

基于IPDG方法的超声速混合层流动数值模拟

王 贤¹, 刘 伟², 赵 明¹, 刘正先¹

(1. 天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300350;

2. 电子科技大学 计算机科学与工程学院, 成都 611731)

摘 要: 为了满足超声速混合层高精度模拟需求, 实现了基于内罚方法的间断伽辽金(IPDG)方法数值模拟。通过将黏性通量作为辅助变量使得 Navier-Stokes 方程降阶, 并利用间断伽辽金方法进行空间离散, 最后采用 Newton-Krylov 隐式方法对空间半离散方程进行时间推进。相对于有限体积法数值精度提高到了 3 阶。将该方法应用于对流马赫数为 0.2 的二维平面超声速混合层的数值模拟中, 通过与实验数据的对比验证了方法的可靠性。数值结果显示了混合层中层流到湍流的发展过程。在此基础上, 将基于数值解误差分布的自适应网格技术与 IPDG 方法结合起来, 对比发现自适应网格数量减少了 9 倍, 计算时间减少了 8 倍, 大幅提高了方法的计算效率。

关 键 词: 超声速混合层; 间断伽辽金有限元方法; 内罚方法; 对流马赫数; 网格自适应

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Numerical simulations of supersonic mixing layers with IPDG method

WANG Xian¹, LIU Wei², ZHAO Ming¹, LIU Zhengxian¹

(1. Mechanical Department, School of Mechanical Engineering,

Tianjin University, Tianjin 300350, China;

2. School of Computer Science and Engineering,

University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: In order to satisfy the high-precision simulation of supersonic mixing layers, discontinuous Galerkin finite element numerical method based on internal penalty method (IPDG) was realized. The viscous flux was introduced as an auxiliary variable to reduce the Navier-Stokes equation order, the discontinuous Galerkin method was used for spatial discretization and the Newton-Krylov implicit method was used for time marching. Compared with the finite volume method, the numerical accuracy of the method was improved to the third-order. The numerical simulation of the supersonic mixing layers developed in two-dimensional planar space with a convective Mach number of 0.2 was carried out, and the reliability of the method was verified by comparison with the experimental data. The numerical results clearly indicated the development of flow transition and vortices in the mixing layer. Meanwhile, the adaptive mesh technology based on numerical solution error distribution was combined with IPDG method. The comparison showed that the number of adaptive grids was reduced by 9 times, and the calculation time was reduced by 8 times, thus significantly improving the calculation efficiency of the method.

收稿日期: 2020-07-06

作者简介: 王贤(1995—), 男, 硕士生, 主要从事计算流体力学研究。

引用格式: 王贤, 刘伟, 赵明, 等. 基于 IPDG 方法的超声速混合层流动数值模拟[J]. 航空动力学报, 2021, 36(2): 275-283. WANG Xian, LIU Wei, ZHAO Ming, et al. Numerical simulations of supersonic mixing layers with IPDG method[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(2): 275-283.

Key words: supersonic mixing layer; discontinuous Galerkin finite element numerical method; interior penalty method; convective Mach numbers; mesh adaptivity

随着人们对超燃冲压发动机的研究逐渐深入,关于超声速混合层的研究显得愈发重要。超声速混合层包含了层流转捩失稳过程和由此引发的一系列涡的卷起、组对和撕裂等流动现象,研究其中的物理机制对于改进和发展超燃冲压发动机具有十分重要的意义。

Bogdanoff^[1]和 Papamoschou 等^[2]提出了对流马赫数(Ma_c)的概念。理论、实验与数值研究均表明,对流马赫数深刻地影响超声速混合层的增长率和稳定性。其中,线性稳定性分析表明,扰动的最大增长率基本落在一条曲线上,该曲线是对流马赫数的函数^[3-6]。在实验研究方面,Goebel 等^[7]在可压缩的湍流混合层上进行了实验研究。对流马赫数为 0.2 和 0.99 时,研究发现随着对流马赫数的增加,混合层的增长率降低,稳定性增强,湍流强度降低。在数值模拟方面,Chakraborty 等^[8]使用 4 阶紧致有限差分方法对对流马赫数为 0.86 的空间发展超声速混合层进行二维直接数值模拟(DNS)研究。瞬时流动结构和平均流动曲线表明,混合层的生长向高速侧发展,并且随着对流马赫数的增加,湍流强度减小。此外,Lui 等^[9]对对流马赫数为 0.6 和 0.4 的三维空间发展混合层,采用 6 阶有限差分格式进行了 DNS 研究。Li 等^[10]应用气体动力学(gas-kinetic scheme,GKS)方法在对流马赫数范围为 0.2~1.0 的情况下模拟了二维和三维超声速混合层。Shi 等^[11]模拟了对流马赫数范围为 0.2~0.8 的时间发展和空间发展的超声速混合层。在高对流马赫数条件下,观察到大规模拟序结构,例如 Brown-Roshko 结构、小波和多涡旋合并。

通过以上研究可以发现,超声速混合层的流动结构复杂,对数值求解方法精度要求极高。近年来,高精度方法由于其拥有的高空间精度、高数值分辨率和低数值耗散特性,适用于湍流、计算声学等多尺度流动问题,在计算流体力学领域得到了极大关注^[12]。其中,间断伽辽金(discontinuous Galerkin,DG)方法因为具有紧致性、稳定性和收敛性好及并行效率高等特点,发展十分迅速。

