

气流激励下叶片振动响应分析方法

田少杰, 漆文凯, 许正华
(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 为开展气流激励下叶片振动响应分析方法研究,建立了气动激振力预估方法,采用非线性谐波法对叶排进行三维非定常流动分析,获得叶片表面的脉动压力,编制流固转换程序,计算叶片所受的气动激振力。建立了叶片气动阻尼分析方法,基于能量法和弱耦合分析法,对叶片与流场进行流固弱耦合分析,将气动力对运动的叶片所做的气动负功等效为黏滞阻尼力所做的功,求得转子叶片的模态气动阻尼比。建立了叶片在气流激励下的振动响应分析方法,基于气动激振力和叶片模态气动阻尼比,采用模态叠加法分析叶片振动响应。使用该方法,针对发动机中 1.5 级压气机转、静子叶排模型,计算了转子叶片在真实流场中的气动激振力、前 8 阶模态气动阻尼比以及在气动激振力与气动阻尼共同作用下转子叶片的振动响应,振动应力达到 100 MPa。

关 键 词: 叶片; 流固耦合; 气动激振力; 气动阻尼; 振动响应

中图分类号: V231.1 **文献标志码:** A

Method of blade vibration response analysis under airflow excitation

TIAN Shaojie, QI Wenkai, XU Zhenghua
(College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: In order to study the method of blade vibration response analysis under air-flow excitation, the aerodynamic excitation force prediction method was established. The nonlinear harmonic method was used to conduct three-dimensional unsteady flow analysis of the blades, obtain the fluctuating pressure on the blade surface, compile the flow-solid conversion program, and calculate the aerodynamic excitation force on the blade. The aerodynamic damping analysis method for blades was established. Based on the energy method and the weak coupling analysis method, the fluid-solid weak coupling analysis was carried out for blades and flow fields. The aerodynamic negative work done by aerodynamic forces on moving blades was equivalent to the work done by viscous damping force, and the modal aerodynamic damping ratio of rotor blades was obtained. The vibration response analysis method of blade excited by airflow was established, and based on aerodynamic excitation force and modal aerodynamic damping ratio of blade, modal superposition method was adopted. Using this method, the aerodynamic excitation force, the modal aerodynamic damping ratio of the first eight modes and the vibration response of the rotor blade under the combined action of the aerodynamic excitation force and the aerodynamic damping were calculated for the rotor stator blade array model of the 1.5-stage compressor in the engine. The results showed that

收稿日期:2020-06-20
基金项目:国家科技重大专项(2017-IV-0007-0044)
作者简介:田少杰(1994—),男,硕士,主要研究方向为结构强度与振动。
通信作者:漆文凯(1970—),男,副教授,博士,主要研究方向为结构强度与振动。E-mail:qwukai@nuaa.edu.cn
引用格式:田少杰,漆文凯,许正华. 气流激励下叶片振动响应分析方法[J]. 航空动力学报,2021,36(4):826-838. TIAN Shaojie, QI Wenkai, XU Zhenghua. Method of blade vibration response analysis under airflow excitation[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(4): 826-838.

the vibration stress reached 100 MPa.

Key words: blade; fluid-solid coupling; aerodynamic excitation force; aerodynamic damping; vibration response

航空发动机之所以成为研发与制造难度最大的现代工业产品,主要原因之一在于其结构部件工作环境恶劣(高温高压),且对可靠性要求很高。特别是转子叶片,其不仅受离心力作用,还受到上游叶排尾迹、势流干扰、激波等周期性非定常气动激励的影响。这种影响是引起高周疲劳失效故障的主要原因。因此,开展气流激励下叶片振动响应分析方法研究,并获得转/静子叶排间距对其振动应力影响规律,完善叶排间距设计方法,具有重要的科学意义及工程价值。

建立气流激励下叶片振动响应分析方法,并获得叶排间距变化对叶片振动应力影响规律的研究,涉及到的主要问题包括:叶片表面气动激振力的预估、叶片气动阻尼的分析、叶片在气流激励下的强迫振动响应。下文分别给予研究综述。

气动激振力的预估方法:对叶排进行三维非定常流动分析,从而获得叶片表面所受的脉动压力;在此基础上,通过流固转换,将脉动压力转化为气动激振力。目前用于叶排非定常数值模拟的方法主要三种方法:相位延迟法、叶片约化法和非线性谐波法^[1-3]。其中刘锡阳等人^[4]采用相位延迟法,实现了两排叶片非定常流动三维数值模拟,计算结果表明相位延迟法具有计算经济、模拟准确的特点。Wang 等人^[5]采用相位延迟法研究了静-转子轴向间距对动叶振动应力的影响。结果表明在确定的轴向间距范围内,转子叶片振动应力随轴向间距的增大而减小。Arnone^[6]采用叶片约化法,通过分析不同约化比,并和真实的几何数值计算结果对比后认为,约化比相比真实几何的偏差越小,可以得到越可靠的结果。李亚等人^[7]对某型发动机的一级跨声速风扇转/静子叶片进行了非定常流场数值模拟。通过对叶片特征截面的时均载荷分析,获得了静叶的约化量对下游激波位置的影响。Feng 等人^[8]提出了一种基于 Favre 平均非线性谐波法,并以对亚、跨声速压气机为例,验证了该方法与基于时间推进非定常计算的一致性。Burton 等人^[9]采用非线性谐波流动模拟,并与实验数据的比较表明:数值模拟的压力幅值与实验数据吻合较好。药晓江等人^[10]采用非线性谐波法和传统双时间步法对风扇叶片和涡轮叶片分别进行了非定常计算分析,结果表明:

