

基于径轴向 Tchebichef 矩函数三维曲面非对称结构的模型修正

张 浩, 臧朝平
(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 采用积分的思想,将曲面机匣看作由若干圆柱机匣积累而成,将曲面机匣振型数据插值到一个圆数 $\times$ 点数 $\times$ 层数的三维像素空间内,能够实现径轴向 Tchebichef 矩(RAT 矩)对曲面机匣模态振型的识别。利用 RAT 矩函数从曲面结构模态振型数据提取矩特征值,实现对振型数据的压缩,基于矩特征值的相关性分析能够很好地描述重模态现象,弥补了传统模态置信准则(MAC)值对于重模态描述的缺陷。进而将矩特征值代替振型数据,作为目标函数,应用于模型修正。矩特征值的数据量远小于振型数据,能够提高计算效率、避免修正结果不收敛。考虑到工程部件大多非完全轴对称,以一个带有非对称凸台的航空发动机机匣为例,基于 RAT 矩进行模态计算、相关分析和模型修正,发现同时利用频率与 RAT 矩进行模型修正,相关性有明显的提升,例如第 9 阶模态的相关性由 35.35%提升到 67.21%。各阶模态对的频差也都明显降低,最大频差由 14.56%降至 9.09%。证明了 RAT 矩函数能够应用在三维曲面非对称机匣的模型确认中。

关 键 词: 径轴向 Tchebichef 矩; 曲面机匣; 非对称结构; 重模态; 模态振型; 特征提取; 模型修正

中图分类号: V231 **文献标志码:** A

Model validation of three-dimensional curved asymmetric structure by radial axial Tchebichef moments

ZHANG Hao, ZANG Chaoping
(College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Using the idea of integral, the curved case was considered to be accumulated by a number of cylindrical cases. The mode shape data were interpolated into a three-dimensional pixel space of circle $\times$ points $\times$ layer, which can realize the identification of the mode shape of curved case by radial axial Tchebichef moment (RAT moment). The feature moment set was extracted from the mode shape data by using the RAT moment function to achieve compression of the mode shape data. Correlation analysis based on RAT moment can well describe the double modes phenomenon, which can make up for the defects of traditional modal assurance criteritiom (MAC) values for double modes description. The eigenvalue of the moment was used as the objective function instead of the mode data, which was applied to model verification. The data amount of the moment eigenvalue was much smaller than the mode shape data, which can improve the calculation efficiency and avoid the non-convergence of the updating result. Considering that most engineering components were not completely

收稿日期:2020-01-03
基金项目:国家自然科学基金(11372128)
作者简介:张浩(1996—),男,硕士生,主要从事模型修正方面的研究。

引用格式:张浩,臧朝平. 基于径轴向 Tchebichef 矩函数三维曲面非对称结构的模型修正[J]. 航空动力学报,2020,35(10):2205-2215. ZHANG Hao,ZANG Chaoping. Model validation of three-dimensional curved asymmetric structure by radial axial Tchebichef moments[J]. Journal of Aerospace Power,2020,35(10):2205-2215.

axisymmetric, an aero-engine casing with an asymmetric boss was taken as an example. Based on RAT moments for mode calculation, correlation analysis and model updating, it was found that both frequency and RAT moments were used for model verification. Correlation was significantly improved, for example, the correlation of the ninth-order mode was increased from 35.35% to 67.21%. The frequency difference of each mode pair was also significantly reduced, and the maximum frequency difference was reduced from 14.56% to 9.09%. It was proved that the RAT moment function can be used in the model confirmation of asymmetrical three-dimensional surface.

Key words: radial axial Tchebichef moments; curved cases; asymmetric structure; double modes; mode shape; feature extraction; model validation

矩函数是最常用的形状特征提取方法,最初矩函数主要应用在图像识别领域,随着研究的深入,在结构动力学领域矩函数也得到了广泛的应用。Hu^[1]最早提出了几何矩描述符,并将其一系列不变性应用在自动特征识别上,之后又延伸出了规则矩^[2]、旋转矩^[3]等几何矩。但几何矩不具有正交性,会造成信息的冗余。Teague^[4]提出了 Zernike 矩和 Legengre 矩这两个基于正交多项式的矩描述符,解决了几何矩造成信息冗余的问题,但由于一般都是通过数字计算进行图像处理,采用离散求和来模拟真实积分,上述两种矩函数都为连续积分形式,故在计算中存在较大的离散误差。随后 Mukundan 等^[5-7]提出了 Tchebichef 矩描述符的概念,Tchebichef 矩是离散的正交矩,既能够避免数据冗余,又能消除离散误差,Mukundan 等又在 Tchebichef 多项式的基础上添加周向三角函数,构造了径向 Tchebichef 多项式。

从振型图像中提取出的矩特征值保留了模态振型的特征信息,并实现了对振型数据的压缩。将矩特征值代替振型数据应用于模型修正中既能反应振型的变化,又能减少计算的数据量,并且矩函数的相关性分析相比于传统的模态置信准则能够更好地描述重模态现象,相关性分析能够得到有限元模型计算数据与试验数据相关的模态对,是后续模型修正工作的基础,也是模型确认理论中的关键步骤。因此进行基于矩函数的模型修正研究有着重要的意义。国外的 Wang 等^[8-11]最早将 Zernike 矩函数、Tchebichef 矩函数应用在动力学模型确认中,并完成了对二维矩形、圆形结构的振型描述与模型修正。在国内,臧朝平、刘银超、贾晴晴、姜丹丹等^[12-16]对 Zernike 矩函数、Tchebichef 矩函数到径向 Tchebichef 矩函数进行了深入研究,但是二维矩函数在处理三维结构时只能使用投影等降维的方式。这样不仅操作复

杂,还会造成几何信息的缺失。为了解决这个问题,曾亚未等^[17]使用了三维的径轴向 Tchebichef 矩函数(RAT 矩),但是 RAT 矩函数是定义在柱坐标下的矩函数,只能够描述三维圆柱结构的模态振型。针对这个问题,马健等^[18]采用了多项式拟合的方法:采用径向坐标 r 的多项式去拟合轴向坐标 z ,改进后的 RAT 矩函数可以描述简单的三维曲面机匣的模态振型,但该方法不具有通用性,针对不同曲面机匣需要分别进行多项式拟合,并且随着结构的复杂程度增加,拟合的难度也会增大。