21 世纪初,DG 方法成功应用于求解 Navier-Stokes(N-S)方程^[13-14]。如 BR1 格式、BR2 格式、local discontinuous Galerkin(LDG)方法和内罚(interior penalty,IP)方法,通过引入辅助变量将

N-S 方程降阶,解决了黏性项处理困难的问题,并逐渐发展成熟。

其中 IP 方法具有紧致性好,不需要储存辅助变量且易于程序编写等优点。最初由 Lions 用来求解带 Dirichlet 边界条件的椭圆型方程。他提出引入罚系数,将 Dirichlet 边界转换为 Neumann 边界。此后,Hartmann 等^[15-16]将 IP 方法应用于可压缩 N-S 方程的 DG 离散求解过程中,形成了基于内罚方法的间断伽辽金(IPDG)方法,其核心思想是引入一个双线性算子充当罚函数,建立相邻单元之间的信息交换机制^[17]。随后 Béatrice 等^[18]在含有悬空节点的网格上,针对不可压缩 N-S 方程采用 IPDG 方法进行了模拟。Wang 等^[19]分别采用 SUPG(streamline upwind/Petrov Galerkin)格式和 IPDG 方法,结合雷诺平均 N-S(RANS)和大涡模拟(LES)模拟比较了两种格式的计算结果。de Wiart 等^[20]将该方法用于槽道流的 LES 计算,显示了良好的计算精度。Arnold 等^[21]分析了各种 DG 耗散项的求解途径,包括 BR1、BR2、LDG、IP 等,通过变量和黏性通量的分析,将它们统一起来,并对收敛性、相容性进行了严格的证明。但由于流动现象复杂、计算量大,目前将 IPDG 方法用于高马赫数的湍流研究还很少。

本文结合 Newton-Krylov 隐式方法将 IPDG 方法应用于空间发展的二维平面超声速混合层流动的数值模拟中,验证了该方法在此类问题中的可靠性。在此基础上,验证了模拟超声速混合层时,采用自适应网格技术提高 IPDG 方法计算效率的可行性。

1 数值方法

1.1 控制方程组

混合层流动可以用 N-S 方程描述

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) - \nabla \cdot \mathbf{F}^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = 0 \quad (1)$$

式中 t 为瞬时时间,守恒变量 $\mathbf{U}$ 、对流通量 $\mathbf{F}^c = (F_x^c, F_y^c)$ 和黏性通量 $\mathbf{F}^v = (F_x^v, F_y^v)$ 分别为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_y^c = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_y^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 ρ 、 E 和 p 分别代表密度、流体单位体积总能量和压力, u 、 v 分别为 x 、 y 方向上的速度。热通量 $q_x = -\kappa(\partial T/\partial x)$ 、 $q_y = -\kappa(\partial T/\partial y)$, κ 为导热系数, T 为温度。黏性应力张量各分量分别为

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 μ 为动力黏度。状态方程 $p = \rho RT$, R 为气体常数, 比热比 $\gamma = 1.4$ 。能量方程为

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (4)$$

1.2 IPDG 方法的空间离散

式(1)中存在 2 阶偏导数项, 需要降阶来求解。与 Bassi 和 Rebay 提出的 BR1 格式^[13]将守恒变量的 1 阶导数单独提出不同, IP 方法将黏性通量作为辅助变量:

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{F}^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{G}(\mathbf{U}) \nabla \mathbf{U} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}^c - \boldsymbol{\Theta}) = 0 \quad (6)$$

式中张量 $\mathbf{G}$ 为黏性通量 2 个方向分量上的 4 个分量对 4 个守恒变量梯度的导数。

设 Ω 为计算区域, Γ 为计算区域边界, 定义 Ω_e 为计算域内非重叠单元的集合。 $\partial\Omega_e$ 为单元的边界, $\mathbf{n}$ 为单元边界的外法向矢量, 则有限元空间 $\mathbf{V}_h$ 为

$$\mathbf{V}_h^q = \left\{ \mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^m : \mathbf{v}_h|_{\Omega_e} = [\mathbf{V}_q^m], \forall \Omega_e \in \Omega \right\}$$

其中 $L^2(\Omega)$ 代表计算域内勒贝格平方可积的函数空间, $\mathbf{V}_q^m$ 代表局部空间单元上的 m 维 q 阶多项式。将式(5)和式(6)分别乘以测试函数 $\mathbf{W}$ 和 φ , 并在每个单元上积分得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{W}_h d\Omega &= \int_{\Omega_e} \mathbf{G}(\mathbf{U}) \nabla \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{W}_h d\Omega = \\ \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{n} (\mathbf{G}^T \mathbf{W}_h) d\Gamma &- \int_{\Omega_e} \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{W}_h \mathbf{G}^T d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} (\mathbf{F}^c \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}^v \cdot \mathbf{n}) \varphi_h d\Gamma - \\ \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_h \cdot (\mathbf{F}^c - \boldsymbol{\Theta}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式中分别用 $\mathbf{U}_h$ 、 $\mathbf{W}_h$ 和 φ_h 表示理论解 $\mathbf{U}$ 、测试函数 $\mathbf{W}$ 和 φ 在有限元空间上的近似。IP 方法常取变量数值通量 $\mathbf{U}_h(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_h^+ + \mathbf{U}_h^-) \cdot \mathbf{n}$ 。