在相同计算机硬件条件下,非线性谐波法可节省 40% 的计算时间。通过非定常计算得到叶片的所受的脉动压力可在时域内或频域内进行流固转换,获得叶片表面所受的气动激振力。

总的来说,叶片约化法对流体计算域进行约化后,大大减少了计算量和计算时间,但叶片个数的改变相应改变了叶片所受激振力的激励频率。相位延迟法只能模拟两排叶片的流动情况,不适用于更多级数叶片的流场模拟^[11]。而非线性谐波法基于求解时间平均和不同谐波阶次的定常输运方程,能够在频域内有效地求解非定常问题,尤其对于转静干涉问题有较高的计算效率和精度^[12]。故本文采用非线性谐波法进行非定常计算,获得叶片表面所受的脉动压力,进而通过流固转换,获得叶片表面的气动激振力。

气动阻尼的分析方法:对叶片进行流固耦合分析,获得气动力对叶片所做的气动负功,然后根据能量法,即:当叶片做等幅的强迫振动响应时,根据能量等效的原则,在一个振动周期内叶片气动力所得的负功等效为黏性阻尼力的功,进而求得叶片的气动阻尼。Seinturier 等人^[13]根据能量等效原则,提出了一种新的等效模态气动阻尼比的计算表达式。Srivastava 等人^[14]考虑到模态气动阻尼比通常很小,对 Seinturier 等人提出的等效模态气动阻尼比的计算表达式给出了一个近似解。郭雪莲等人^[15]基于弱耦合的思想,提出了气动等效黏滞阻尼系数的定义,这种定义方式仿照了结构等效黏滞阻尼系数的定义,把气动阻尼等效为黏性阻尼。张陈安等人^[16]基于叠加原理,与传统的能量法相结合,在叶轮机叶片做小振幅运动的前提下,提出了一种非定常气动力降阶模型,提高了气动阻尼计算的效率。肖军等人^[17]为解决耦合计算过程中动网格的网格变形限制多、流固数据传递效率低的问题,独立开发了流体网格变形控制程序和非定常流动模拟计算程序,实现了流场中振动叶片气动阻尼的计算。

总的来说,气动阻尼的数值计算方法主要分为两种^[18]:弱流固耦合法和强流固耦合法。弱流固耦合法进行计算时,其耦合过程体现为:把流体对固体的作用视为外力或气动阻尼效应,固体的运动作用在流体上使流体发生强迫运动。强流固

耦合法同样是将固体方程与流体方程联立求解，其耦合过程比弱耦合法更加严谨。它要求流体与固体每各自进行一步计算之后，都要进行一次载荷传递，即流体计算得到的力载荷传递给固体，固体计算得到的位移载荷传递给流体。该方法将数据在流体与固体之间往复计算，可以准确地求解气动非线性较强的问题。该方法的缺点是计算量大，计算成本较高。鉴于弱流固耦合具有较高的精度，又兼顾计算效率和经济性，本文采用弱耦合法获得气动力所做的气动功，进而根据能量法获得气动阻尼比。

气流激励下的强迫振动响应分析方法可分为瞬态分析和稳态分析。郑赞等人^[19]采用 ANSYS 软件的瞬态响应分析方法对叶片的受力响应进行了分析。对比分析了跨声速和亚声速条件下叶片的强迫响应，得到了两种工况下叶片的强迫响应特性。Palazotto 等人^[20]为了模拟叶片的高周疲劳状态，对不同叶片进行了动态加载，并且开发了一种计算应力和位移模式的瞬态分析工具。结果表明加载激励的幅值与产生叶片最大应力之间存在一定的关系。王梅^[21]研究采用稳态分析法分析了前排静子叶片的尾流对后排转子叶片振动的影响。Piraccini 等人^[22]开发了一组强迫振动响应计算工具，即：将计算得到的叶片上的非定常压力分布映射到叶片的有限元模型上，并进行强迫响应分析以预估涡轮叶片的振动响应。

总的来说，两种方法所得计算结果都可与实验值相吻合，表明这两种方法是可行的。与稳态分析相比，瞬态分析具有激振力信息完整的优点，但收敛性较差，计算时间较长。当只考虑某阶共振响应时，稳态分析比瞬态分析的计算量要小得多，不存在收敛问题。然而，由于只计算了某一频率下的响应，因此会丢失一些激振力的信息，使得稳态分析结果偏小。

本文开展气流激励下叶片振动响应分析方法研究，主要思路和流程是：首先，基于非线性谐波法对转/静子模型进行非定常流场计算，同时得到了转子表面的非定常压力分布。利用快速傅里叶变换对非定常结果进行频谱分析，将时域结果转变为频域结果，再根据不同频率对应的幅值，将振幅较大的前几阶关键频率和对应载荷进行提取，并利用这些载荷来近似模拟原流场。在此基础上，通过自行编制的流固转换接口程序获得叶片体固体网格表面所受的气动激振力，建立了气动力的预估方法；然后，对转/静子叶片进行流固耦

合计算，计算得到气动力对叶片所做的气动功，基于能量法分析原理，并将气动功等效为黏滞阻尼力的功，进而求得转子叶片的模态气动阻尼比，建立了气动阻尼的分析方法；接着，将气动激振力和气动阻尼加载到叶片上，采用模态叠加法对叶片强迫振动响应分析，建立一套适合工程应用的气流激励下叶片振动响应分析方法。计算流程如图 1。

