

共轴对转封闭差动轮系固有特性及灵敏度分析

张栋林¹, 朱如鹏¹, 李苗苗¹, 扶碧波², 谭武中²

- (1. 南京航空航天大学 直升机传动技术重点实验室, 南京 210016;
2. 中国航空发动机集团有限公司 湖南动力机械研究所, 湖南 株洲 412002)

摘 要: 基于共轴对转封闭差动轮系的扭转动力学集中参数模型,求解了系统的固有频率和振型。理论分析了频率对刚度和质量的参数灵敏度,及频率变化轨迹中的模态跃迁现象。分析结果表明:根据振动特征可将系统振型分为扭转振动模式、行星轮振动模式和星轮振动模式,分别对应于系统的单根、 L (行星轮数)-1和 N (星轮数)-1重根频率;行星轮的个数对重根频率数值无影响;刚度变化率为正时,固有频率变化率为正,转动惯量变化率为正时,固有频率变化率为负;同种振动模式下的两条频率轨迹在接近时会发生模态跃迁。通过实例计算验证了理论分析的正确性,为共轴对转封闭差动轮系的固有特性分析与优化设计提供了依据。

关 键 词: 共轴对转; 封闭差动轮系; 固有特性; 灵敏度; 模态跃迁

中图分类号: V233.1

文献标志码: A

Natural characteristics and sensitivity analysis of a coaxial contra-rotating encased differential gear train

ZHANG Donglin¹, ZHU Rupeng¹, LI Miaomiao¹,
FU Bibo², TAN Wuzhong²

- (1. National Key Laboratory of Science and Technology on Helicopter Transmission,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. Hunan Aviation Powerplant Research Institute,
Aero Engine Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

Abstract: Based on the torsional vibration lumped-parameter model of the coaxial contra-rotating encased differential gear train, the natural frequencies and vibration modes of the system were solved. The results showed that all vibration modes of the planetary gear train can be categorized into three classes: rotational mode, stepped planet mode and planet mode, corresponding to the distinct frequency, L (Number of planet gear)-1 and N (Number of star gear)-1 multiple frequency respectively. The number of planets had no effect on the magnitude of the multiple frequency. When the change rate of stiffness was positive, the change rate of natural frequency was positive, and the change rate of natural frequency was negative when the change rate of moment of inertia was positive. Frequency loci veering occurred

收稿日期: 2020-08-15

基金项目: 国家自然科学基金(51775265); 南京航空航天大学“直升机传动技术重点实验室”开放课题(HTL-A-19G08)

作者简介: 张栋林(1986—),男,博士生,主要从事机械传动系统动力学研究。

通信作者: 朱如鹏(1959—),男,教授、博士生导师,博士,主要从事机械传动系统动力学研究。E-mail: rpzhu_nuaa@163.com

引用格式: 张栋林,朱如鹏,李苗苗,等. 共轴对转封闭差动轮系固有特性及灵敏度分析[J]. 航空动力学报, 2021, 36(4): 767-775.
ZHANG Donglin, ZHU Rupeng, LI Miaomiao, et al. Natural characteristics and sensitivity analysis of a coaxial contra-rotating encased differential gear train[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(4): 767-775.

when two frequencies in the same vibration mode were approaching. The correctness of the theoretical analysis was verified by an example, providing a basis for the analysis and optimization of the natural characteristics design of the coaxial contra-rotating encased differential gear train.

Key words: coaxial contra-rotating; encased differential gear train; natural characteristic; sensitivity; loci veering

共轴式双旋翼直升机具有共轴对转的两副旋翼可提供更大升力,采用推进桨提供前飞的推力时,可实现高速飞行,具有单旋翼直升机不可比拟的优点^[1]。为实现共轴反向双输出,以俄罗斯的卡系列为代表的双旋翼直升机主减速器主要采用了封闭差动行星齿轮传动方式。

封闭差动行星轮系由于封闭结构的存在,扭矩可以从多个路径传递到负载,比普通串联的行星传动承载能力更强,结构更紧凑,广泛应用于在工程机械、船舶设备以及航空工业等领域^[2]。

Howe 等^[3-4]从结构设计、润滑、效率等方面详细的研究了共轴对转输出齿轮箱,对轴、行星架和内齿圈等关键零件进行了有限元分析,并进行了润滑和效率试验。Kahraman 建立了直齿行星齿轮^[5]和复合行星轮系^[6]的纯扭转模型,分析了系统的固有频率和振型特征,指出当轴承刚度与啮合刚度比值大于 10 时,行星轮系的纯扭转模型与平移-扭转模型有较好的一致性。Lin 等^[7-8]建立了行星轮系的扭转-平移模型,计算了行星轮系的固有频率,分析了每种振动模式特性,并讨论了模态跃迁准则。

王世宇^[9]建立了行星齿轮传动的纯扭转模型,分析了系统的固有特性,给出了不同振动模式固有频率的解析表达式。罗玉涛等^[10]建立了两级行星齿轮系统的纯扭动力学模型,分析了连接部分的耦合刚度对系统振动特性的影响。鲍和云等^[11]采用矩阵摄动法求解了刚度参数变化对固有频率的灵敏度,并与求导法求解结果对比验证了摄动法的正确性。林何等^[12]建立斜齿行星传动系统的非线性动力学模型,研究了斜齿行星齿轮系统的典型振动模式。夏炀志强等^[13]建立了大速比行星齿轮传动的多自由度扭转动力学模型,分析了固有特性及共振转速与固有频率的关系。

本文以共轴式双旋翼直升机广泛采用的封闭差动齿轮传动系统为对象,建立了扭转动力学模型,研究了系统的固有频率及振型特征,理论分析了参数灵敏度及频率变化曲线中的模态跃迁准

则。计算实例并得到了行星轮个数、啮合刚度、扭转刚度和转动惯量对固有特性的影响规律,验证了理论分析的正确性,研究结果为复合行星系统的动态设计及优化提供理论参考。

1 共轴对转封闭差动轮系动力学模型

共轴对转封闭差动齿轮系统如图 1 所示,封闭级由太阳轮 Z_{s1} 、双联星轮 Z_{mi} 、 Z_{ni} ($i=1,2,\dots,L$) 和内齿圈 Z_{r1} 组成;差动级由太阳轮 Z_{s2} 行星轮 Z_{pj} ($j=1,2,\dots,N$) 和内齿圈 Z_{r2} 组成。太阳轮 Z_{s1} 和 Z_{s2} 、星轮 Z_{mi} 和 Z_{ni} 由花键连接,内齿圈 Z_{r1} 和 Z_{r2} 为双联齿圈。输入功率分别由封闭级和差动级传递到双联齿圈和行星架 C_2 实现反向共轴双输出,通过适当的参数设计,可满足齿圈和行星架输出转速相等。定义系统输入扭矩为 T_{in} ,负载扭矩为 T_c 和 T_r 。