对式(7)再做一次分步积分得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{W}_h d\Omega &= \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{U}_h \mathbf{G}^T \mathbf{W}_h d\Omega + \\ \int_{\partial\Omega_e} (\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^-) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{G}^T \mathbf{W}_h) d\Gamma &= \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{F}^v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) \mathbf{W}_h d\Omega &+ \\ \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{2} (\mathbf{U}_h^+ - \mathbf{U}_h^-) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{G}^T \mathbf{W}_h) d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

从式(9)中可以发现由于 IPDG 方法在单元边界处存在间断, 黏性项被拆分为单元内和单元边界两部分。对流项和黏性项单元内部通量按原始方程(式(1))的计算, 这里边界对流通量取 Lax-Friedrichs 格式计算:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{U}_h^-) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(\mathbf{U}_h^+) \cdot \mathbf{n} - \\ \frac{1}{2} \alpha_{\text{lf}} (\mathbf{U}_h^+ - \mathbf{U}_h^-) \end{aligned} \quad (10)$$

式中 α_{lf} 为 Jacobin 矩阵 $\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ 的最大特征值。边界黏性数值通量取^[15]

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^v \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}^v(\mathbf{U}_h^-, \boldsymbol{\Theta}^-) + \mathbf{F}^v(\mathbf{U}_h^+, \boldsymbol{\Theta}^+)] \cdot \mathbf{n} - \\ C_{\text{iq}} \frac{q^2}{h_f} \mathbf{F}^v \left[\frac{1}{2} (\mathbf{U}_h^+ + \mathbf{U}_h^-), \frac{1}{2} (\mathbf{U}_h^+ - \mathbf{U}_h^-) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 C_{ip} 取正常数, q 为多项式阶数, h_f 为面的尺度。通过 IP 方法处理黏性项, 能够直接消掉辅助变量。取 $\mathbf{W} = \nabla \varphi$, 合并式(8)和式(9)得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} \varphi_h d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} (\mathbf{F}^c \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}^v \cdot \mathbf{n}) \varphi_h d\Gamma - \\ \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{2} (\mathbf{U}_h^- - \mathbf{U}_h^+) \mathbf{n} \mathbf{G}^T \cdot \nabla \varphi_h d\Gamma + \\ \int_{\Omega_e} (\mathbf{F}^c - \mathbf{F}^v) \cdot \nabla \varphi_h d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

通过 IPDG 方法得到的空间半离散方程形式比 BR1、BR2 推导的更为简洁, 易于程序编写, 同时也有紧致性好等优点。

1.3 Newton-Krylov 隐式时间方法

将原始的偏微分控制方程(式(1))离散为空间半离散形式的非线性方程(式(12))之后, 本文

采用 Newton-Krylov 方法进行时间迭代求解。Newton 方法常用来求解复杂的非线性问题,具有收敛速度快等优势。将式(12)简化记作 $\mathbf{R}_i(\mathbf{U}_h)=\mathbf{0}$ 并线性化得到

$$\mathbf{J}_{ij}(\mathbf{U}_n)\delta\mathbf{U}_{n+1}=-\mathbf{R}_i(\mathbf{U}_n)$$
$$\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{U}_n+\delta\mathbf{U}_{n+1}$$

(13)

式中雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{ij}=\partial\mathbf{R}_i/\partial\mathbf{U}_j$ 。这样就可以采用 Krylov 子空间方法求解。在这个 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的线性系统里: $\mathbf{A}=\mathbf{J}_{ij}(\mathbf{U}_n)$, $\mathbf{x}=\delta\mathbf{U}_k$, $\mathbf{b}=-\mathbf{R}_i(\mathbf{U}_n)$ 。

Newton-Krylov 方法共有 3 层循环:第 1 层循环为时间推进;第 2 层循环在物理时刻采用 Newton 迭代求解非线性方程的根;第 3 层循环将每一非线性迭代步 $\mathbf{U}_n$ 作为初值带入线性系统,然后采用如 GMRES(generalized minimal residual method)等 Krylov 子空间方法迭代求解代数方程组。

1.4 自适应网格技术

虽然 IPDG 方法具有高精度、高分辨率等优势,但也面临着提高计算效率的挑战。吕宏强等^[12]指出,DG 方法通常要求解大型稀疏线性系统,并且因其数值积分策略以及隐式时间格式产生了较大的计算量及内存储存需求。因此学者们一直致力于改进这方面问题^[22-24]。

由于 DG 方法能够处理复杂的几何外形和含有悬挂点的网格,容易实现网格自适应。因此本文在开源平台 MOOSE(multiphysics object-oriented simulation environment)的自适应框架基础上,将 h 型网格自适应技术与 IPDG 方法结合起来,根据数值解的误差分布,自动加密或者粗化网格,将自由度集中到误差大的位置。这样既能发挥 IPDG 方法本身高精度优势又能极大减少计算量。具体步骤为:通过误差计算函数计算当前网格误差分布,然后通过网格标记函数标记需要加密或者粗化的网格,最后计算生成新的网格进行下一步计算。本文采用 Hartmann^[25]提出的人工黏性系数构造方法在各网格单元计算误差,定义误差计算函数 ϵ 为

$$\epsilon|_e=C_e h_e^{2-\beta}|\nabla\cdot\mathbf{F}^c(\mathbf{U})|$$

(14)