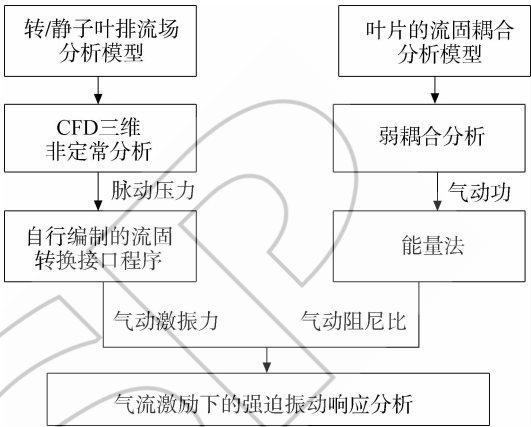


图 1 方法流程图
Fig. 1 Method flow chart

1 气动激振力预估方法

为了更精准得到叶片表面所受的气动激振力，本文采用非线性谐波法对转/静子叶排三维非定常流动分析获得叶片表面所受的脉动压力，在此基础上，通过自行编制流固转换接口程序，获得固体域内叶片表面所受的气动激振力，其具体分析流程如图 2 所示。

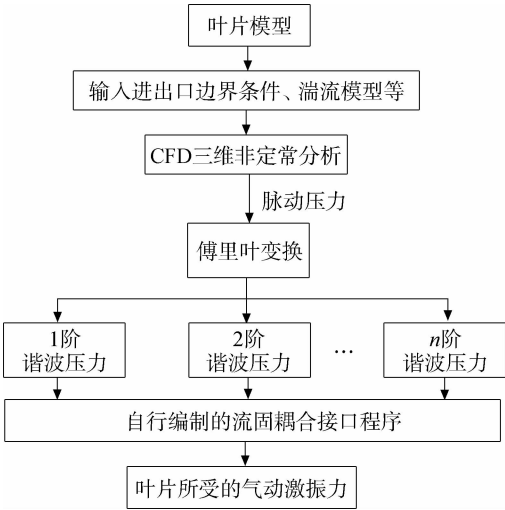


图 2 气动激振力预估技术路线图
Fig. 2 Technical roadmap of aerodynamic excitation force prediction

1.1 非线性谐波法

非线性谐波法假设非定常流动由时均流动与若干具有周期性流动特性的扰动叠加而成,如式(1)所示:

$$U(\mathbf{r}, t) = \bar{U}(\mathbf{r}) + \sum U'(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{r}$ 为坐标向量, t 表示时间。周期性流动可以用谐波函数来逼近,在周期性扰动假设的基础上,将守恒型变量 $U(\mathbf{r}, t)$ 分解成时均值 $\bar{U}(\mathbf{r})$ 与若干个周期扰动 $U'(\mathbf{r}, t)$ 之和,其中 n 阶谐波可以逼近周期扰动 $U'(\mathbf{r}, t)$,如式(2)所示:

$$U'(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^n [\tilde{U}_k(\mathbf{r})e^{i\omega_k t} + \tilde{U}_{-k}(\mathbf{r})e^{i\omega_{-k} t}] \quad (2)$$

式中 ω 为系统固有频率,谐波振幅 $\tilde{U}_k$ 和 $\tilde{U}_{-k}$ 是共轭复根, k 为谐波阶数,当 $k=1$ 时,其频率等于叶片的通过频率。

通过对非定常方程进行时间平均,得到了一个时均方程,用有限体积法来表示为

$$\Theta_i \frac{d\bar{U}}{dt_i} = - \sum_{\text{cellfaces}} \bar{F}_c \mathbf{S} + \sum_{\text{cellfaces}} \bar{F}_v \mathbf{S} + \Theta_i \bar{S}_{ti} \quad (3)$$

其中 i 是网格编号; Θ_i 代表网格单元; $\mathbf{S}$ 向量的大小为单元的面积,其为面法向; $\bar{F}_c$ 和 $\bar{F}_v$ 分别是离散的对流项和黏性项; $\bar{S}_{ti}$ 是源项。

非线性使得确定性应力项 τ_{detc} 和 τ_{detcv} 出现在时均方程中,其对流和黏滞通量的贡献如下:

$$\bar{F}_v \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{D}}_x \cdot \mathbf{S} \\ \bar{\mathbf{D}}_y \cdot \mathbf{S} \\ \bar{\mathbf{D}}_z \cdot \mathbf{S} \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) + \bar{q}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{\text{detc}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{B}$ 为生成压力项, $\bar{q}_v$ 为黏滞耗散项。当 $\bar{\mathbf{D}}_x(\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ 、 $\bar{\mathbf{D}}_y(\tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz})$ 和 $\bar{\mathbf{D}}_z(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz})$ 为应力矢量时,确定性应力项 τ_{detc} 和 τ_{detcv} 分别可写成如下式:

$$\tau_{\text{detc}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{v'_x[(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}]} \\ \overline{v'_y[(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}]} \\ \overline{v'_z[(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}]} \\ \overline{H'[(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}]} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\tau_{\text{detcv}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}'_x \cdot \mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{D}}'_y \cdot \mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{D}}'_z \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S} \quad (6)$$