本文采用积分的思想,将曲面机匣当作由若干圆柱机匣积累而成,将振型数据插值到一个圈数 $\times$ 点数 $\times$ 层数的像素空间内。这样就可以使用 RAT 矩函数直接描述三维曲面结构的模态振型,并且对于不同曲面结构的通用性更强。目前矩函数都是应用在轴对称结构上,考虑到工程上大部分结构并非完全轴对称,与轴对称结构中出现的重模态现象相比,局部非对称结构会存在近似模态,由于刚度非对称近似模态间的频率与振型都会有一些差异,因此需要研究如何使用 RAT 矩函数识别非对称结构的位置并且对该部位进行模型修正,使简化模型能够反映局部非对称结构的性质。因此,本文采用了一个曲面的局部非对称机匣结构,并利用 RAT 矩函数对其模型进行模态识别与模型确认。

1 基于矩函数的三维曲面结构模态振型描述与模型修正方法

1.1 基于矩函数的模态振型描述方法

若是把二维模态振型当做图像来处理,每个节点都看作像素点,将振型图看成是 $N \times N$ 的图像,在极坐标下可以用径向 Tchebichef 矩(RT 矩,记为 $\mathbf{R}_{pq}$)来描述振型。

$$\mathbf{R}_{pq} = \frac{1}{\rho(p, N/2)} \sum_{r=0}^{N/2-1} t_{p, N/2}(r) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} e^{-j \frac{2\pi q k}{n}} \psi(r, \vartheta) \quad (1)$$

式中 $t_{p, N/2}(r)$ 为 Tchebichef 多项式, $e^{-j \frac{2\pi q k}{n}}$ 是周向的三角函数, $\psi(r, \vartheta)$ 是代表模态振型函数。

$$t_{p, N/2}(r) = \frac{p!}{(N/2)} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \cdot \binom{N/2-1-k}{p-k} \binom{p+k}{p} \binom{r}{k} \quad (2)$$

$$\rho(p, N/2) = \sum_{r=0}^{N/2-1} [t_p(r)]^2 \quad (3)$$

当处理三维结构的模态振型时,将模态振型看成 $M \times N \times H$ 的图像,此时二维矩函数无法直接处理三维图像,需要构建一个三维矩函数。基于 RT 矩增加一个轴向的 Tchebichef 多项式,这样组建出一个建立在柱坐标下的三维矩函数:径轴向 Tchebichef 矩(RAT 矩),RAT 矩的表达式如式(4)。

$t_{p, m}(r)$ 为添加的轴向 Tchebichef 多项式, $e^{-j \frac{2\pi q k}{n}}$ 还是周向的三角函数, $f(r, k, z)$ 代表三维模态振型的函数。 p, q, l 分别为径向阶数、重数和轴向阶数, r, k, z 分别为径向、周向、轴向坐标。径轴向 Tchebichef 多项式的表达式为式(5)和式(6)。

$$\mathbf{R}_{pq}^l = \frac{1}{n \rho(p, m) \rho(l, h)} \sum_{z=0}^{h-1} \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} t_{l, h}(z) \cdot t_{p, m}(r) e^{-j \frac{2\pi q k}{n}} f(r, k, z) \quad (4)$$

$$t_{l, h}(z) = \frac{l!}{(h)^l} \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \cdot \binom{h-1-k}{l-k} \binom{l+k}{l} \binom{z}{k} \quad (5)$$

$$t_{p, m}(r) = \frac{p!}{(m)^p} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \cdot \binom{m-1-k}{p-k} \binom{p+k}{p} \binom{r}{k} \quad (6)$$

因为 RAT 矩函数是建立在柱坐标下的,因此只能描述圆柱结构的模态振型。本文采用积分的思想,将曲面机匣看成多个半径不同的圆柱机匣沿轴向组合而成,将节点按照轴向坐标 z 由小到大排序,求出每一点的半径,沿轴向布置 H 个像素点,沿径向布置 M 个像素点,沿周向布置 N 个像素点,即可以构建出一个 $M \times N \times H$ 的像素空间, M, N, H 的关系见式(7)、式(8)。将节点位移插值到该像素空间内,得到 $f(r, k, z)$, 带入式(4)即可从曲面结构的模态振型中提取出 RAT 特征矩集。通常模态分析是针对自由-自由状态下部件的各阶模态,但在实际问题中,边界条件及

其影响往往是复杂的,矩函数对模态振型的描述是基于模型各个节点的位移,对节点位移进行矩变换得到特征矩集,无论是何种边界条件下,处理的都是节点的位移值,因此该方法同样适用于结构具有复杂边界的情况。

$$H = \frac{h}{r_o - r_i} M \quad (7)$$

式中 h 为曲面机匣的高, r_o 与 r_i 分别为外径与内径。

$$N = 2\pi \frac{M r_o}{r_o - r_i} \quad (8)$$

矩函数对模态振型识别的原理是对振型数据进行矩变换,得到一系列的特征矩集,如式(9)。可以利用特征矩集对振型图像进行重构。

1.2 基于矩函数的模态振型重构方法

通过从振型图像提取出来的 RAT 特征矩集可以将振型图像重构,重构公式如下:

$$f(r, k, z) = \sum_{p=0}^{p_{\max}} \sum_{q=0}^{q_{\max}} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \mathbf{R}_{pq}^l t_{p, m}(r) t_{l, h}(z) e^{j \frac{2\pi q k}{n}} = \sum_{l=0}^{l_{\max}} t_{l, h}(z) \sum_{p=0}^{p_{\max}} t_{l, h}(z) \cdot \left[C_{p0}^l + 2 \sum_{q=1}^{q_{\max}/2} \left(C_{pq}^l \cos \frac{2\pi q k}{m} + S_{pq}^l \sin \frac{2\pi q k}{m} \right) \right] \quad (9)$$

式中 C_{pq}^l 和 S_{pq}^l 分别代表及函数的实部和虚部。

引入一个总体相似度系数(global similarity coefficients, GSC, 记为 C_{gs}) 来描述重构振型图与原始振型图的相似程度,表达式如下:

$$\zeta(I', I) = \frac{\iint_{\Omega} (I' - \bar{I}') (I - \bar{I}) dA}{\sqrt{\left[\iint_{\Omega} (I' - \bar{I}')^2 dA \right] \left[\iint_{\Omega} (I - \bar{I})^2 dA \right]}} \quad (10)$$

$$\bar{I}' = \frac{\int_{\Omega} I' dA}{\int_{\Omega} dA}, \quad \bar{I} = \frac{\int_{\Omega} I dA}{\int_{\Omega} dA}$$

式中 I', I 表示重构振型和原始振型, Ω 是振型数据的定义域范围, A 为振型图像的自变量。GSC 的表达式如式(11),表达的是最大重构阶次 $N_{\max} = i$ 时的每一阶模态重构振型与原始振型的总体相似度系数, $\zeta_{\text{mean}, i}$ 与 $\zeta_{\text{var}, i}$ 分别为各阶模态的重构振型图像与原始振型图像相似度的均值与方差。GSC 的取值在 $0 \sim 1$ 之间,数值越大则代表重构精度越高,数值越小则表示重构精度越低。

$$C_{gs}(i) = \frac{\zeta_{\text{mean}, i}}{1 + \zeta_{\text{var}, i}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