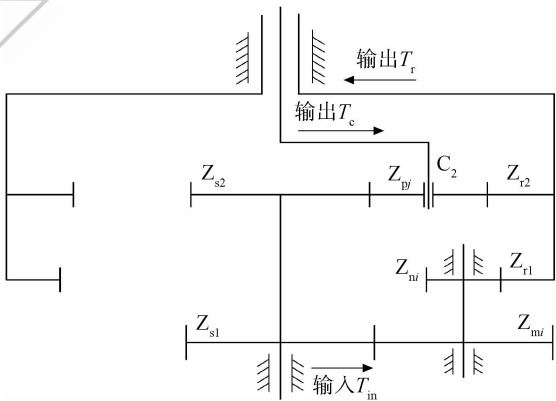


图 1 共轴对转齿轮传动系统简图
Fig. 1 Schematic diagram of coaxial contra-rotating gear train

对共轴对转齿轮系统做如下简化:每个行星排中的行星轮(星轮)尺寸、质量和转动惯量分别相等,且布置均匀;各星轮轴的扭转刚度相同;不计摩擦及误差。定义传动系统各构件扭转线位移为广义坐标

$$\boldsymbol{q} = [u_{s1}, u_{s2}, u_{r1}, u_{r2}, u_{c2}, u_{mi}, u_{ni}, u_{pj}]^T \quad (1)$$

建立共轴对转齿轮系统的扭转振动模型如图 2 所示。其中 k_s 、 k_x 、 k_r 分别为太阳轮轴、星轮轴

和双联齿圈的扭转刚度; k_{s1mi} 、 k_{r1ni} 、 k_{s2pj} 、 k_{r2pj} 分别为太阳轮 Z_{s1} 和星轮 Z_{mi} 、内齿圈 Z_{r1} 和星轮 Z_{ni} 、太阳轮 Z_{s2} 和行星轮 Z_{pj} 、内齿圈 Z_{r2} 和行星轮 Z_{pj} 的啮合刚度,阻尼符号 c 类似。

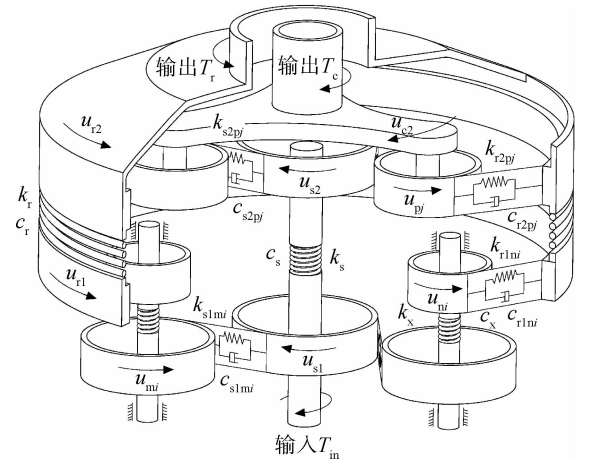


图 2 共轴对转齿轮系统的扭转动力学模型
Fig. 2 Torsional dynamic model for the coaxial contra-rotating gear train

2 共轴对转齿轮系统动力学微分方程

基于集中参数法^[14],根据牛顿第二定律可得到齿轮系统扭转动力学微分方程

$$\frac{I_{s1}}{r_{bs1}^2} \ddot{u}_{s1} + \sum_{i=1}^L k_{s1mi} \delta_{s1mi} + \frac{k_s}{r_{bs1}} \left(\frac{u_{s1}}{r_{bs1}} - \frac{u_{s2}}{r_{bs2}} \right) = \frac{T_{in}}{r_{bs1}} \quad (2a)$$

$$\frac{I_{s2}}{r_{bs2}^2} \ddot{u}_{s2} + \sum_{j=1}^N k_{s2pj} \delta_{s2pj} - \frac{k_s}{r_{bs2}} \left(\frac{u_{s1}}{r_{bs1}} - \frac{u_{s2}}{r_{bs2}} \right) = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{I_{r1}}{r_{br1}^2} \ddot{u}_{r1} - \sum_{i=1}^L k_{r1ni} \delta_{r1ni} + \frac{k_r}{r_{br1}} \left(\frac{u_{r1}}{r_{br1}} - \frac{u_{r2}}{r_{br2}} \right) = 0 \quad (2c)$$

$$\frac{I_{r2}}{r_{br2}^2} \ddot{u}_{r2} - \sum_{j=1}^N k_{r2pj} \delta_{r2pj} - \frac{k_r}{r_{br2}} \left(\frac{u_{r1}}{r_{br1}} - \frac{u_{r2}}{r_{br2}} \right) = -\frac{T_r}{r_{br2}} \quad (2d)$$

$$\left(\frac{I_{c2}}{r_{c2}^2} + Nm_p \right) \ddot{u}_{c2} - \sum_{j=1}^N k_{s2pj} \delta_{s2pj} \cos \alpha_{s2} - \sum_{j=1}^N k_{r2pj} \delta_{r2pj} \cos \alpha_{r2} = -\frac{T_c}{r_{c2}} \quad (2e)$$

$$\frac{I_m}{r_{bm}^2} \ddot{u}_{mi} - k_{s1mi} \delta_{s1mi} + \frac{k_x}{r_{bm}} \left(\frac{u_{mi}}{r_{bm}} - \frac{u_{ni}}{r_{bn}} \right) = 0 \quad (2f)$$

$$\frac{I_n}{r_{bn}^2} \ddot{u}_{ni} - \frac{k_x}{r_{bn}} \left(\frac{u_{mi}}{r_{bm}} - \frac{u_{ni}}{r_{bn}} \right) + k_{r1ni} \delta_{r1ni} = 0 \quad (2g)$$

$$\frac{I_p}{r_{bp}^2} \ddot{u}_{pj} - k_{s2pj} \delta_{s2pj} + k_{r2pj} \delta_{r2pj} = 0 \quad (2h)$$