式中 C_e 和 β 为正常数, h_e 为单元尺度。相对于其他误差计算函数构造方法,其形式较为简单并且能够满足非线性迭代对稳定性的要求,并且紧致性好、高维高精度容易实现。误差计算函数 ϵ 在光滑解附近充分小,而间断解附近与 h_e/p 数量级相当。

1.5 数值精度验证

本文首先通过库埃特流验证采用 IPDG 方法求解 N-S 方程的格式精度。此问题对位于 $y=0$ 和 $y=H$ 的两个平行板之间的黏性流进行建模。 $y=0$ 处的温度为 T_0 的平板静止,而 $y=H$ 处的板具有不同的温度 T_1 ,并且以 U 的速度移动。假设黏度 μ 为常数,库埃特流动精确解为

$$\begin{cases} u=\frac{y}{H}U & v=0 \\ T=T_0+\frac{y}{H}(T_1-T_0)+\frac{\mu U^2}{2\kappa}\cdot\frac{y}{H}\left(1-\frac{y}{H}\right) \\ P=\text{const} & \rho=\frac{P}{RT} \end{cases}$$

(15)

式中两平板间隔高度 $H=2$,上平板速度 $U=1$,上壁面温度 $T_0=0.8$,下壁面温度 $T_1=0.85$,黏度 $\mu=0.01$ 。计算域长度为 $2H$,边界条件根据解析解取精确值。不同精度下计算得到的密度 L_2 误差如表 1 所示,可以看到各阶格式都达到了设计精度。

表 1 库埃特流动密度 L_2 误差

Table 1 L_2 error of Couette flow based on density

网格数	精度		误差/ 10^{-6}	
	2 阶	3 阶	2 阶	3 阶
10×5		54.27	0.467	
20×10	2.21	2.99	11.72	0.05643
40×20	2.01	3.22	2.918	0.006043

2 二维空间发展混合层

在此基础上,本文将 IPDG 方法应用于超声速混合层模拟中,进一步验证方法的精度和可靠性。Sandham 等^[3]提出当 $0<Ma_c<0.6$ 时,流场二维不稳定波扰动增长更加迅速,涡结构体现明显的二维特征。在此范围内研究二维空间发展超声速混合层,得到的相关规律适用于三维混合层,又能极大地减少计算量。

综合考虑计算效率和计算精度,本文取 3 阶格式模拟对流马赫数 $Ma_c=0.2$ 时的二维空间发展混合层。

2.1 计算域及边界条件

以初始涡量厚度 δ_0^* 无量纲化后,计算域大小为 $L_x\times L_y=400\times150$ (如图 1 所示)。由于混合层流动流向尺度远大于横向尺度,本文在 x 方向

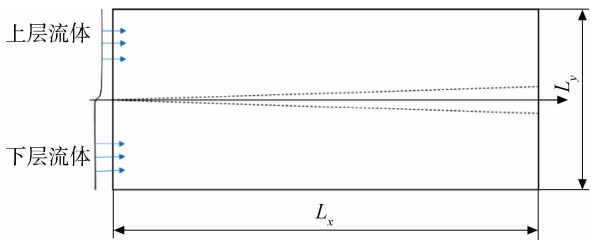


图 1 计算域示意图

Fig. 1 Sketch of computational domain

均匀划分网格,在 y 方向中心加密划分网格。

入口流向速度为双曲正切剖面

$$u(y) = \bar{u} \left[1 + \frac{1 - \lambda_u}{1 + \lambda_u} \tanh\left(\frac{y}{2\delta_w^0}\right) \right] \quad (16)$$

式中 $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$, $\lambda_u = u_1/u_2$, u_1 、 u_2 分别为上下两层流体流向速度。对流马赫数定义为 $Ma_c = (u_1 - u_2)/(a_1 + a_2)$, a_1 、 a_2 分别为上下层流体声速。在入口速度剖面上添加小扰动会促进涡的卷起和配对,加快混合层失稳,本文采用基本模加亚谐波^[26]的扰动形式:

$$v' = \left[A_1 \cos(\phi + k_z t) + A_2 \cos\left(\phi + \frac{k_z}{2} t\right) \right] G(y) \quad (17)$$

式中 $G(y)$ 为高斯分布函数, A_1 、 A_2 为扰动振幅,根据文献[26]取不稳定波数 $k_z = 0.512$, ϕ 为随机相位。上下边界采用零梯度条件,出口为 Riemann 无反射边界条件。

2.2 网格无关性验证

为了进一步确认本文选取的网格满足模拟超声速混合层流动的要求,本文采用与 Goebel 和 Dutton 等^[7]的实验状态相同的计算工况,进行网格无关性验证。表 2 为选取的不同网格的详细几何参数。