1.3 基于矩函数的相关性分析方法

在结构动力学领域常用的相关性分析方法是模态置信准则(modal assurance criterion, MAC), MAC 的值(记为 ϵ_{MAC})表达式见式(12),MAC 分析在处理重模态时存在明显的不足,在处理重模态现象时效果不佳,不能准确地匹配模态对。而使用具有旋转不变性的 RAT 矩便能很好地解决这个问题,参考模态置信准则的方法,RAT 矩的相关性判定采用 RATMAC,如式(13)所示

$$\epsilon_{\text{MAC}}(i,j)=\frac{|\{\boldsymbol{\varphi}_i^e\}^T\boldsymbol{\varphi}_j^a|^2}{(\{\boldsymbol{\varphi}_i^e\}^T\boldsymbol{\varphi}_i^e)(\{\boldsymbol{\varphi}_j^a\}^T\boldsymbol{\varphi}_j^a)} \quad (12)$$

式中 $\boldsymbol{\varphi}_i^e$ 为试验的第 i 阶模态振型向量, $\boldsymbol{\varphi}_j^a$ 为有限元计算第 j 阶模态振型的向量,T 表示转置。

$$\epsilon_{\text{RATMAC}}(i,j)=\frac{|\{\mathbf{R}_i^e\}^H\mathbf{R}_j^a|^2}{(\{\mathbf{R}_i^e\}^H\mathbf{R}_i^e)(\{\mathbf{R}_j^a\}^H\mathbf{R}_j^a)} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{R}_i^e$ 代表模态测试试验获得的第 i 阶模态对应的 RAT 特征矩集向量, $\mathbf{R}_j^a$ 代表有限元模型计算获得的第 j 阶模态对应的 RAT 特征矩集向量,H 表示共轭转置。与 MAC 一样,RATMAC 的值 ϵ_{RATMAC} 也是介于 0~1 范围内的数,值越大代表两阶模态相关性越高。与 MAC 值相比,在计算重模态相关性时,由于 RAT 矩的旋转不变性,RATMAC 值会比 MAC 值高很多。

1.4 基于矩函数的模型修正方法

1.4.1 灵敏度计算方法

可以通过将矩函数 D 对参数 θ 求导得到 D 对 θ 的灵敏度 S_D ,如式(14),用 $w(x,y,z,\theta)$ 表示结构的振动位移,其表达式为式(15), n_i 为自由度, $\pi_i(x,y,z)$ 是和 x,y,z 坐标有关的变量, q_i 是关于时间 t 的正弦函数, $\{\varphi_i\}$ 为振型特征向量。把式(16)带入式(15),得到式(17)。振型图像 $\mathbf{I}(x,y,z,\theta)$ 可以表示为式(18)。

$$S_D=\frac{\partial D}{\partial \theta}=$$

$$\frac{\partial \left[\int_{\Omega} \mathbf{R}_{pq}^l(x,y,z)\mathbf{I}(x,y,z,\theta)dx dy dz \right]}{\partial \theta} \quad (14)$$

$$w(x,y,z,\theta)=\sum_i^n \pi_i(x,y,z)q_i(\theta) \quad (15)$$

$$\{q_i\}=\{\varphi_i\}\sin(\omega t) \quad (16)$$

$$w(x,y,z,\theta)=\boldsymbol{\pi}^T(x,y,z)\boldsymbol{\varphi}(\theta)\sin(\omega t) \quad (17)$$

$$\mathbf{I}(x,y,z,\theta)=\boldsymbol{\pi}^T(x,y,z)\boldsymbol{\varphi}(\theta) \quad (18)$$

在直角坐标系下 RAT 矩函数的求解公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{pq}^l &= \frac{1}{n\rho(p,m)\rho(l,h)}\sum_{z=0}^{h-1}\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}t_{l,h}(z)t_{p,m}(r)\cdot \\ &\quad e^{-j\frac{2\pi qk}{n}}f(r,\theta_k,z)= \\ &\quad \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{z=1}^{N-1}\mathbf{U}_{pq}^l(x,y,z)\mathbf{I}(x,y,z,\theta) \end{aligned} \quad (19)$$

RAT 矩特征值对参数 θ 的灵敏度计算公式如式(20)。

$$S_R=\frac{\partial \mathbf{R}_{pq}^l}{\partial \theta}=\frac{\partial \left[\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{z=1}^{N-1}\mathbf{U}_{pq}^l(x,y,z)\mathbf{I}(x,y,z,\theta) \right]}{\partial \theta} \quad (20)$$

将式(19)带入式(20)可得

$$S_R=\frac{\partial \left[\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{z=1}^{N-1}\mathbf{U}_{pq}^l(x,y,z)\mathbf{I}(x,y,z,\theta) \right]}{\partial \theta}=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{z=1}^{N-1}\mathbf{U}_{pq}^l(x,y,z)\boldsymbol{\pi}^T(x,y,z)\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\theta)}{\partial \theta} \quad (21)$$

由式(21)可知,模态振型图像的矩特征值对设计参数的灵敏度可由 $\boldsymbol{\pi}(x,y,z)$ 的矩特征值与模态振型特征向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 对设计参数的灵敏度得到。在实际计算过程中,也可以用向前差分的数值解法求出其灵敏度。

1.4.2 设计参数估计值

模型修正的过程是一个参数变化迭代的过程,每次迭代都会得到下一次迭代过程中设计参数的改变量。每次迭代设计参数变化量的推导过程如下。目标函数可以表示为关于设计参数的泰勒展开式,如式(22)所示:

$$\delta \mathbf{z}=\mathbf{S}_j\delta \boldsymbol{\theta} \quad (22)$$

其中

$$\delta \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_j \quad (23)$$

$$\delta \mathbf{z}=\mathbf{z}_m-\mathbf{z}_j \quad (24)$$

式中 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 为设计参数的变化量, $\boldsymbol{\theta}_j$ 是第 j 次迭代过程的设计参数; $\delta \mathbf{z}$ 为目标函数的残差, $\mathbf{z}_m$ 为参考数据的目标函数, $\mathbf{z}_j$ 为第 j 次迭代过程中的目标函数。

$\mathbf{S}_j$ 代表目标函数对设计参数的灵敏度矩阵,表达如下:

$$\mathbf{S}_j=\delta \mathbf{z}_j/\delta \boldsymbol{\theta}_j \quad (25)$$

若设计参数的数目比目标函数的数目要少,可以采用最小目标函数法或者最小化二乘法,将

左右两边均乘以灵敏度矩阵的转置 S^T 得到

$$S_i^T \delta z = S_i^T S_i \delta \theta$$

(26)