式中,齿轮啮合副的相对位移定义为

$$\begin{cases} \delta_{s1mi} = u_{s1} - u_{mi} \\ \delta_{r1ni} = u_{ni} - u_{r1} \\ \delta_{s2pj} = u_{s2} - u_{pj} - u_{c2} \cos \alpha_{s2} \\ \delta_{r2pj} = u_{pj} - u_{r2} - u_{c2} \cos \alpha_{r2} \end{cases} \quad (2i)$$

式中 I_k ($k=s1, s2, r1, r2, c2, m, n, p$) 为构件的转动惯量; r_{bk} 为构件的基圆半径, r_{c2} 为行星轮轴心到行星架中心的距离; m_p 为行星轮质量; α_{r2} 、 α_{s2} 分别为差动级内、外啮合齿轮副的啮合角。

将方程(2i)代入方程(2a)~式(2h)整理可得到系统微分方程的矩阵形式。

$$M \ddot{q} + Kq = Q \quad (3)$$

式中 M 、 K 和 Q 分别为广义质量矩阵、刚度矩阵和外载荷列阵,均为 $5+2L+N$ 维。

3 系统固有特性分析

可通过求解系统动力学微分方程获得传动系统的固有特性,方程(3)的特征值问题为^[15]

$$(K - \lambda_v M) \phi_v = 0 \quad (4)$$

式中 $\lambda_v = \omega_v^2$, ω_v 为第 v 阶固有频率,对应的正则振型矢量为

$$\phi_v = [\varphi_{s1}^v, \varphi_{s2}^v, \varphi_{r1}^v, \varphi_{r2}^v, \varphi_c^v, \varphi_{mi}^v, \varphi_{ni}^v, \varphi_{pj}^v]^T$$

以表 1 所示的共轴对转齿轮传动系统参数为例,取星轮数目固定 $L=3$,改变行星轮数目 N ,由式(4)求得系统的固有频率如表 2。

表 1 共轴对转齿轮传动系统参数
Table 1 Coaxial contra-rotating gear train parameters

参数	数值
转动惯量/(kg·m ²)	$I_{s1}=0.0423, I_m=0.011, I_n=0.00076, I_{r1}=1.1475, I_{s2}=0.0223,$ $I_p=0.0037, I_{r2}=2.059, I_c=0.3413$
基圆半径/mm	$r_{bs1}=73.65, r_{bm}=69.8, r_{bn}=29.6, r_{br1}=176, r_{bs2}=71.42, r_{bp}=47, r_{br2}=165.4, r_c=126$
质量/kg	$m_p=2.156$
啮合刚度/(N/m)	$k_{s1mi}=k_{r1ni}=k_{s2pj}=k_{r2pj}=4.8 \times 10^8$
扭转刚度/((N·m)/rad)	$k_s=2.4 \times 10^6, k_x=8.6 \times 10^5, k_r=5.7 \times 10^8$
啮合角/(°)	$\alpha_{r2}=20, \alpha_{s2}=20$

表 2 不同行星轮数下系统固有频率

Table 2 Natural frequencies for various numbers of planets

重数	固有频率/Hz			
	N=3	N=4	N=5	N=6
m=1	0	0	0	0
	511.4	505.6	499.4	493.2
	1 229.5	1 240.9	1 241.7	1 238.2
	2 507.8	2 657.5	2 770.1	2 856.8
	3 322.2	3 322.0	3 322.5	3 323.4
	4 436.6	4 476.2	4 496.9	4 513.6
	4 656.5	4 898.3	5 155.8	5 410.8
m=L-1	6 704.4	6 704.4	6 704.4	6 704.4
	2 413.0	2 413.0	2 413.0	2 413.0
	6 668.1	6 668.1	6 668.1	6 668.1
m=N-1	3 826.6	3 826.6	3 826.6	3 826.6

由表 2 可知,共轴对转齿轮传动系统的固有频率按重根数不同可分为 3 组:单根频率、 $L-1$ 和 $N-1$ 重根频率,分别对应系统的扭转振动模式、星轮振动模式和行星轮振动模式,其中单根对应的固有频率共有 8 阶,零频率代表系统的刚体运动。增加行星轮的个数时,除第 2 阶频率外,其余单根频率随行星轮个数增加呈现增大的趋势,而 $L-1$ 重根和 $N-1$ 重根的固有频率数值与行星轮个数无关。

按照固有频率及各构件的典型振动特征,共轴对转齿轮传动系统有以下 3 种振动模式^[16]:

1) 扭转振动模式:对应的固有频率为单根,系统各中心构件均以不同幅度做扭转振动,且星轮和行星轮各自的振动幅值相同,即

$$\begin{cases} \varphi_{mi}^v = \varphi_{m1}^v \\ \varphi_{ni}^v = \varphi_{n1}^v \\ \varphi_{pj}^v = \varphi_{p1}^v \end{cases} \quad (5)$$

2) 星轮振动模式:对应的固有频率为 $L-1$ 重根,除双联星轮外,其他构件不振动,振型中各星轮的振动分量代数和为零。

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^L \varphi_{mi}^v = 0 \\ \sum_{i=1}^L \varphi_{ni}^v = 0 \end{cases} \quad (6)$$

3) 行星轮振动模式:对应的固有频率为 $N-1$ 重根,除行星轮外,其他构件不振动,振型中各行星轮的振动分量代数和为零。

$$\sum_{j=1}^N \varphi_{pj}^v = 0 \quad (7)$$

式(7)代入式(4),可得

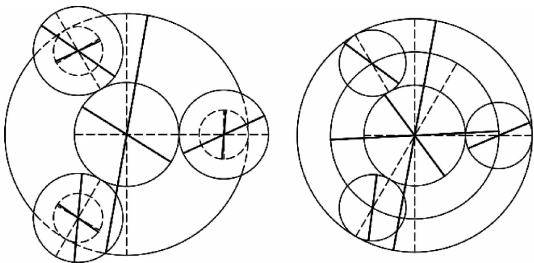
$$\omega_v = \sqrt{(k_{s2pj} + k_{r2pj})I_p/r_{bp}^2} \quad (8)$$