式中 H 为流体的焓, ρ 为流体的密度, $\mathbf{v}$ 为流体的速度。

将1阶线性化方程代入频域,使得输运方程与时均流方程一样具有空间依赖性(用上标 $\sim$ 表示),采用有限体积法来表示为

$$\Theta_i \frac{d\tilde{U}}{dt_i} = - \sum_{\text{faces}} \tilde{F}_c \mathbf{S} + \sum_{\text{faces}} \tilde{F}_v \mathbf{S} + \Theta_i \tilde{S}_{ti} \quad (7)$$

$$\tilde{F}_c \mathbf{S} = \begin{bmatrix} (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \\ (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \tilde{v}_x + (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \bar{v}_x + \tilde{p} S_x \\ (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \tilde{v}_y + (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \bar{v}_y + \tilde{p} S_y \\ (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \tilde{v}_z + (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \bar{v}_z + \tilde{p} S_z \\ (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \tilde{H} + (\tilde{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \bar{H} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\tilde{F}_v \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{D}}'_x \cdot \mathbf{S} \\ \bar{\mathbf{D}}'_y \cdot \mathbf{S} \\ \bar{\mathbf{D}}'_z \cdot \mathbf{S} \\ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) + \bar{q}_v \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}'_x \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{D}}'_x \mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{D}}'_y \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{D}}'_y \mathbf{v} \\ \bar{\mathbf{D}}'_z \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{D}}'_z \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (10)$$

扰动方程为线性化方程,分别求解两个扰动 f' 和 g' 的傅里叶展开式,如下所示:

$$f' = \sum_{k=1}^N f' k \quad g' = \sum_{k=1}^N g' k \quad (11)$$

由于傅里叶展开式的正交性, f' 和 g' 产生的不确定应力项为

$$\overline{f' g'} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} |f k| |g k| \cos(\phi f g) \quad (12)$$

式中 $|f k|$ 和 $|g k|$ 为扰动量的幅值, $\phi f g$ 为 f' 和 g' 的相角之差,将线性化的方程投影到频域,则谐波方程变为定常形式,如下所示:

$$i\omega k \Theta_i \tilde{U}_k = - \sum_{\Delta S} \tilde{F}_c \mathbf{S} + \sum_{\Delta S} \tilde{F}_v \mathbf{S} + \Theta_i Q' i \quad (13)$$

1.2 流固转换接口程序

通过转/静子叶排三维非定常流动计算获得了转子叶片表面的非定常压力,但非定常压力需要完成气动激振力的转换才能进行叶片的强迫振动响应分析。首先,利用快速傅里叶变换对非定常压力进行频谱分析,将谐波压力较大的前几阶关键频率和对应幅值进行提取,并利用提取后的谐波压力来近似模拟原流场;然后,通过流固插值将非定常压力的幅值加载到固体域内叶片表面各

节点上;最后,将非定常压力的幅值与该单元的面积相乘,得到该单元的气动激振力。本文应用 MATLAB 和 ANSYS 的二次开发语言 APDL 编制流固转换的接口程序。

1.2.1 傅里叶变换

傅里叶变换能够把任何与时间相关的数据分解成 n 阶谐波的总和。本文通过傅里叶变换将叶片表面的随时间变化的压力转化为 n 阶谐波压力,这样就为求解叶片在气流激励下的强迫振动响应带来极大的方便。

对于任何连续时间周期信号可用周期为 N 的正弦序列表示,其基频成分为

$$e_1(n) = e^{i(2\pi/N)n} \tag{14}$$

k 次谐波序列为

$$e_k(n) = e^{i(2\pi/N)kn} \tag{15}$$

但离散级数所有谐波成分中只有 N 个是独立的,这是连续傅里叶级数的不同之处,即

$$e^{i(2\pi/N)[(k+N)n]} = e^{i(2\pi/N)kn} \tag{16}$$

因此,有

$$e_{k+N}(n) = e_k(n) \tag{17}$$

将周期序列展成离散傅里叶级数时,只需取 $k=0\sim N-1$ 这 N 个独立的谐波分量,所以一个周期序列的离散傅里叶级数只需包含这 N 个指数,即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{i(2\pi/N)kn} \tag{18}$$

利用正弦函数的周期性就可求解系数 $\tilde{X}(k)$ 。

1.2.2 流固插值

流体网格数量多,而固体网格数量少,鉴于流固网格不匹配,需要采用数值插值法进行流固网格数值插值。在众多插值函数中,埃米尔特插值函数插值精度高,具有一般性,既保证了插值多项式在插值节点上的函数值相等,又保证了节点上的导数值相等^[23]。故本文采用埃米尔特插值法,其具体做法是:

对于埃米尔特插值基函数

$$\begin{aligned} P_i(x) = & (x-x_k) \left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \right)^2 m_k + \\ & (x-x_{k+1}) \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^2 m_{k+1} \\ & \left(1 + 2 \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right) \left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \right)^2 y_k + \\ & \left(1 + 2 \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \right) \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^2 y_{k+1} \end{aligned} \tag{19}$$

式中 $P(x_k) = y_k, P(x_{k+1}) = y_{k+1}, P'(x_k) = m_k,$

$P'(x_{k+1}) = m_{k+1}$ 为流场叶片壁面的离散网格节点所形成的空间曲面 $G=f(x_i, y_i, z_i)$ 所对应的 x 轴坐标值,那么扩展成为三维埃米尔特插值函数是

$$P_{ijk}(x, y, z) = P_i(x) P_j(y) P_k(z) \tag{20}$$

1.2.3 激振力的转化

假设基于流场叶片壁面的离散网格节点所形成的空间曲面满足 $G=f(x_i, y_i, z_i, \gamma_i)$,而基于固体域叶片的离散网格节点所形成的空间曲面满足 $G=f(x, y, z, \gamma)$,即:只要确定流场叶片壁面的离散网格点的坐标 $(x_i, y_i, z_i, \gamma_i)$ 所对应的 γ_i (流体网格节点处幅值和相位)和流场固体域叶片的离散网格点的坐标 (x, y, z) ,就可以通过三维埃米尔特插值函数得到 γ (流体网格节点处幅值和相位)。