表 2 不同网格几何参数

Table 2 Geometrical information of different meshes

$u_1/(m/s)$	$u_2/(m/s)$	网格数量	最小网格尺寸
519	409	675×200	0.59、0.4
519	409	1000×300	0.35、0.3
519	409	1350×400	0.269、0.2

图 2 为不同网格计算得到的混合层动量厚度 δ_m 沿流向的变化。其计算方法为

$$\delta_m = \frac{1}{\rho_1 (\Delta u)^2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \bar{\rho} (u_1 - \bar{u})(\bar{u} - u_2) dy \quad (18)$$

式中 ρ_1 为上层流体密度, $\bar{\rho}$ 、 $\bar{u}$ 分别为时均密度、时

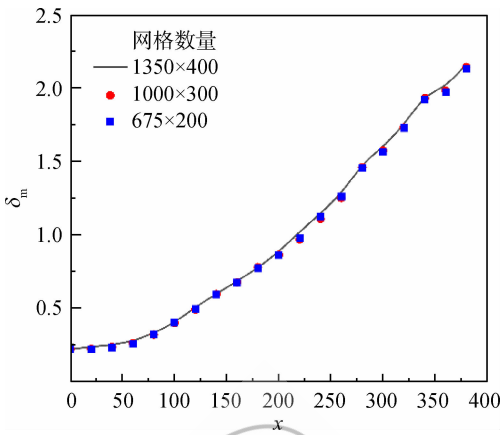


图 2 不同网格下动量厚度沿流向变化

Fig. 2 Momentum thickness growth along the flow direction under different meshes

均速度。分析不同网格的计算结果可知,混合层动量厚度总体变化相差较小,满足了网格无关性要求。因此在本文的验证和分析中采用 675×200 网格。

2.3 流场自相似特性

图 3 为混合层不同流向位置的时均速度剖面,其中纵坐标为横向位置 Y 除以动量厚度 δ_m 无量纲化,横坐标为当地速度 u 减去下层流体速度 u_2 后除以两层流体速度差 Δu 无量纲化。显然采用 IPDG 方法计算的混合层流场在流向位置大于 340 之后满足统计量分布的相似特性。与相同入口条件下 Goebel 的实验结果以及 Arora 等^[27]的 LES 结果基本吻合,进一步验证了计算的可靠性。

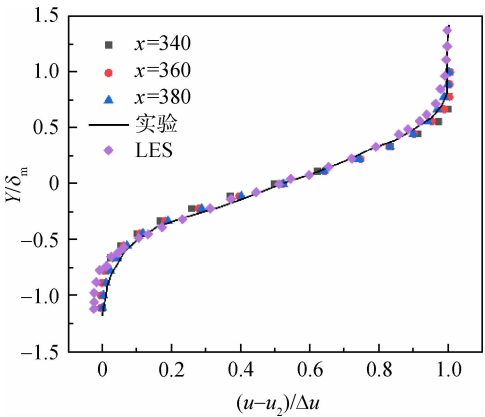


图 3 不同流向位置的时均速度剖面图

Fig. 3 Profiles of the streamwise time-averaged velocity

2.4 混合层的失稳和转换过程

图 4、图 5 分别为 $Ma_c = 0.2$ 时,不同时刻的混合层涡量和密度等值线图。图中清晰地显示

了基本模加亚谐波的小扰动作用下混合层的失稳和转捩过程,可以划分为 3 个阶段^[28]:①线性发展阶段,混合层在初始阶段,由于 Kelvin-Helmholtz 不稳定性,扰动以相当大的增长率发展,随后在两层流体交界面卷起旋涡;②卷成涡

列阶段,非线性影响逐渐体现出来,混合层演变成周期性涡列,这个二维过程在最快增长频率振幅达到最大时视作结束;③旋涡的组对及合并阶段,频率为 $0.5k_z$ 的亚谐波开始出现并增长,由于亚谐波的快速增长和旋涡之间的相互作用,相