行星轮(星轮)个数 $L=N=3$ 时,部分振型模式如表 3 所示,对应的 3 种振动模态振型如图 3,图中的虚线为构件的初始位置,实线为振动之后构件的位置。

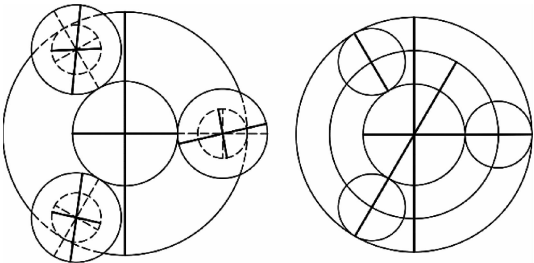
表 3 共轴对转传动系统的 3 种振动模式

Table 3 Three vibration modes of coaxial contra-rotating gear train

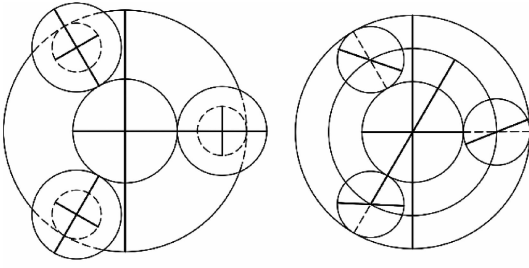
振型坐标	扭转振动模式 (511.4 Hz)	星轮振动模式 (2 413.0 Hz)	行星轮振动模式 (3 826.6 Hz)
φ_{s1}	-0.0839	0	0
φ_{s2}	-0.1363	0	0
φ_{r1}	0.0619	0	0
φ_{r2}	0.0613	0	0
φ_{c2}	-0.1190	0	0
φ_{m1}	-0.0617	0.0797	0
φ_{m2}	-0.0617	0.4159	0
φ_{m3}	-0.0617	-0.4956	0
φ_{n1}	0.0028	0.0263	0
φ_{n2}	0.0028	0.1371	0
φ_{n3}	0.0028	-0.1634	0
φ_{p1}	-0.0382	0	-0.3180
φ_{p2}	-0.0382	0	-0.3156
φ_{p3}	-0.0382	0	0.6336



(a) 扭转振动模式($\omega=511.4$ Hz)



(b) 星轮振动模式($\omega=2413$ Hz)



(c) 行星轮振动模式($\omega=3826.6$ Hz)

图 3 共轴对转齿轮系统模态振型图

Fig. 3 Natural modes of the coaxial contra-rotating gear train

4 参数的灵敏度分析及模态跃迁现象

4.1 参数的灵敏度计算

固有频率与特征值有下列关系^[15]

$$\omega'_v = \lambda'_v / (2\omega_v) \quad (9a)$$

$$\omega''_v = (2\lambda_v \lambda''_v - \lambda'^2_v) / (4\omega_v^3) \quad (9b)$$

为简化推导过程,本文采用导数法先分析特征值的灵敏性,再结合式(9)中固有频率与特征值的关系,进行固有频率和振型受参数影响的灵敏度分析。

若传动系统的结构参数为 a_j (可以是质量、刚度矩阵中的某一元素), 对式(4)求偏导后左乘 $\boldsymbol{\varphi}_v^T$, 可得到特征值对参数 a_j 的灵敏度公式^[17]

$$\frac{\partial \lambda_v}{\partial a_j} = \boldsymbol{\varphi}_v^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} - \lambda_v \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_j} \right) \boldsymbol{\varphi}_v \quad (10)$$

将特征向量对参数的导数表示为各阶特征向量的和,利用正交条件有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_v}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^l \alpha_k \boldsymbol{\varphi}_k \quad (11)$$

式中

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_v)} \boldsymbol{\varphi}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} - \lambda_v \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_j} \right) \boldsymbol{\varphi}_v & k \neq v \\ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_j} \boldsymbol{\varphi}_v & k = v \end{cases} \quad (12)$$

特征值对参数 a_j 的二阶导数为^[8]

$$\lambda''_v = \boldsymbol{\varphi}_v^T (\mathbf{K}'' - \lambda_v \mathbf{M}'' - 2\lambda'_v \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_v + \sum_{k=1, k \neq v}^l \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_v^T (\mathbf{K}' - \lambda_v \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_k]^2}{\lambda_v - \lambda_k} \quad (13)$$

4.1.1 固有频率对啮合刚度的灵敏度分析

由于质量阵 $\mathbf{M}$ 中不包含刚度元素,式(10)可写成

$$\frac{\partial \lambda_v}{\partial a_j} = \boldsymbol{\varphi}_v^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} \boldsymbol{\varphi}_v \quad (14)$$

将式(4)和式(9)代入式(14),考虑到同一行星排的不同行星轮啮合刚度相同,则固有频率对啮合刚度的灵敏度可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_v}{\partial k_{s1m}} = \frac{1}{2\omega_v} \sum_{i=1}^L (\delta_{s1mi}^v)^2 \\ \frac{\partial \omega_v}{\partial k_{r1n}} = \frac{1}{2\omega_v} \sum_{i=1}^L (\delta_{r1ni}^v)^2 \\ \frac{\partial \omega_v}{\partial k_{s2p}} = \frac{1}{2\omega_v} \sum_{j=1}^N (\delta_{s2pi}^v)^2 \\ \frac{\partial \omega_v}{\partial k_{r2p}} = \frac{1}{2\omega_v} \sum_{j=1}^N (\delta_{r2pi}^v)^2 \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\delta_{s1mi}^v, \delta_{r1ni}^v, \delta_{s2pi}^v, \delta_{r2pi}^v$ 为 v 阶模态振型下的啮合副的相对位移。

由上式可知,判断固有频率对啮合刚度灵敏度时,可以根据在该阶振型下啮合构件之间相对位移判断,相对位移越大,则对此啮合刚度越敏感,灵敏度越高^[18-19]。

4.1.2 固有频率对扭转刚度的灵敏度分析

同理,可得到固有频率对扭转刚度的灵敏度

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_v}{\partial k_s} = \frac{1}{2\omega_v} \left(\frac{\varphi_{s1}^v}{r_{bs1}} - \frac{\varphi_{s2}^v}{r_{bs2}} \right)^2 \\ \frac{\partial \omega_v}{\partial k_r} = \frac{1}{2\omega_v} \left(\frac{\varphi_{r1}^v}{r_{br1}} - \frac{\varphi_{r2}^v}{r_{br2}} \right)^2 \\ \frac{\partial \omega_v}{\partial k_x} = \frac{1}{2\omega_v} \sum_{i=1}^L \left(\frac{\varphi_{mi}^v}{r_{bm}} - \frac{\varphi_{ni}^v}{r_{bn}} \right)^2 \end{cases} \quad (16)$$