整理得

$$\delta \theta = [S_i^T S_i]^{-1} S_i^T \delta z$$

(27)

可以得到第 $j+1$ 次迭代过程的设计参数 θ_{j+1} 为

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_i^T S_i]^{-1} S_i^T (z_m - z_j)$$

(28)

2 局部非对称曲面机匣基于 RAT 矩函数的模态识别与修正

2.1 燃烧室机匣的有限元模型及模态振型

在此之前矩函数在模型确认域的应用都是针对轴对称结构,然而工程中的实际结构大多并非完全轴对称。为了探究矩函数能否应用在局部非对称结构的模型确认上,本文选择一个轴对称的燃烧室机匣,该机匣最大半径为 241 mm,最小半径为 182 mm,高为 262.8 mm,在机匣外侧添加两个非对称的凸台。材料采用 GH4169 高温合金,该燃烧室机匣结构的弹性模量为 204 GPa,密度为 8240 kg/m³,泊松比为 0.3。在 ANSA 中使用 2 阶四面体单元对燃烧室机匣划分网格,将此模型视为参考模型,一共有 93 337 个节点,31 208 个单元。再将凸台简化,使用网格尺寸更大的 2 阶四面体进行建模,共有 26 195 个节点,12 851 个单元,将此模型视为简化模型。几何模型、参考模型与简化模型见图 1。

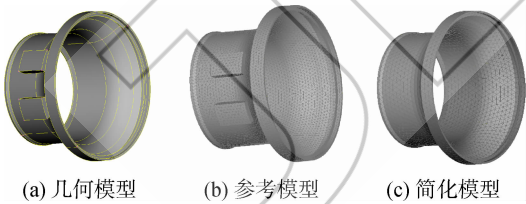


图 1 燃烧室机匣参考模型与简化模型

Fig. 1 Reference model and simple model of combustion case

使用 Nastran 求解器对参考模型与简化模型进行模态计算,计算自由-自由状态下的前 10 阶模态。参考模型与简化模型的前 10 阶固有频率见表 1,参考模型前 10 阶模态振型图见图 2,简化模型前 10 阶振型图见图 3。通过观察参考模型的振型图可以发现,参考模型的第 8 阶模态振型为局部模态,该阶模态的变形主要发生在凸台位置处,该局部模态在简化模型中没有出现,故列出参考模型前 11 阶振型图。由简化模型振型图可

以看到,每相邻两阶模态都为重模态,传统的模态置信准则在判定重模态时存在缺陷,因此可以将 RAT 矩函数应用在该模型的模型确认上。

参考模型相比于简化模型只多了两个凸台,为了保证后续模型修正中参考模型与简化模型的 RAT 矩能够计算残差,将参考模型与简化模型的振型数据插值到同一个圈数×点数×层数的像素空间内,获得的振型图见图 4 和图 5。可以看出,虽然参考模型与简化模型的振型数据插值到同一个像素空间,得到的参考模型振型图依然可以呈现出非对称凸台带来的影响,得到的振型图和 Nastran 计算获得的振型图大致相同。

表 1 参考模型与简化模型前 10 阶固有频率

Table 1 The first ten-order natural frequencies of the reference model and simple model

模态阶次	固有频率/Hz	
	参考模型	简化模型
1	170.38	195.19
2	176.23	195.35
3	270.14	286.21
4	273.71	286.26
5	502.65	538.04
6	516.19	538.29
7	832.75	1025.9
8	863.66	1026.1
9	934.49	1060
10	1022.9	1060.3

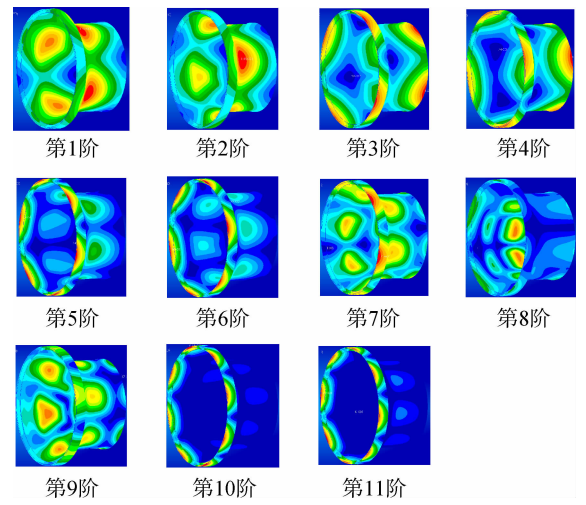


图 2 参考模型前 11 阶振型图

Fig. 2 The first eleven-order mode shape of the reference model

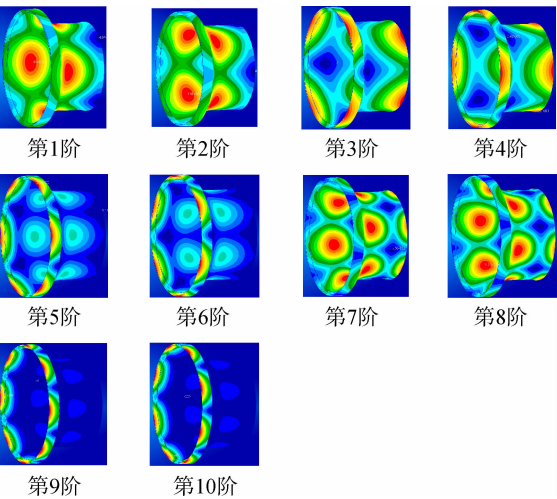


图 3 简化模型前 10 阶振型图

Fig. 3 The first ten-order mode shape of the simple model

在提取模态振型图像的特征矩集之前,需要确定一个最大重构阶数 $N_{\max}$,分别计算 $N_{\max}$ 从 1 到 20 的重构振型与原始振型的相似度(GSC 值),发现当 $N_{\max}$ 很低或者很高的时候 GSC 值都偏低, $N_{\max}$ 为 12 时,GSC 值最高为 0.97,意味着在 $N_{\max}$ 为 12

时重构振型图与原始振型图相似度非常高,参考模型的重构振型图见图 6。对比图 4 和图 6,可以看到参考模型的重构振型图与原始振型图基本一致,确认了 RAT 矩函数能对曲面机匣模态进行识别。