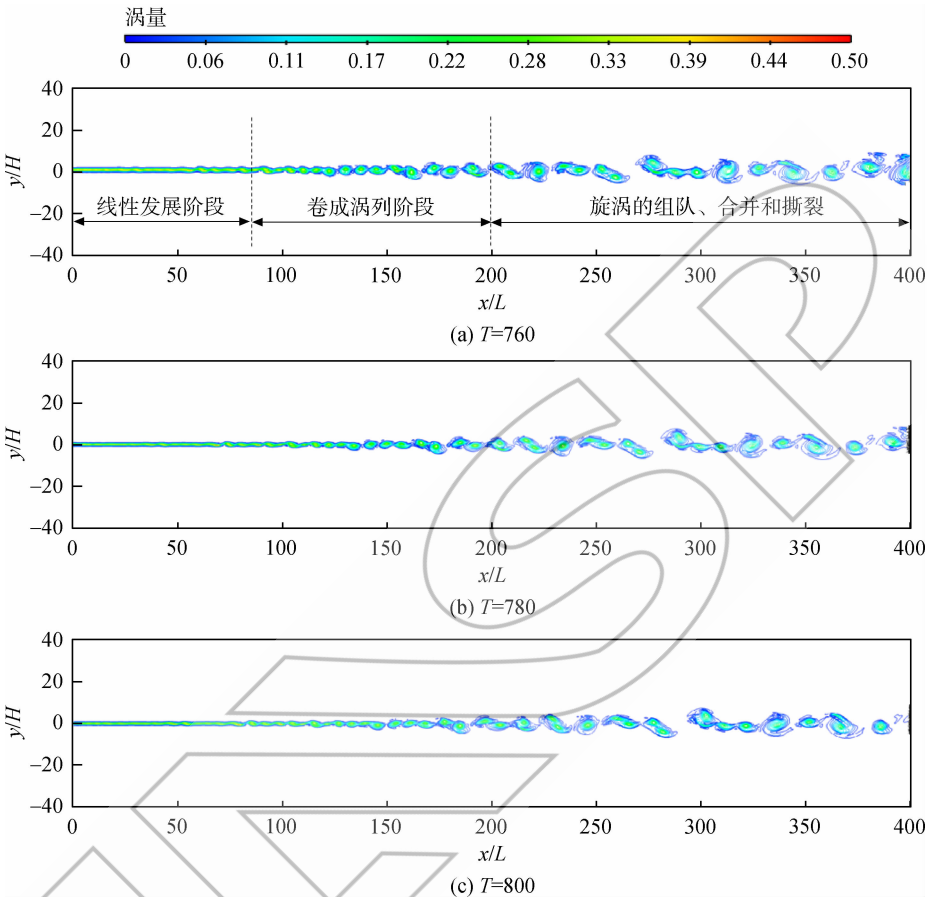
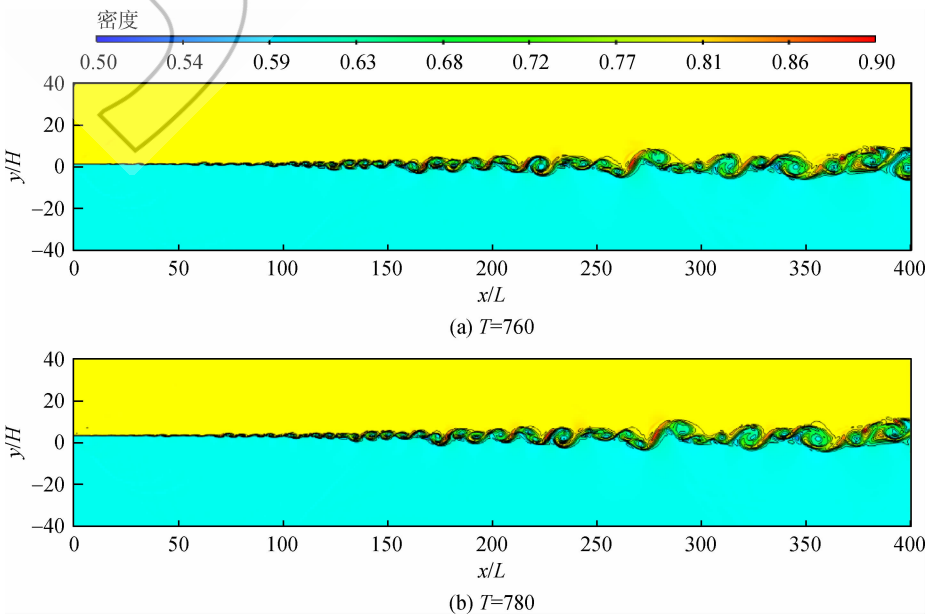


图 4 不同时刻的混合层涡量图

Fig. 4 Distribution of mixing layer vorticity at various instantaneous times



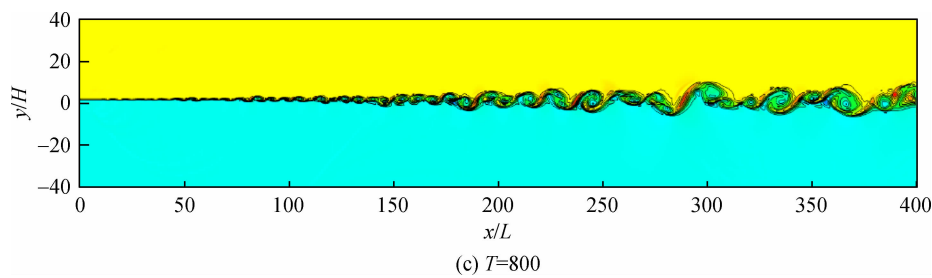


图 5 不同时刻的混合层密度等值线图

Fig. 5 Distribution of mixing layer density at various instantaneous times

邻旋涡开始相互围绕旋转并最终合并成为一个旋涡,合并成的大旋涡又继续两两组对、合并。

上述现象与相同对流马赫数下 Li 等^[10]应用 BGK 方法,以及 Shi 等^[11]使用 DG 方法模拟的二维超声速混合层发展过程一致,说明了 IPDG 方法用于混合层计算的可靠性。

2.5 自适应网格的应用

图 6 为有无自适应技术在相同计算条件下的计算网格。其中自适应网格根据误差分布自动加密两次,最小网格尺寸与无自适应的网格相同。

可以发现,加密区域与上下两层流体混合发展过程中密度等值线分布一致,说明了本文采取的自适应技术正确地捕捉到了流场细节。

图 7 分别为细网格及自适应网格涡量图。不难发现,自适应网格流场细节保留较好,小尺度结构清晰,涡列地卷起、合并过程明显。整体流场和细网格结果基本一致,说明 h 型自适应方法适用于混合层流动之类的含有多尺度拟序结构的湍流场计算。