式中 φ_k^v 为 v 阶模态振型下构件 k 的振型坐标。

可以根据频率对应的振型下弹性件两端的构件相对转角来判断该阶固有频率对弹性件扭转刚度灵敏度,相对转角越大,则对此扭转刚度越敏感,灵敏度越高^[18-19]。

4.1.3 固有频率对转动惯量的灵敏度分析

由于刚度阵 $\mathbf{K}$ 中不包含转动惯量元素,由式(9)和式(10)可得

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial I_k} = -\frac{\omega_v}{2} \boldsymbol{\varphi}_v^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial I_k} \boldsymbol{\varphi}_v \quad (17)$$

式(17)表明,若转动惯量的变化率为正,则固有频率的变化率为负^[17]。

将式(4)代入式(17),得到固有频率对转动惯量的灵敏度

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial I_k} = \begin{cases} -\frac{\omega_v}{2} \left(\frac{\varphi_k^v}{r_{bk}} \right)^2 & k = s1, s2, r1, r2, c2 \\ -\frac{\omega_v}{2} \sum_{i=1}^L \left(\frac{\varphi_{ki}^v}{r_{bk}} \right)^2 & k = m, n \\ -\frac{\omega_v}{2} \left[N \left(\frac{\varphi_{c2}^v}{r_{c2}} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\varphi_{pj}^v}{r_{bp}} \right)^2 \right] & k = p \end{cases} \quad (18)$$

4.2 系统的模态能量

假定系统中各弹性件之间无耦合作用,则可由扭转势能和啮合势能叠加得到传动系统第 v 阶模态势能

$$U_v = U_s^v + U_r^v + \sum_{i=1}^L U_{xi}^v + \sum_{i=1}^L (U_{s1mi}^v + U_{r1ni}^v) + \sum_{j=1}^N (U_{s2pj}^v + U_{r2pj}^v) \quad (19)$$

式中 U_s^v 、 U_r^v 和 U_{xi}^v 分别为弹性件太阳轮轴、双联齿圈和星轮轴的扭转势能, U_h^v 为啮合势能,各项具体可表示为

$$\begin{cases} U_s^v = \frac{1}{2} k_s \left(\frac{\varphi_{s1}^v}{r_{bs1}} - \frac{\varphi_{s2}^v}{r_{bs2}} \right)^2 \\ U_r^v = \frac{1}{2} k_r \left(\frac{\varphi_{r1}^v}{r_{br1}} - \frac{\varphi_{r2}^v}{r_{br2}} \right)^2 \\ U_{xi}^v = \frac{1}{2} k_x \left(\frac{\varphi_{mi}^v}{r_{bm}} - \frac{\varphi_{ni}^v}{r_{bn}} \right)^2 \\ U_h^v = \frac{1}{2} k_h (\delta_h^v)^2 (h = s1mi, r1ni, s2pj, r2pj) \end{cases}$$

由式(16)和式(19)可知

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial k_l} = \frac{1}{\omega_v} \cdot \frac{\partial U_v}{\partial k_l} \quad (20)$$

上式可知,固有频率 ω_v 对系统某弹性件刚度 k_l 的灵敏度实质上反映了该阶模态的势能对该刚度的敏感程度。

系统第 v 阶模态动能可表示为各构件所具有的第 v 阶模态动能的和

$$T_v = \frac{1}{2} \omega_v^2 \boldsymbol{\varphi}_v^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_v = \frac{1}{2} \omega_v^2 \left(\sum m_k (\varphi_k^v)^2 \right) \quad (21)$$

式中 m_k 为系统构件广义质量。由式(18)、式(21)可得

$$\frac{\partial \omega_v}{\partial I_k} = -\frac{1}{\omega_v} \cdot \frac{\partial T_v}{\partial I_k} \quad (22)$$

由上式可知,固有频率 ω_v 对系统某一构件转动惯量 I_k 的灵敏度实质上反映了该阶模态的动能对该构件转动惯量的敏感程度。

4.3 模态跃迁现象研究

设随系统参数 a_j 变化,特征值 λ_v 、 λ_s 在点 V 处相互接近,对应的振型为 (λ_v, φ_v) 和 (λ_s, φ_s) ,对 λ_v 、 λ_s 进行泰勒级数展开^[15]

$$\tilde{\lambda}_v = \lambda_v + \epsilon \lambda'_v + \frac{1}{2} \epsilon^2 \lambda''_v \quad (23a)$$

$$\tilde{\lambda}_s = \lambda_s + \epsilon \lambda'_s + \frac{1}{2} \epsilon^2 \lambda''_s \quad (23b)$$

式中 ϵ 为小参数,若 $\lambda''_v = \lambda''_s = 0$, 两条固有频率轨

迹会相交,若 $\lambda''_v, \lambda''_s \neq 0$, 则两条轨迹发生模态跃迁,即两条固有频率变化曲线相互接近时在距离很近的位置以很大的曲率迅速转向分开的现象, λ'' 越大则模态跃迁现象越强烈。由式(13)可知 λ''_v 和 λ''_s 的大小主要取决于含 $1/(\lambda_v - \lambda_s)$ 的项,定义其为耦合因子 χ 来表征局部曲率和耦合强度,用于估算模态跃迁强度^[20]。

1) 当特征值 λ_v 、 λ_s 均为单根时,耦合因子表达式为

$$\chi_v = \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_v^T (\mathbf{K}' - \lambda_v \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_s]^2}{\lambda_v - \lambda_s} \quad (24a)$$

$$\chi_s = \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_s^T (\mathbf{K}' - \lambda_s \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_v]^2}{\lambda_s - \lambda_v} \quad (24b)$$

2) 当特征值 λ_v 为单根, λ_s 为 m 重根时,耦合因子表达式为

$$\chi_v = \sum_{k=s}^{s+m-1} \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_v^T (\mathbf{K}' - \lambda_v \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_k]^2}{\lambda_v - \lambda_s} \quad (25a)$$

$$\chi_q = \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_i^T (\mathbf{K}' - \lambda_s \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_v]^2}{\lambda_s - \lambda_v}, \quad i = s, \dots, s+m-1 \quad (25b)$$