2.2 基于矩函数燃烧室机匣的相关性分析

根据文中第 2.1 节确定的最大重构阶数 $N_{\max}=12$,同时对参考模型与简化模型振型图提取 RAT 特征矩集,将从参考模型和简化模型提取出来的特征矩集进行对比,对比图见图 7,可以看到参考模型与简化模型前 7 阶的模态幅值较大的矩基本一致,因为参考模型的第 8 阶模态为局部模态,在简化模型中没有与第 8 阶匹配的模态,参考模型第 9、10、11 阶模态振型的特征矩集与简化模型第 8、9、10 阶模态振型的特征矩集基本一致,这也与振型图显示的相符。采用幅值最大的几个主矩作为目标函数进行模型修正,不仅可以考虑到模态振型提高模型修正精度,还避免了直接使用振型数据工作量大的问题。

对参考模型与简化模型进行相关性分析,图 8 为使用传统的模态置信准则计算的 MAC 图,

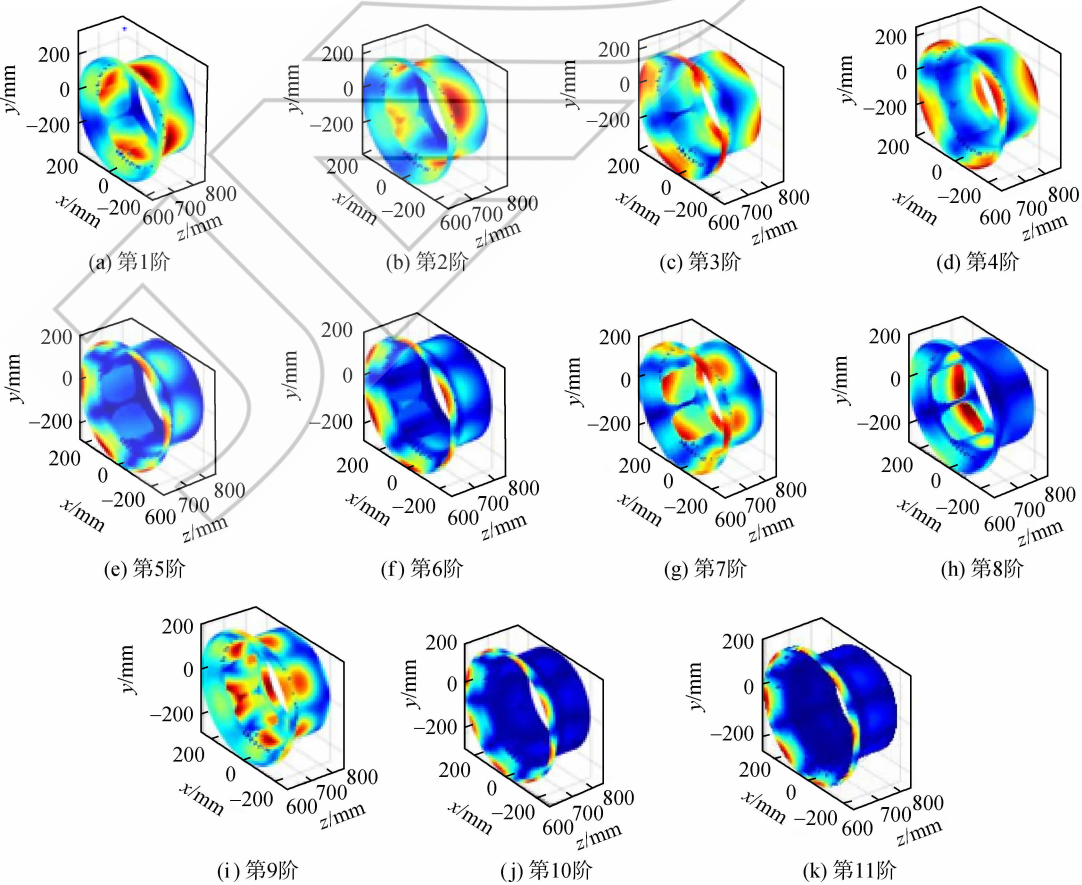


图 4 参考模型振型数据插值得到的前 11 阶振型图

Fig. 4 The first eleven-order mode shape obtained by interpolation of the reference model mode data

图 9 为采用 RAT 矩函数计算的 RATMAC 图。从 MAC 图可以看到只有前 6 阶模态能匹配上, 7~10 阶模态的匹配情况很差, 第 2、3 阶模态还

出现了重模态的现象, 反观 RATMAC 图, 能够很好地显示重模态现象, 因为参考模型的第 8 阶为局部模态, 因此参考模型的第 7、9 阶与简化模型

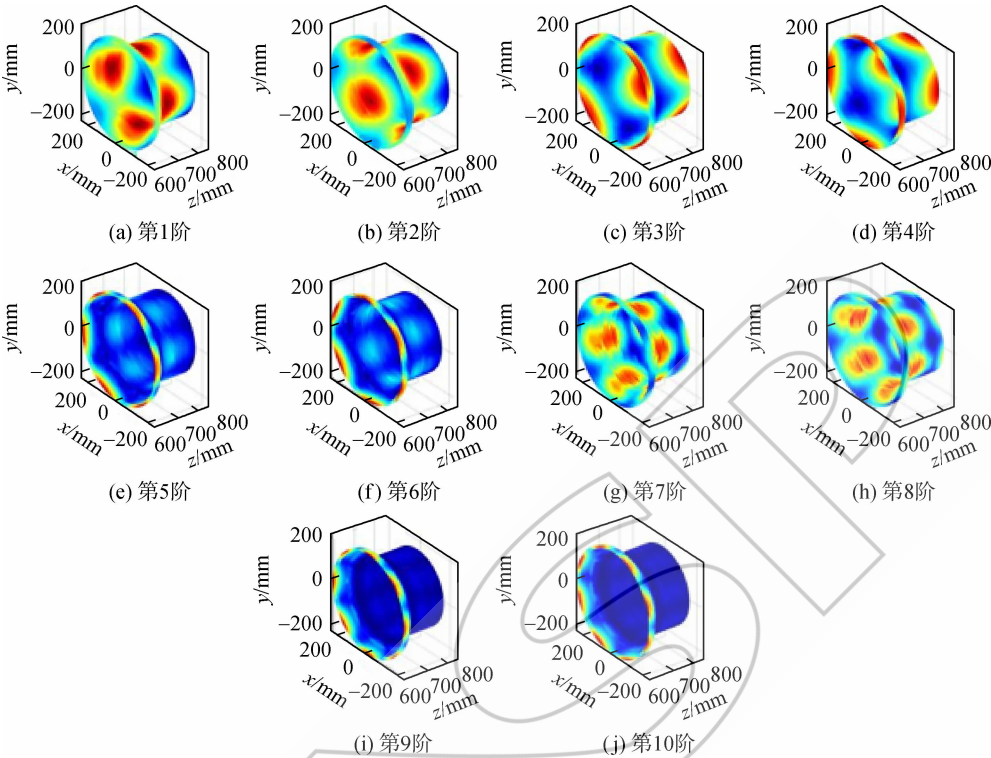


图 5 简化模型振型数据插值得到的前 10 阶振型图

Fig 5 The first ten-order mode shape obtained by interpolation of the simple model mode data