首先将转子叶片在固体域内进行分网,在叶片表面生成 1 层表面效应单元 SUR F154,并导出各个表面效应单元 SUR F154 形心处的坐标。SUR F154 单元是利用模型表层的实体单元的节点形成的新单元,覆盖在实体单元的表面,用于谐响应分析中为叶片加载压力载荷。然后,采用 MATLAB 编程语言自行编制的基于埃米尔特法插值程序进行数值插值,将非定常压力加载到各面单元的形心处;最后,采用 ANSYS APDL 二次开发语言,将各面单元形心上的非定常压力的幅值与该单元的面积相乘,得到该单元的气动激振力,通过气动激振力分解,分别加载到面单元各节点。其具有做法如图 3 所示。

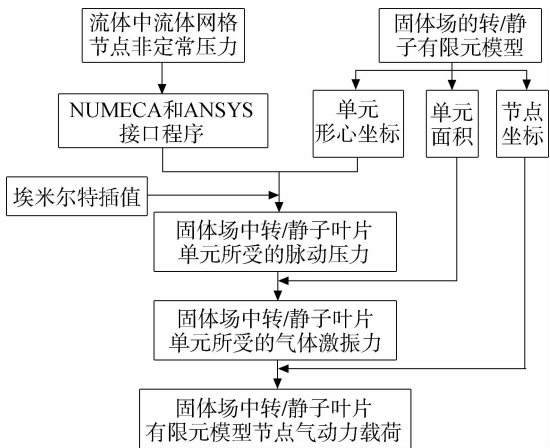


图 3 气动激振力转化流程图

Fig. 3 Flow chart of aerodynamic excitation force conversion

1.3 气动激振力的算例分析

将文中第 1.1 节和第 1.2 节所建立的气动激振力的分析方法应用于 1.5 级压气机转/静子叶

片的模型,求解出转子叶片表面气动激振力。

1.3.1 计算模型及其边界条件

本文需要考虑三排叶片模型,如图 4 所示,即包含前排静子、转子和后排静子的流场计算模型,其中前排静子叶片数为 82,转子叶片数为 63,后排静子叶片数为 98。为加速流场收敛速度,保证流场的掺混均匀性,建模时将前排静子叶片前方的进口流场模型和后排静子叶片后方的出口流场模型都有所延长,其中进口流场模型向前延长 1.5 倍转子叶片弦长,出口流场模型向后延长 1 倍转子叶片弦长。

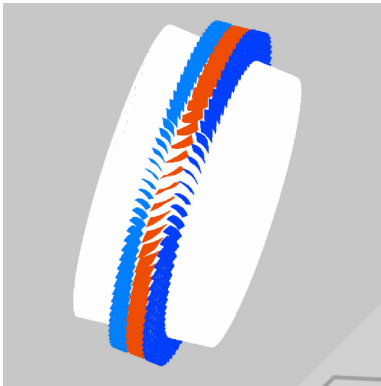


图 4 计算模型图
Fig. 4 Computational model

经过网格无关性验证后,设置边界条件为进口总温、进口总压、出口静压以及转子叶片的转速 942.949 rad/s,湍流模型为 Spalart-Allmaras (S-A)。采用 harmonic method 进行非定常计算,非定常计算的初场设置为相同进出口边界条件下转子叶片无转速的定常流场,采用非线性谐波法对其进行求解。边界条件设置如表 1 所示。

表 1 边界条件
Table 1 Boundary conditions

边界	进口	出口	湍流模型	谐波阶数	最大扰动数
条件	总温 总压	静压	S-A	3	2

在航空发动机中,上下游叶片相互影响导致流场的非定常流动,主要影响参数是发动机的转速,本文所取的 3 阶谐波已经有足够的精度描述其在频域下的特性,而且通常认为前几阶谐波在影响叶片振动时起到主导地位,高阶谐波的影响是很有限的。已有文献[24]做过相关的研究,提

高计算时的谐波阶数对计算结果影响不大。所以本文设置每个扰动的谐波阶数设置为 3。

1.3.2 计算结果

导出叶片表面的静压云图,如图 5 所示。

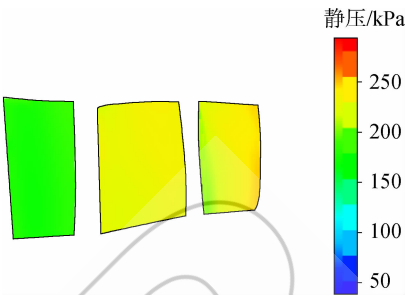


图 5 叶片表面的静压云图
Fig. 5 Static pressure cloud chart of blade surface

本文基于非线性谐波法得到的结果与提供的原始数据对比,如图 6 所示,发现转子出口边界处的压力随叶高增加而提高,两者变化规律一致,主要区别在于非线性谐波法计算出来的压力较原始数据整体偏高,但误差在允许范围内。两者存在误差的主要原因:为加速流场收敛速度,保证流场的掺混均匀性,本文在分析过程中,将前排静子叶片前方的进口流场模型和后排静子叶片后方的出口流场模型都有所延长,其中进口流场模型向前延长 1.5 倍转子叶片弦长,出口流场模型向后延长 1 倍转子叶片弦长,建立了收敛型的轴流式压气机流场计算通道,如图 7 所示,并将前排静子前缘处的原始参数作为非线性谐波法的进口边界条件,故计算结果比原始数据偏高。