3) 当特征值 λ_v 和 λ_s 分别为 n 和 m 重根时,耦合因子表达式为

$$\chi_p = \sum_{k=s}^{s+m-1} \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_p^T (\mathbf{K}' - \lambda_v \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_k]^2}{\lambda_v - \lambda_s} \quad p = v, \dots, v+n-1 \quad (26a)$$

$$\chi_q = \sum_{k=v}^{v+n-1} \frac{2[\boldsymbol{\varphi}_q^T (\mathbf{K}' - \lambda_s \mathbf{M}') \boldsymbol{\varphi}_k]^2}{\lambda_s - \lambda_v} \quad q = s, \dots, s+m-1 \quad (26b)$$

下面以啮合刚度 k_{s1m} 为变量参数进行模态跃迁现象研究。

1) 特征值 λ_v 、 λ_s 均为扭转振动模式频率

耦合因子 χ 表达式为

$$\chi_v = \frac{2}{(\lambda_v - \lambda_s)} \left(\sum_{i=1}^L \delta_{s1mi}^v \delta_{s1mi}^s \right)^2 = -\chi_s \neq 0 \quad (27)$$

可知,随参数 k_{s1m} 变化,扭转振动模式之间将会发生模态跃迁现象。

2) 特征值 λ_v 为扭转振动模式频率

当 λ_s 为星轮振动模式频率时,耦合因子为

$$\chi_v = \frac{2}{\lambda_v - \lambda_s} \sum_{k=s}^{s+L-1} \left[\sum_{i=1}^L (\varphi_{s1}^v - \varphi_{mi}^v) \varphi_{mi}^k \right]^2 = 0 \quad (28a)$$

$$\chi_q = \frac{2}{\lambda_s - \lambda_v} \left[\sum_{i=1}^L \varphi_{mi}^q (\varphi_{s1}^v - \varphi_{mi}^v) \right]^2 = 0 \quad (28b)$$

同理,当 λ_s 为行星轮振动模式频率耦合因子为 $\chi_v=\chi_q=0$ 。可知,随参数 k_{s1m} 变化,扭转振动模式频率与星轮和行星轮振动模式频率的轨迹会相交。

3) 特征值 λ_v 属于星轮振动模式频率

当 λ_s 同属于星轮振动模式时($\lambda_v\neq\lambda_s$)

$$\chi_p = \frac{2}{\lambda_v - \lambda_s} \sum_{k=s}^{s+L-1} \left[\sum_{i=1}^L \varphi_{mi}^p \varphi_{mi}^k \right]^2 \neq 0 \tag{29a}$$

$$\chi_q = \frac{2}{\lambda_s - \lambda_v} \sum_{k=v}^{v+L-1} \left[\sum_{i=1}^L \varphi_{mi}^q \varphi_{mi}^k \right]^2 \neq 0 \tag{29b}$$

当 λ_s 属于行星轮振动模式时,显然有 $\chi_v=\chi_s=0$ 。因此,随参数 k_{s1m} 变化,星轮振动模式之间发生模态跃迁,星轮振动模式与行星轮振动模式的固有频率轨迹相交。

5 模型算例及结果分析

取传动系统的行星轮个数 L 为3,星轮个数 N 为3,以表1中参数值进行实例计算与灵敏度和模态跃迁分析,为便于分析不考虑频率为零的情况。

5.1 固有频率对啮合刚度的灵敏度分析

为考查某阶频率对啮合刚度的灵敏度,可根据该频率对应的振型数值由式(15)得到,原始参数下灵敏度计算结果如图4所示。

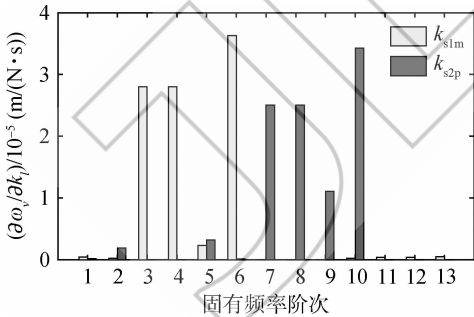


图 4 固有频率对啮合刚度的灵敏度

Fig. 4 Sensitivity of natural frequencies to mesh stiffness

由图4可知,行星轮振动模式频率(ω_7 、 ω_8)与啮合刚度 k_{s1m} 无关,对刚度 k_{s2p} 灵敏度高。低阶星轮振动模式频率(ω_3 、 ω_4)与啮合刚度 k_{s2p} 无关,对刚度 k_{s1m} 灵敏度高。扭转振动模式频率中频率 ω_6 对刚度 k_{s1m} 灵敏度高,频率 ω_9 、 ω_{10} 对刚度 k_{s2p} 灵敏度高。计算得到的固有频率随啮合刚度 k_{s1m} 、 k_{s2p} 的变化轨迹如图5、图6所示。

由图5可知,增大啮合刚度 k_{s1m} 对行星轮振

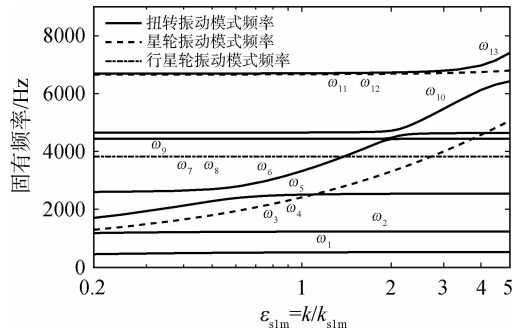


图 5 啮合刚度 k_{s1m} 对固有频率的影响

Fig. 5 Natural frequencies for varying mesh

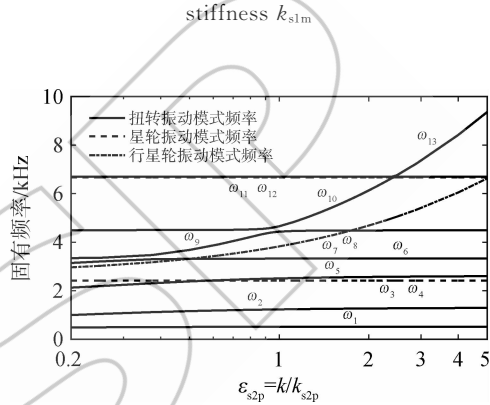


图 6 啮合刚度 k_{s2p} 对固有频率的影响

Fig. 6 Natural frequencies for varying mesh

动模式频率无影响,但显著增大低阶星轮振动模式频率,且不同程度增大各阶扭转振动模式频率,在原参数($\epsilon=1$)附近,对频率 ω_6 影响最大。由图6可知,增大啮合刚度 k_{s2p} 不改变星轮振动模式频率,但显著增大行星轮振动模式频率,且在原参数附近,刚度 k_{s2p} 对扭转振动频率 ω_9 、 ω_{10} 影响较大。上述变化轨迹规律与图4中的灵敏度结果一致。