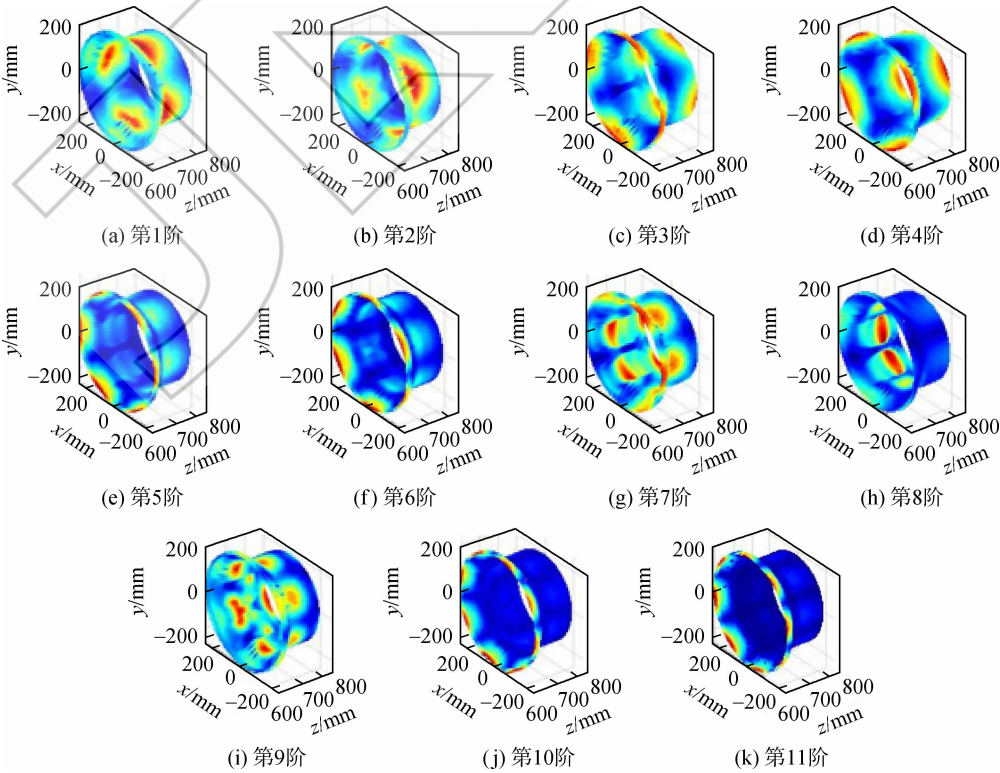


图 6 参考模型重构振型图

Fig. 6 Reconstructed mode shape of reference model

的第 7、8 阶为重模态。由此可见,基于 RAT 矩的相关性分析要优于传统的相关性分析的。

由表 2 列出的相关性分析数据可见:

1) 参考模型与简化模型各个模态对之间的

频差偏大,第 1、2、7 阶模态对的频差都超过 10%,特别是第 7 阶频差达到了 23.21%。由此可见简化模型与参考模型存在差异,为了减小两者之间的差异,需要对简化模型进行模型修正。

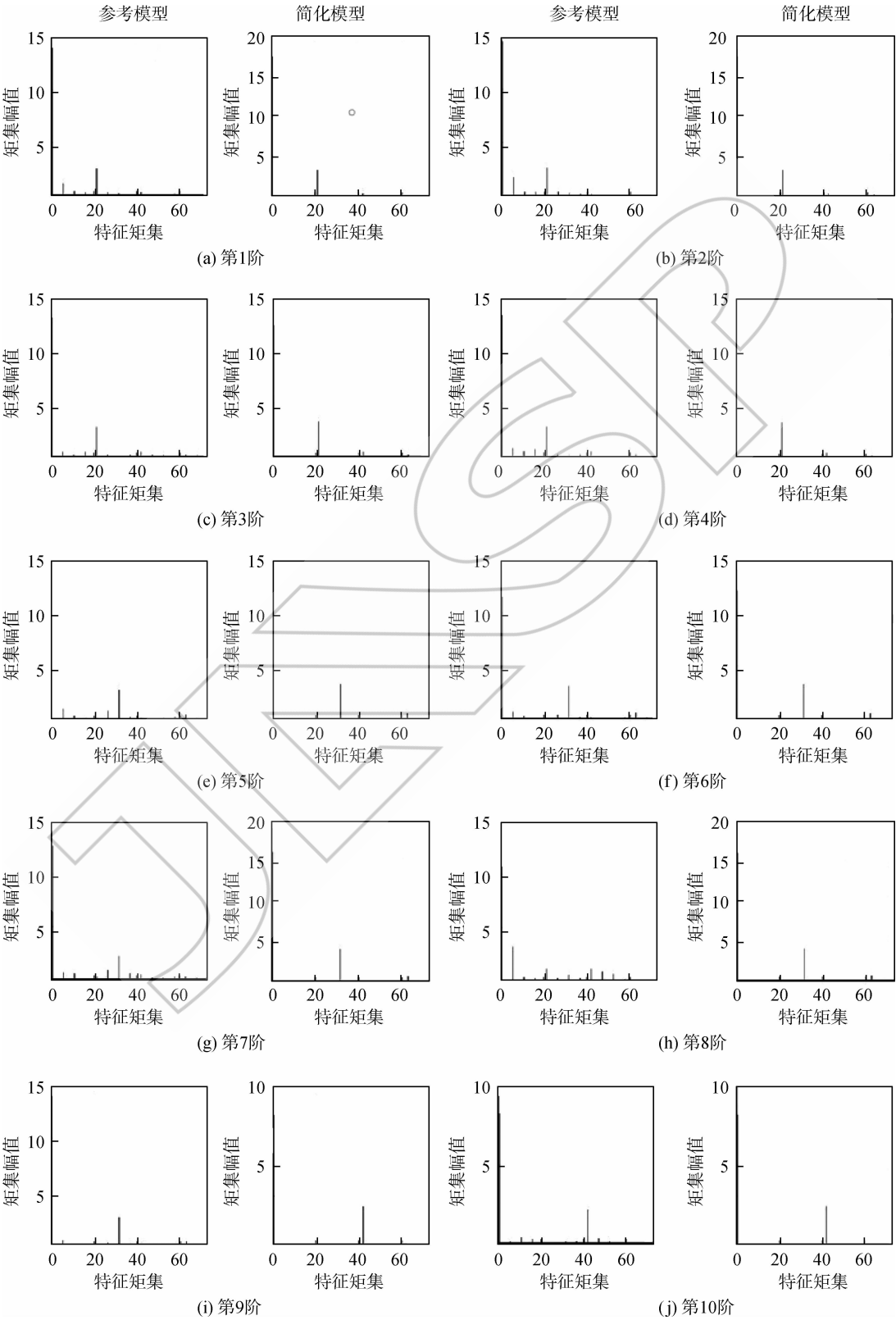


图 7 参考模型与简化模型 RAT 特征矩集对比

Fig. 7 Comparison of RAT feature moment sets between reference model and simple model