表 3 为不同网格尺度下,非线性迭代单步所

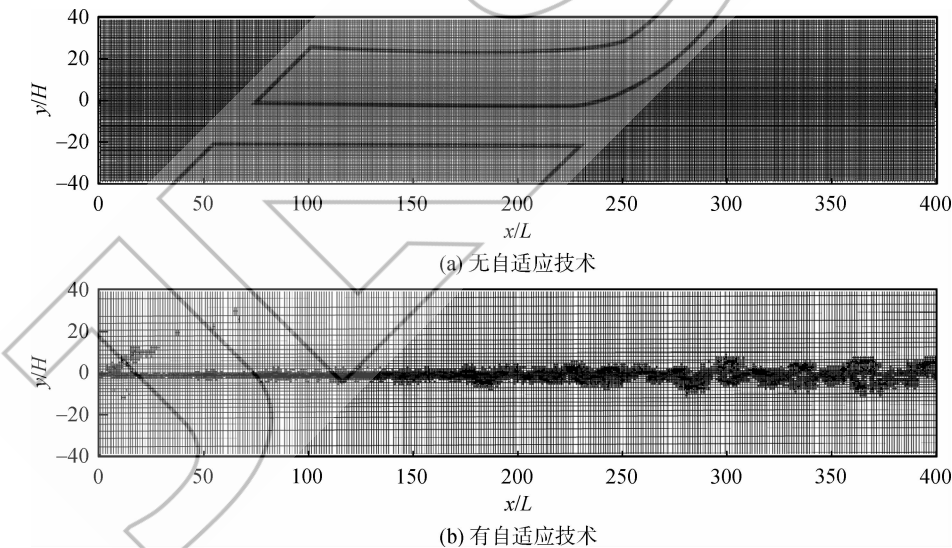
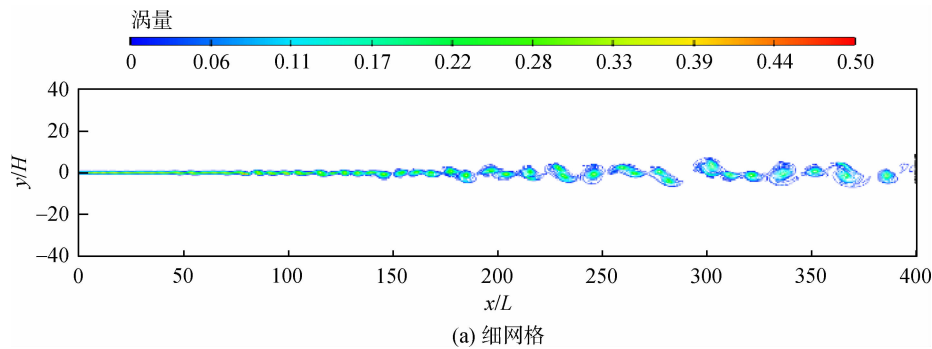


图 6 有无自适应技术下的计算网格

Fig. 6 Meshes with and without adaptivity



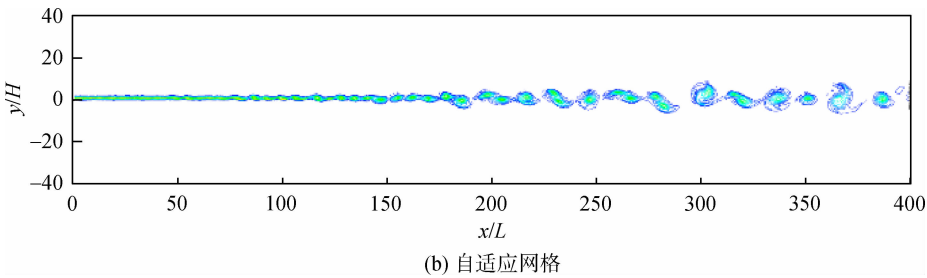


图 7 不同网格下涡量图

Fig. 7 Vorticity contour computed by various meshes

表 3 不同网格数量下,计算时间和耗费内存大小

Table 3 Computing time and memory consumption with different sizes of mesh

网格类型	单元数量	计算时间/s	耗费内存/Mb
细网格	543 894	26.6	1 228.8
粗网格	17 824	1.5	143
自适应网格	55 713	3.5	310

用计算时间及并行 CPU 平均耗费内存大小。可以看出,计算中自适应网格数量远少于细网格,所耗费内存和计算时间也远小于细网格,与粗网格在同一数量级。说明在粗网格基础上,通过合适的误差计算函数和网格标记函数,实现网格自动地加密或粗化,能够有效地减小计算量,节省计算时间,提高计算效率。

3 结 论

本文实现了基于内罚方法的间断伽辽金(IP-DG)数值模拟,并将该方法应用于二维空间发展混合层的流场模拟中。通过与实验及 LES 计算结果对比,以及对流场中混合层发展过程分析,得出以下结论:

- 1) 本文采用的 IPDG 方法得到的二维超声速混合层计算结果与实验以及 LES 数据基本吻合,并且捕捉到了层流到湍流的发展过程,证明了方法精度和可靠性。
- 2) 本文成功将 h 型网格自适应技术与 IPDG 方法相结合,既发挥了 IPDG 方法本身高精度优势又极大地减少了计算量,为方法的推广奠定了基础。

参考文献:

[1] BOGDANOFF D W. Compressibility effects in turbulent shear layers[J]. AIAA Journal,1983,21(6):926-927.