随啮合刚度增加,对低阶频率影响减小,对高阶频率的影响增大,且变化范围内频率轨迹出现多次模态跃迁现象。

5.2 固有频率对扭转刚度的灵敏度分析

为考查某阶频率对扭转刚度的灵敏度,可根据该频率对应的振型数值由式(16)得到,计算结果如图7。

由图7可知,行星轮振动模型频率(ω_7 、 ω_8)与扭转刚度无关。星轮振动模型频率只与扭转刚度 k_x 相关,且高阶频率对刚度 k_x 敏感度更高。扭转振动模式中固有频率 ω_2 和 ω_{13} 分别对扭转刚度 k_s 和 k_x 灵敏度高。计算得到不同的扭转刚度下系统的固有频率变化轨迹如图8、图9所示。

由图8可知,增大太阳轮轴的扭转刚度 k_s 对

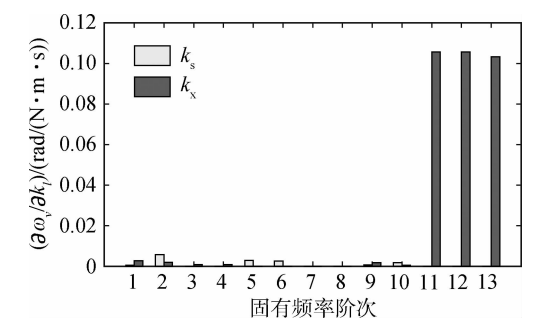


图 7 固有频率对扭转刚度的灵敏度
Fig. 7 Sensitivity of natural frequencies to torsional stiffness

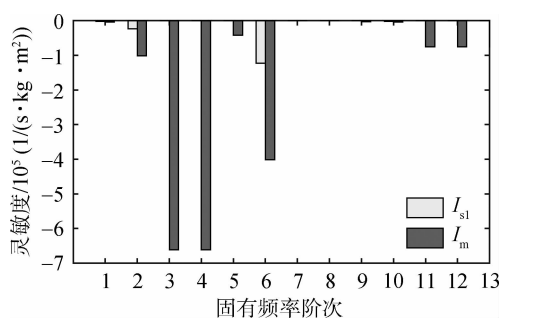


图 10 固有频率对转动惯量的灵敏度
Fig. 10 Sensitivity of natural frequencies to the moment of inertia

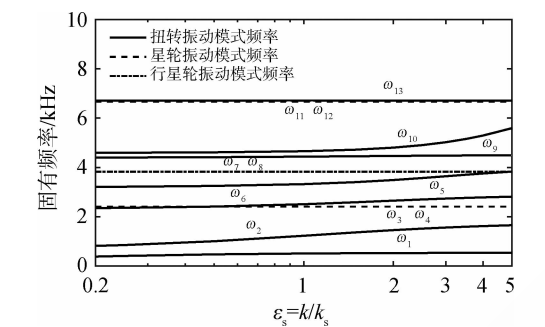


图 8 太阳轮轴扭转刚度 k_s 对固有频率的影响
Fig. 8 Influence of sun gear shaft torsional stiffness k_s on natural frequencies

与 I_{s1} 、 I_m 无关,低阶星轮振动模式频率(ω_3 、 ω_4)对星轮转动惯量 I_m 灵敏度更高。扭转振动模式中 ω_6 、 ω_2 对 I_{s1} 、 I_m 灵敏度高。计算得到不同 I_{s1} 、 I_m 时系统的固有频率变化轨迹如图 11、图 12。

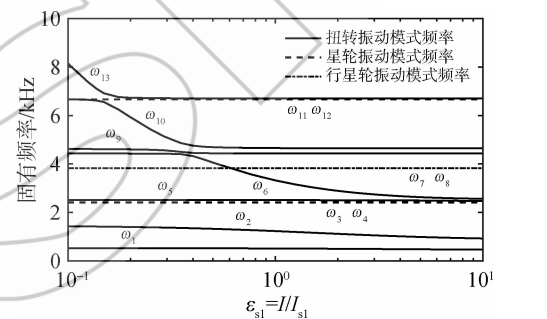


图 11 太阳轮转动惯量 I_{s1} 对固有频率的影响
Fig. 11 Influence of the moment of inertia of sun gear I_{s1} on natural frequencies

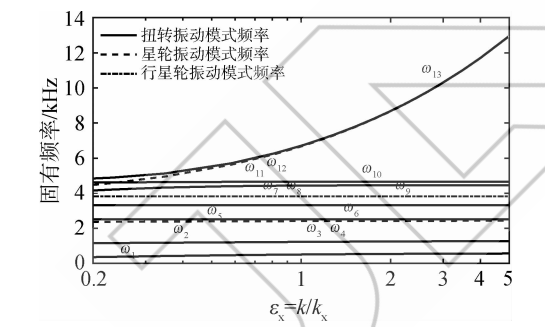


图 9 星轮轴扭转刚度 k_x 对固有频率的影响
Fig. 9 Influence of star gear shaft torsional stiffness k_x on natural frequencies

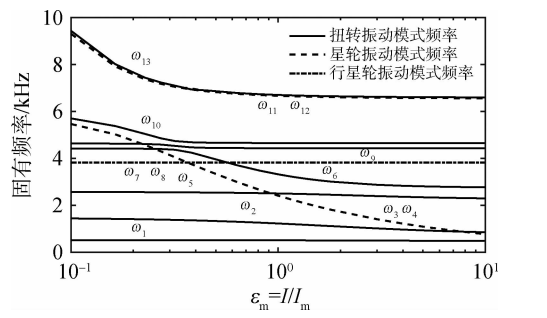


图 12 星轮转动惯量 I_m 对固有频率的影响
Fig. 12 Influence of the moment of inertia of star gear I_m on natural frequencies

星轮和行星轮振动模式频率无影响,但能显著增加扭转振动模式频率 ω_2 、 ω_5 、 ω_6 和 ω_{10} 。由图 9,增大扭转刚度 k_x 对行星轮振动模式频率无影响,但会显著增大使高阶扭转振动模式频率 ω_{13} 和高阶星轮振动模式阶频率 ω_{11} 、 ω_{12} 。