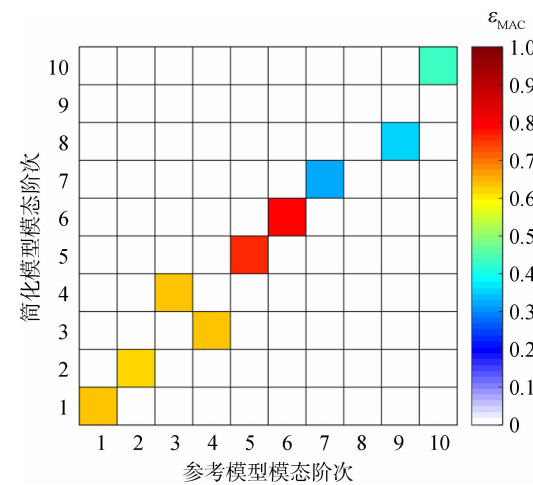


图 8 参考模型与简化模型 MAC 图

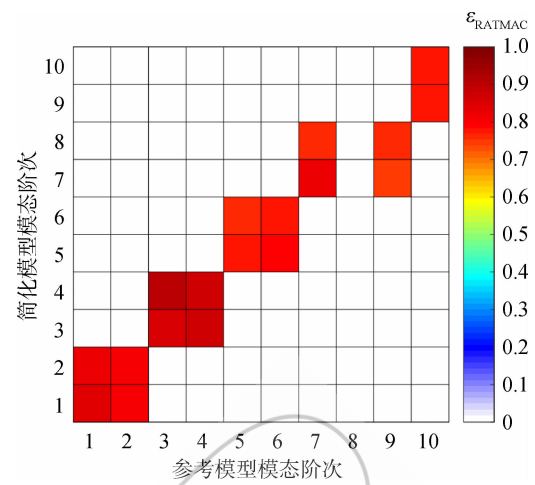


图 9 参考模型与简化模型 RATMAC 图

Fig. 8 MAC diagram of reference model and simple model Fig. 9 RATMAC diagram of reference model and simple model

表 2 参考模型与简化模型相关性
Table 2 Correlation of reference model and simple model

模态	频率/Hz		频差/％	ε _{MAC} /％	ε _{RATMAC} /％
	参考模型	简化模型			
1	170.381	172.72	14.56	63.32	83.24
2	176.23	172.86	10.84	62.12	80.9
3	270.14	254.88	7.09	63.55	85.8
4	273.71	254.84	5.66	63.47	90.0
5	502.65	474.33	7.04	75.33	76.7
6	516.19	474.55	4.28	78.98	78.0
7	832.75	906.33	23.21	31.29	81.9
9	934.49	908.45	9.78	35.35	75.9
10	1022.90	938.98	3.63	43.21	77.3

2) 对比表 2 显示的 RATMAC 值与 MAC 值,可以看到除第 5、6 阶模态对 RATMAC 与 MAC 相差不大,其余每一阶模态对的 RATMAC 值都远远大于 MAC 值,这是因为 RAT 矩具有旋转不变性,可以很好地描述重模态现象,而 MAC 应用在重模态上时数值会很低;并且 RAT 矩能够反映振型图象的全局特征,因此 RATMAC 相比于 MAC 能够更准确地反映出模态对之间振型图像的关系。

在传统的模型修正中,通常是将模态振型和频率作为目标函数,对设计参数(通常为弹性模量、密度)进行修正,从而使修正后的简化模型满足要求,但是该修正方法存在一些缺点:①如果只修正频率,可能会出现修正结果不收敛的现象。②如果只修正模态振型,模态振型数据量十分庞

大,且对参数变化不灵敏。因此在传统的模型修正中,修正过程复杂、数据量冗余,且很难获得理想的结果。

在进行模型修正之前需要对修正的模型进行分区,通过比较参考模型与简化模型的特征矩集可以看到参考模型第 8 阶特征矩集在简化模型中没有相对应的矩集,可以判断参考模型的第 8 阶模态由于局部非对称结构造成局部模态,通过观察参考模型第 8 阶模态的振型图可以大致确定局部非对称凸台的位置,将凸台位置分为区域 1,剩下部分作为区域 2,分区示意图如图 10 所示。

本文先采用两种方法对简化模型进行模型修正,分别是用模态频率修正和用 RAT 矩修正,但这两种方法的修正结果都无法收敛。最后以参考模型为标准同时使用模态频率与 RAT 矩对简化

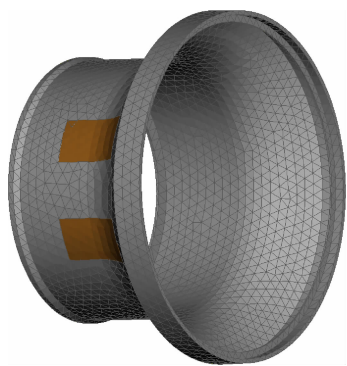


图 10 简化模型分区图
Fig. 10 Simple model area division

模型进行模型修正,以各个区域的弹性模量为修正参数,将简化掉的凸台的质量通过增加密度等效至区域 1,以保证简化前后模型质量不变。修正前后各阶模态参数变化见表 3、表 4, E_1 、 E_2 分别为区域 1 与区域 2 的弹性模量。可以看出,同时利用模态频率和 RAT 矩进行修正时,修正结果第 4 次迭代就能达到收敛。修正前最大频差达

到了 23.2%修正后简化模型与参考模型每一阶模态的频差都能控制在 10%以内,并且修正后的各阶模态相关性也有了一定提高,特别是第 7、9 两阶模态的 MAC 值有了大幅度提高。但是由于参考模型的近似模态现象与简化模型的重模态现象导致各阶 MAC 值都偏低,而 RATMAC 值能很好地反应各阶模态振型匹配程度,修正后的 RATMAC 值较修正前有了明显提高,说明修正后简化模型的振型图像与参考模型相似度有了提升,验证了 RAT 矩函数应用在该曲面非对称结构模型修正中的可行性。