[2] PAPAMOSCHOU D,ROSHKO A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study[J]. Journal of

Fluid Mechanics,1988,197:453-457.

[3] SANDHAM N D,REYNOLDS W C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer[J]. Journal of Fluid Mechanics,1991,224:133-158.

[4] MORRIS P J,GIRIDHARAN M G,LILLEY G M. On the turbulent mixing of compressible free shear layers[J]. Proceedings of the Royal Society: A Mathematical, Physical and Engineering Sciences,1990,431(1882):219-243.

[5] RAGAB S A,WU J L. Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers[J]. Physics of Fluids: A Fluid Dynamics,1989,1(6):957-966.

[6] JACKSON T L,GROSCH C E. Absolute/convective instabilities and the convective Mach number in a compressible mixing layer[J]. Physics of Fluids: A Fluid Dynamics,1990,2(6):949-954.

[7] GOEBEL S G,DUTTON J C,KRIER H,et al. Mean and turbulent velocity measurements of supersonic mixing layers[J]. Mineralium Deposita,1994,29(5):263-272.

[8] CHAKRABORTY D,MUKUNDA H S,PAUL P J. Two dimensional direct numerical simulation of nonreacting confined supersonic mixing layer[J]. Aeronautical Journal,2000,104(1036):291-296.

[9] LUI C,LELE S. Direct numerical simulation of spatially developing,compressible,turbulent mixing layers[R]. Reno,US:Aerospace Sciences Meeting and Exhibit,2001.

[10] LI Qibing,CHEN Haixin,FU Song. Large-scale vortices in high-speed mixing layers[J]. Physics of Fluids,2003,15(10):3240-3243.

[11] SHI Xiaotian,CHEN Jun,BI Weitao,et al. Numerical simulations of compressible mixing layers with a discontinuous Galerkin method[J]. Acta Mechanica Sinica,2011,27(3):12-23.

[12] 吕宏强,张涛,孙强,等. 间断伽辽金方法在可压缩流数值模拟中的应用研究综述[J]. 空气动力学学报,2017,35(4):455-471.

LÜ Hongqiang,ZHANG Tao,SUN Qiang,et al. Applications of discontinuous Galerkin method in numerical simulations of compressible flows: a review[J]. Acta Aerodynamica Sinica,2017,35(4):455-471. (in Chinese)

[13] BASSI F,REBAY S. A high order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Com-

- putational Physics, 1997, 131(2): 267-279.
- [14] COCKBURN B, SHU Chiwang. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(6): 2440-2463.
- [15] HARTMANN R, HOUSTON P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations I: method formulation[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2006, 3(1): 1-20.
- [16] HARTMANN R, HOUSTON P. Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations II: goal-oriented a posteriori error estimation[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2006, 3(1): 141-162.
- [17] WHEELER M F, FANETT M. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15(1): 152-161.
- [18] BÉATRICE R, GIRAULT V. Discontinuous finite element methods for incompressible flows on subdomains with non-matching interfaces[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(25/26/27/28): 3274-3292.
- [19] WANG L, ANDERSON W K, ERWIN J T, et al. Discontinuous Galerkin and Petrov Galerkin methods for compressible viscous flows[J]. Computers and Fluids, 2014, 100: 13-29.
- [20] DE WIART C C, HILLEWAERT K, BRICTEUX L, et al. Implicit LES of free and wall-bounded turbulent flows based on the discontinuous Galerkin/symmetric interior penalty method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2015, 78(6): 335-354.
- [21] ARNOLD D N, BREZZI F, MARINI D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 39(5): 1749-1779.
- [22] VAN LEER B, LO M, VAN RAALTE MARC. A discontinuous Galerkin method for diffusion based on recovery [R]. AIAA 2007-4083, 2007.
- [23] MICHAEL D, DINSHAW S B, ELEUTERIO F T, et al. A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(18): 8209-8253.
- [24] LUO Hong, XIA Yidong, FRISBEY M. A reconstructed discontinuous Galerkin method based on a hierarchical WENO reconstruction for computing shock waves on hybrid grids[R]. AIAA-2013-3063, 2013.
- [25] HARTMANN R. Adaptive discontinuous Galerkin methods with shock-capturing for the compressible Navier-Stokes equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2006, 51(9/10): 1131-1156.
- [26] 林国华, 傅德薰, 马延文. 空间发展混合流的大涡模拟[J]. 空气动力学学报, 2001, 19(3): 325-330.
LIN Guohua, FU Dexun, MA Yanwen. Large-eddy simulation of a spatially developing mixing layer[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2001, 19(3): 325-330. (in Chinese)
- [27] ARORA K, CHAKRAVARTHY K, CHAKRABORTY D. Large eddy simulation of supersonic, compressible, turbulent mixing layers[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 86(3): 592-598.
- [28] 陈懋章. 粘性流体动力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

(编辑: 陈 越)