5.3 固有频率对转动惯量的灵敏度分析

为考查某阶频率对构件转动惯量的敏感度,可根据该频率对应的振型数值由式(18)得到,计算结果如图 10。

由图 10 可知,行星轮振动模式频率(ω_7 、 ω_8)

由图 11 可知,增加太阳轮的转动惯量 I_{s1} ,对行星轮和星轮振动模式频率无影响,但使扭转振动模式频率 ω_2 、 ω_6 呈显著的下降趋势。

由图 12,增加 I_m 对行星轮振动模式频率无影响,但使星轮振动模式频率 ω_3 、 ω_4 和扭转振动模式频率 ω_2 、 ω_6 呈较大下降趋势。整个变化范围

内,转动惯量对高阶频率影响减小,对低阶频率的影响增大,且频率轨迹出现多次模态跃迁现象。

6 结 论

本文分析了共轴对转封闭差动齿轮系统的固有特性以及频率对刚度和转动惯量的灵敏度,研究了频率变化轨迹中的模态跃迁准则,并计算了具体的齿轮系统实例。

1) 共轴对转齿轮传动系统的固有频率按重根数不同可分单根、 $L-1$ 重根和 $N-1$ 重根,分别对应于系统的三种振型模式:扭转振动模式、星轮振动模式和行星轮振动模式。

2) 固有频率随啮合刚度和扭转刚度增加而增大,随各构件转动惯量增大而减小,重根频率的数值与行星轮个数无关。

3) 某阶模态振型中两个构件之间相对位移越大,则此阶频率对构件间的啮合刚度或扭转刚度越敏感,参数灵敏度越高。

4) 同种振动模式的两条固有频率轨迹在接近时发生了模态跃迁,不同振动模式的固有频率轨迹不存在模态跃迁。

参考文献:

[1] 陈铭. 共轴双旋翼直升机的技术特点及发展[J]. 航空制造技术,2009(17):26-31.
CHEN Ming. Technology characteristic and development of coaxial rotor helicopter[J]. Aeronautical Manufacturing Technology,2009(17):26-31. (in Chinese)

[2] 饶振刚. 行星齿轮传动设计[M]. 北京:化学工业出版社,2003.

[3] HOWE D C, SUNDT C V, MCKIBBON A H. Advanced counter-rotating gearbox detailed design report[R]. NASA CR-180883,1988.

[4] HOWE D C, MCKIBBIN A H. Design of a gear drive system for counter-rotating fan rotors[R]. AIAA 89-2820,1989.

[5] KAHRAMAN A. Natural modes of planetary gear trains[J]. Journal of Sound and Vibration,1994,173(1):125-130.

[6] KAHRAMAN A. Free torsional vibration characteristics of compound planetary gear trains[J]. Mechanism and Machine Theory,2001,36(8):953-971.

[7] LIN J, PARKER R G. Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration[J]. Journal of Vibration and Acoustics,1999,121:316-321.

[8] LIN J, PARKER R G. Natural frequency veering in planetary gears[J]. Mechanics of Structures and Machines,2001,29(4):411-429.

[9] 王世宇. 基于相位调谐的直齿行星齿轮传动动力学理论与实验研究[D]. 天津:天津大学,2005.
WANG Shiyu. Theoretical and experimental investigation on dynamics of spur planetary gear transmissions based on

planet phasing theory [D]. Tianjin: Tianjin University, 2005. (in Chinese)

[10] 罗玉涛,陈营生. 混合动力两级行星机构动力耦合系统动力学建模及分析[J]. 机械工程学报,2012,48(5):70-75.
LUO Yutao, CHEN Yingsheng. Dynamic modeling and analysis of power coupling system with two-stage planetary gear trains for hybrid system[J]. Journal of Mechanical Engineering,2012,48(5):70-75. (in Chinese)

[11] 鲍和云,姜慧卉,朱如鹏,等. 行星轮系固有频率的灵敏度分析[J]. 机械科学与技术,2016,35(9):1323-1329.
BAO Heyun, JIANG Huihui, ZHU Rupeng, et al. Natural frequencies sensitivity analysis of planetary gear train[J]. Mechanical Science and Technology, 2016, 35 (9): 1323-1329. (in Chinese)

[12] 林何,王三民,董金城. 斜齿行星齿轮传动系统振动模式与动载特性[J]. 航空动力学报,2015,30(9):2298-2304.
LIN He, WANG Sanmin, DONG Jincheng. Vibration mode and dynamical characteristics of helical planetary gear train[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30 (9): 2298-2304. (in Chinese)

[13] 夏扬志强,秦大同. 基于低耗齿轮的大速比行星齿轮传动固有特性及振动分析[J]. 振动与冲击,2018,37(2):242-260.
XIA Yangzhiqiang, QIN Datong. Natural characteristics and vibration of a high-speed-ratio planetary gear transmission with low-loss gears[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37 (2): 242-260. (in Chinese)

[14] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学:振动、冲击、噪声[M]. 北京:科学出版社,1997.

[15] LIN J, PARKER R G. Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters[J]. Journal of Sound and Vibration,1999,228(1):109-128.

[16] ZHANG L, WANG Y, WU K, et al. Dynamic modeling and vibration characteristics of a two-stage closed-form planetary gear train[J]. Mechanism and Machine Theory,2016,97:12-28.

[17] 刘习军,贾启芬. 工程振动理论与测试技术[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[18] 方治华. 振动系统特征值灵敏度分析的研究及应用[J]. 包头钢铁学院学报,1997,16(1):70-74.
FANG Zhihua. Research and application of sensitivity analysis for eigenvalues of vibration system[J]. Journal of Baotou University of Iron and Steel Technology, 1997, 16 (1): 70-74. (in Chinese)

[19] 王世宇,宋铁民,沈兆光,等. 行星传动系统的固有特性及模态跃迁研究[J]. 振动工程学报,2005,18(4):412-417.
WANG Shiyu, SONG Yimin, SHEN Zhaoguang, et al. Research on natural characteristics and loci veering of planetary gear transmissions[J]. Journal of Vibration Engineering, 2005, 18 (4): 412-417. (in Chinese)

[20] 赵永强,李瑰贤,常山,等. 两级人字齿行星传动系统的模态跃迁现象[J]. 吉林大学学报(工学版),2011,41(1):133-138.
ZHAO Yongqiang, LI Guixian, CHANG Shan, et al. Loci veering of two-stage double helical tooth planetary gear train[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2011, 41 (1): 133-138. (in Chinese)