表 3 修正前后弹性模量变化
Table 3 Changes in elastic modulus before and after correction

设计参数	修正前	修正后	变化量/%
E_1/GPa	204	267	32
E_2/GPa	204	162	23

表 4 修正前后各个参数变化
Table 4 Changes in various parameters before and after correction

模态	参考模型 频率/Hz	简化模型频率/Hz		频差/%		$\epsilon_{\text{MAC}}/\%$		$\epsilon_{\text{RATMAC}}/\%$	
		修正前	修正后	修正前	修正后	修正前	修正后	修正前	修正后
1	170.38	195.19	172.72	14.56	1.37	63.62	64.27	83.24	87.99
2	176.23	195.32	172.86	10.84	-1.91	62.12	63.23	85.23	90.60
3	270.10	286.26	254.88	7.09	-5.63	63.55	63.29	92.11	94.32
4	273.71	286.21	254.84	5.66	-6.89	63.47	63.29	90.98	95.67
5	502.65	538.04	474.55	7.04	-5.59	75.33	73.94	86.04	95.86
6	516.19	538.29	474.33	4.28	-8.11	78.98	77.64	85.63	96.09
7	832.75	1025.9	908.45	23.2	9.09	31.29	60.55	74.67	76.08
9	934.49	1026.1	906.33	9.8	-3.01	35.35	67.21	75.69	77.44
10	1022.90	1060	938.98	3.6	8.2	43.21	49.84	86.19	95.70

3 结 论

本文通过将三维振型数据插值到三维像素空间,实现了使用 RAT 矩函数描述三维曲面机匣的模态振型,并且将 RAT 矩函数应用到三维曲面局部非对称结构的模型确认中,总结如下:

1) 将三维曲面机匣看成多个圆柱机匣沿轴向组成,构建一个圈数 $\times$ 点数 $\times$ 层数的三维像素空间,将参考模型和简化模型的振型数据插值到该三维空间上,则可以直接提取三维曲面机匣振

型图像的 RAT 特征矩集,并可以用提取出的特征矩集重构振型图像。拓展了三维 RAT 矩函数对三维结构的适用范围,提高了 RAT 矩函数描述模态振型的通用性。

2) 过去三维矩函数只被应用在轴对称结构的模型确认当中,考虑到工程中大部分机匣都不是完全轴对称结构,本文将 RAT 矩函数应用到三维曲面局部非对称机匣的模型确认当中。

3) 将 RAT 矩函数应用在一个三维曲面非对称的燃烧室机匣得模型确认中, RATMAC 可以

很好地识别该模型的重模态现象,在分别使用三种方法进行模型修正后,发现同时利用频率与 RAT 矩进行模型修正能够得到理想的修正结果,相关性有明显的提升,各阶模态对频差也都明显降低。证明了 RAT 矩函数能够应用在三维局部非对称机匣的模型确认中,为今后应用到更复杂的模型上打下了基础。

参考文献:

[1] HU M K. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. Institute of Radio Engineers Transaction on Information Theory,1962,8(2):179-187.

[2] REDDI S S. Radial and angular moment invariants for image identification[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1981,3(2):240-242.

[3] BAMIEH B,DE FIGUEIREDO R. A general moment-invariants/attributed-graph method for three-dimensional object recognition from a single image[J]. Journal of Robotics and Automation,1986,2(1):31-41.

[4] TEAGUE M R. Image analysis via the general theory of moments[J]. Journal of Optical Society of America,1980,70(8):920-930.

[5] MUKUNDAN R,ONG S,LEE P. Image analysis by Tchebichef moments[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2002,10(9):1357-1364.

[6] MUKUNDAN R. Radial tchebichef invariants for pattern recognition [C] // Proceedings of TENCON-2005-2005 IEEE Region 10 Conference. Melbourne, Australia: IEEE, 2007:1-6.

[7] MUKUNDAN R. A comparative analysis of radial-tchebichef moments and zernike moments[C]//Proceedings of British Machine Vision Conference. London:DBLP,2009:7-12.

[8] WANG Weizhuo, MOTTERSHEAD J, IHLE A, et al. Finite element model updating from full field vibration measurement using digital image correlation[J]. Journal Sound and Vibration,2011,330(8):1599-1620.

[9] WANG Weizhuo, MOTTERSHEAD J E, MARES C. Mode-shape recognition and finite element model updating using the Zernike moment descriptor[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2009,20(7):2088-2112.

[10] WANG Weizhuo, MOTTERSHEAD J E, MARES C. Vibration mode shape recognition using image processing[J]. Journal of Sound and Vibration,2009,326(3/4/5):909-938.

[11] WANG Weizhuo, MOTTERSHEAD J E, SIEBERT T, et al. Frequency response functions of shape features from full-field vibration measurements using digital image correlation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012,28(6):333-347.

[12] LIU Yingchao, ZANG Chaoping. Mode shape description of an aero-engine casing structure using Zernike moment descriptors[J]. Journal of Aerospace Power,2011,26(4):760-770.

[13] 刘银超,臧朝平. 对称结构模态振型的 Zernike 矩描述方法[J]. 振动工程学报,2011,24(4):369-375

LIU Yingchao, ZANG Chaoping. Mode shape description of a symmetrical structure using Zernike moment descriptor[J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(4):369-375. (in Chinese)

[14] 贾晴晴,刘银超,臧朝平. 结构模态振型的 Tchebichef 矩描述方法[C]//中国力学大会暨钱学森诞辰 100 周年纪念大会论文集. 哈尔滨:中国力学学会,2011:78-87.

[15] 姜丹丹,臧朝平. 结构模态振型的径向切比雪夫矩函数描述研究[J]. 振动工程学报,2015,28(5):703-713.

JIANG Dandan, ZANG Chaopin. Research on radial Tchebichef moment description of structural mode shapes[J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(5):703-713. (in Chinese)

[16] 姜丹丹,臧朝平,梅庆. 基于径向切比雪夫矩函数的结构动力学模型修正[J]. 航空动力学报,2016,31(3):555-566.

JIANG Dandan, ZANG Chaopin, MEI Qing. Model updating in structural dynamics based on radial-Tchebichef moments[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(3):555-566. (in Chinese)

[17] 曾亚未,臧朝平,王晓伟. 基于矩函数的某航空发动机机匣的振型描述及模型确认[C]//中国力学大会论文摘要集. 上海:中国力学学会,2015:52-61.

[18] 马健,臧朝平. 轴对称结构模态振型的径轴向切比雪夫矩函数描述方法[J]. 噪声与振动控制,2018,38(增刊 1):138-142.

MA Jian, ZANG Chaopin. Mode shape description of an axisymmetric structure using radial axial Tchebichef moment function[J]. Noise and Vibration Control, 2018, 38 (Suppl. 1):138-142. (in Chinese)

(编辑:陈越)