由于流固网格的不匹配,本文基于上述的埃米尔特插值法,用 MATLAB 语言编制了流固网格节点插值程序,采用 ANSYS APDL 二次开发语言,将插值过后的非定常压力完成向气动激振

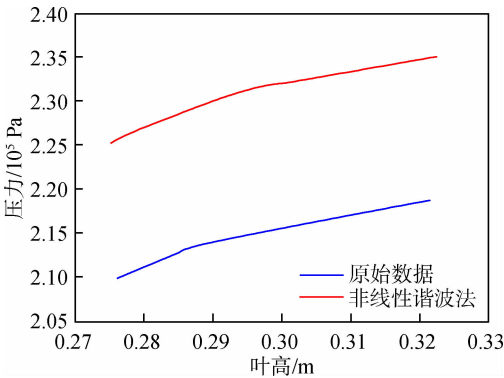


图 6 压力对比图
Fig. 6 Pressure contrast diagram

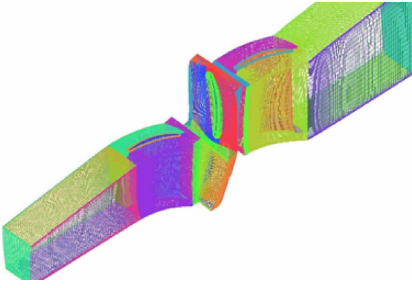


图 7 收敛型流道图

Fig. 7 Convergent channel diagram

力的转化,即:各面单元的压力与该单元的面积相乘,得到该单元的气动力,然后将气动力分解,分别加载到面单元各节点。叶片所受的简谐压力幅值如图 8 所示。

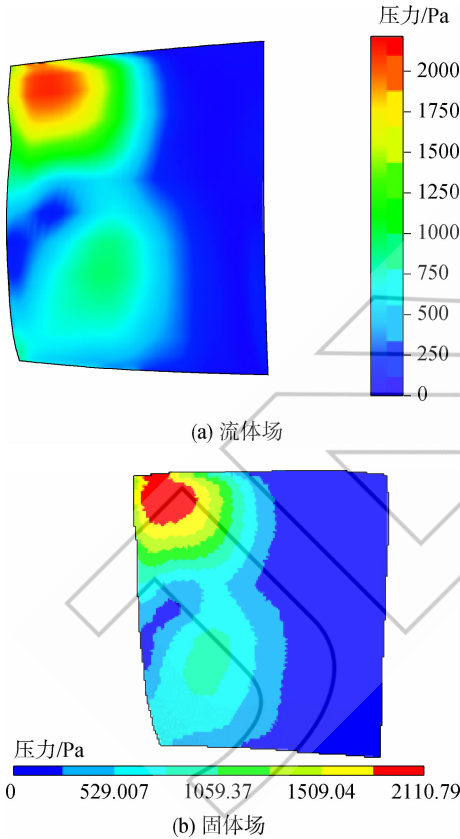


图 8 简谐压力幅值预估效果图

Fig. 8 Effect diagram of excitation pressure amplitude prediction

2 气动阻尼分析

本文采用弱耦合法计算叶片的气动功。根据能量等效的原则,求得等效气动阻尼比。

2.1 气动阻尼的分析方法

叶片在非定常气动载荷作用下的等幅强迫响应是叶片在外载荷作用下的一种稳定运动,维持

这种状态的条件是:内力功和外力功之和为零。此时,叶片振动时的内力功为叶片振动时所受的惯性力、阻尼力和弹性力的功之和。当叶片按简谐规律运动时,惯性力与弹性力在一个振动周期内做功均为零。即:阻尼力做的功和外力功之和为零。

$$W_{\text{damping}} + W_{\text{force}} = 0 \quad (21)$$

其中 W_{damping} 为阻尼力在叶片 1 个振动周期内所做的功; W_{force} 为非定常气动载荷在叶片 1 个振动周期内所做的功。

设叶片按某阶固有模态振动,不计机械阻尼力,并将气动阻尼力等效为黏性阻尼力(与叶片振动的速度成比例),则叶片振动一个周期(T)内阻尼力做功为

$$W_{\text{damping}(i)} = \int_0^T \{\dot{x}_i\}^T C \{\dot{x}_i\} dt \quad (22)$$

式中 $\{\dot{x}\}$ 为叶片上离散点的速度构成的向量; C 为叶片的阻尼矩阵; $W_{\text{damping}(i)}$ 为对第 i 阶模态的阻尼功。

将物理空间下叶片的某阶振动响应转化到模态空间下有如下表达式:

$$\{x\}_i = q_i(t) \{\varphi\}_i \quad (23)$$

式中 $\{\varphi\}_i$ 为叶片第 i 阶固有模态,由振型质量归一化得到。

按某阶固有模态 $\{\varphi\}_i$ 振动的叶片上各点的运动随时间变化规律服从下式:

$$q(t) = q_{0i} \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (24)$$

式中 q_{0i} 为叶片按第 i 阶模态振动时的振幅, θ_i 为各自由度运动时的相位。设系统中阻尼等效为黏性阻尼,则式(22)成为

$$W_{\text{damping}(i)} = \int_0^T \dot{q}(t) \{\varphi\}_i^T C \{\varphi\}_i \dot{q}(t) dt \quad (25)$$

