] 王洪春. 贝叶斯公式与贝叶斯统计[J]. 重庆科技学院学报(自然科学版), 2010, 12(3): 203-205.
WANG Hongchun. Bayes formula and Bayes statistics[J]. Journal of Chongqing University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2010, 12(3): 203-205. (in Chinese)
- [21] DEBORAH G, MAYO. The error-statistical philosophy and the practice of Bayesian statistics: comments on Gelman and Shalizi; 'philosophy and the practice of Bayesian statistics' [J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 2013, 66(1): 57-64.
- [22] MATERN B. Spatial variation; stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations [J]. Meddelanden Från Statens Skogsforskningsinstitut, 1960, 49(5): 140-144.
- [23] STETIN M L. Interpolation of spatial data; some theory for kriging[J]. New York: Springer, 1999.

[24]

杨万才. 概率论与数理统计[M]. 北京:科学出版社,2009.

[25]

ATKINS N R, KANJIRAKKAD V. Flow in a rotating cavity with axial throughflow at engine representative conditions[R]. ASME Paper GT2014-27174,2014.

[26]

茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

[27]

汪晓洋. 小样本下可靠性试验方法与数据处理的研究[D]. 成都:电子科技大学,2012.

[28]

张福渊. 概率统计及随机过程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2012.

WANG Xiaoyang. Research on reliability test method and data processing under small sample[D]. Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2012. (in Chinese)

(编辑:李岩梅、陈 越)