式中 $c_i = \{\varphi\}_i^T C \{\varphi\}_i$, c_i 为第 i 阶振动模态的阻尼系数。

根据阻尼比的定义

$$\frac{c_i}{M_{pi}} = 2\zeta_{a(i)} \omega_i \quad (26)$$

式中 $\zeta_{a(i)}$ 为第 i 阶模态的模态阻尼比; M_{pi} 为第 i 阶模态的归一化模态质量,大小为 1; ω_i 为第 i 阶模态的系统固有频率,可以得到

$$W_{\text{damping}(i)} = 2M_{pi} \omega_i \zeta_{a(i)} \int_0^T a \dot{q}(t) \dot{q}(t) dt \quad (27)$$

式中 a 为实际振幅与固有振型向量的比值。

将式(24)代入式(27)可得

$$W_{\text{damping}(i)} = 2\omega_i \zeta_{a(i)} \int_0^T q_{0i}^2 \omega_i^2 \cos^2(\omega_i t \theta_i) dt \quad (28)$$

联立式(21)和式(28)可得

$$\zeta_{a(i)} = \frac{W_{\text{damping}(i)}}{2\pi q_{0i}^2 \omega_i^2} = \frac{-W_{\text{force}}}{2\pi q_{0i}^2 \omega_i^2} \tag{29}$$

式中的 W_{force} 叶片按第 i 阶模态在流场内振动一个周期的过程中,作用在其表面上的气动力所做的功是通过流场、叶片的耦合数值分析获得的, q_{0i} 的选取就意味着规定了叶片运动的振幅。

2.2 气动功的分析方法

求解气动功的具体做法是:首先利用有限元软件求得叶片的固有频率和固有振型,然后用 CFD 软件中的网格重构功能,将求得的固有频率

和固有振型加载到叶片上,使得叶片按给定的固有频率、固有振型运动,通过网格联动,实现流体随叶片一起运动,接着求解叶片振动产生的流场及其作用在叶片表面的气动负功,最后通过编制的专用气动阻尼比计算程序,获得叶片的气动阻尼,其方法流程如图 9 所示。

其中,自行编制的动网格控制程序的具体做法是:首先将转子叶片节点坐标、节点位移和流体域耦合边界面上的节点坐标导出;然后通过自然邻点法,将转子叶片的运动位移加载到流体域的耦合边界面上;最后通过 CFD 软件中网格重构功能设定流体耦合边界的运动规律。

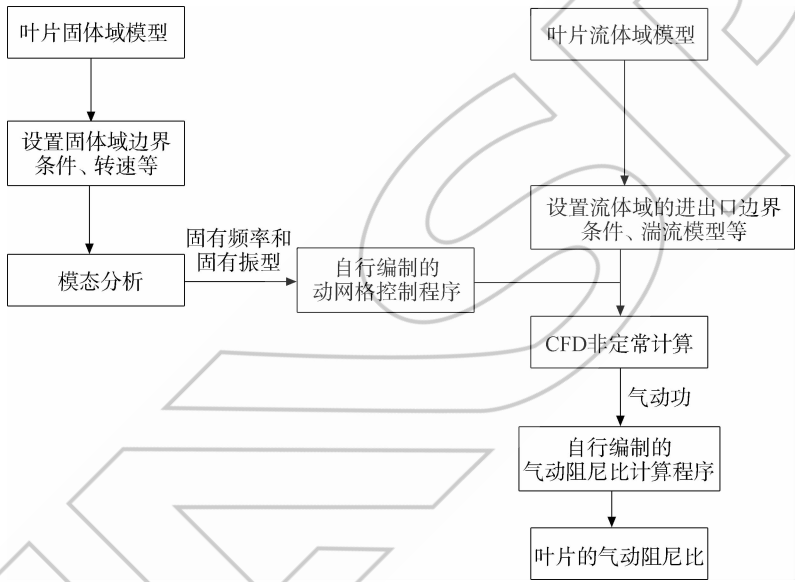


图 9 气动阻尼分析方法流程图

Fig. 9 Flow chart of aerodynamic damping analysis method

自行编制的气动阻尼比计算程序的做法是:首先,将流体域耦合边界面上的各节点的气动力和运动位移导出;然后,采用 MATLAB 语言编制的气动功计算程序,即通过对各节点气动力与运动位移进行积分求得 W_{force} (负功),最后将叶片固有振型的振幅 q_i 和固有频率 ω_i 带入式(29),求得模态气动阻尼比。

$$\zeta_{a(i)} = \frac{-W_{\text{force}}}{2\pi q_i^2 \omega_i^2} \tag{30}$$

2.3 气动阻尼算例分析

本文计算转子叶片的有限元模型如图 10 所示。采用的叶片模型材料参数为:密度为 $4\,500\text{ kg/m}^3$,弹性模量为 115 GPa ,泊松比为 0.301 。采取的约束方式为叶根固定约束、叶尖自由。为了更贴近真实情况,本节计算的频率是考虑了转

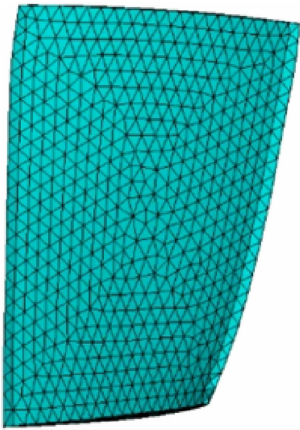
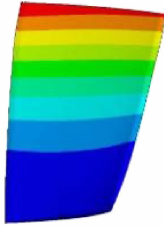
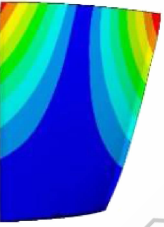
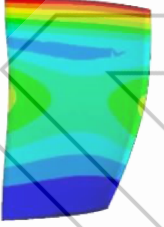
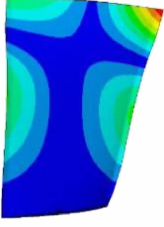


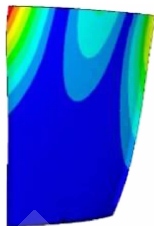
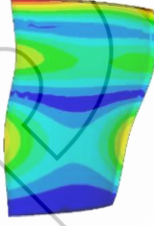
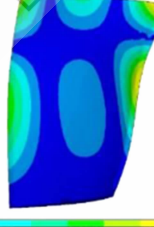
图 10 转子叶片有限元模型

Fig. 10 Finite element model of rotor blade

子转速的动频。该转子转速为 9 009 r/min,旋转轴为 z 轴。利用 ANSYS 计算得到叶片在该转速下的前 8 阶固有频率其对应的固有振型分别如表 2 所示。

表 2 固有频率和固有振型计算结果
Table 2 Calculation results of natural frequency and mode

阶次	固有 频率/Hz	固有振型
1	2 386.0	位移  2.56535 7.69565 12.8256 17.8575 23.082
2	5 445.4	位移  4.51649 13.5665 22.5925 31.6294 40.6666
3	8 481.9	位移  2.72651 8.17915 13.6319 19.0848 24.5367
4	12 603	位移  2.30727 6.98366 11.6263 16.2485 20.8309
5	13 042	位移  5.7583 17.2749 28.6915 40.1681 51.6447

续表		
阶次	固有 频率/Hz	固有振型
6	13 308	位移  7.12904 21.5071 35.6432 49.5033 64.1614
7	21 713	位移  3.05208 9.15624 15.2504 21.3646 27.4687
8	24 605	位移  6.05498 18.165 30.2749 42.3894 54.4949

流场的边界条件是进口总温、总压条件,出口静压,其具体数值见表 3 所示。为了提高计算的精度,叶片振动 1 个周期设置为含有 100 个时间步。最后在输出控制中,在流场耦合边界上选取 1 点作为监测点,监测这一点处叶片表面的气体压力和运动位移随时间步推进的变化情况,监测点位于转子叶片叶尖尾缘处,其具体位置见图 11,为了得到更准确的结果,须在流体方程的求解

表 3 流场计算边界条件 Table 3 Boundary conditions of flow field calculation	
边界	条件及说明
进口	总温 $T_{\text{tot}}=273\text{ K}$
	总压 $p_{\text{tot}}=225\text{ kPa}$
出口	出口静压 $p_{\text{sta}}=231\text{ kPa}$
两侧面	周期性对称面
轮毂面	无滑移壁面
机匣面	旋转壁面,转速为 9 009 r/min
耦合边界	运动壁面,运动方式由自行编制的动网格程序控制

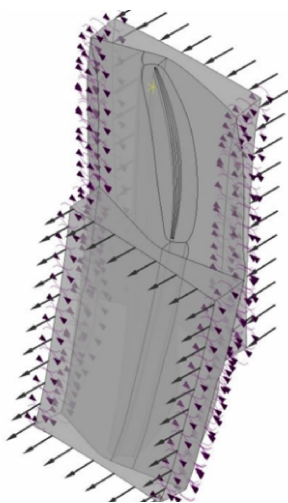


图 11 监测点位置图

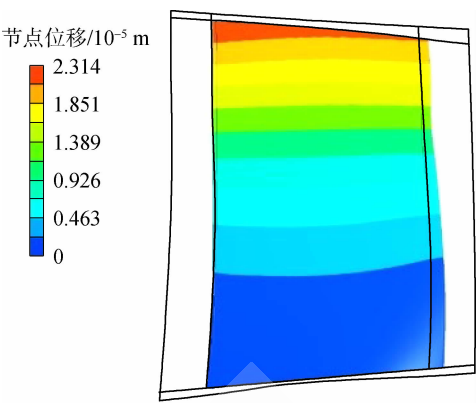
Fig. 11 Location map of monitoring points

中考考虑转速因素。具体来说,由于叶片在工作时处于旋转状态,叶片、轮毂都是以工作转速绕着 z 轴旋转的,而机匣静止不动。在实际的流场计算过程中,为了考虑叶片的旋转问题,同时又简化边界条件,将叶片、轮毂视作静止,而机匣视作沿着工作转速的反方向绕 z 轴旋转的运动壁面,流体域耦合交界面的运动方式由自行编制的动网格程序来控制。

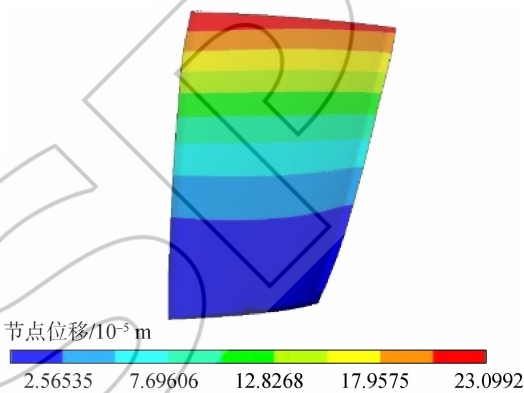
其中自行编制动网格控制程序实现方式是:首先,采用 ANSYS APDL 二次开发语言将转子叶片各阶固有振型导出,便可获得转子叶片有限元网格节点的位移;然后,通过 MATLAB 语言编制的基于自然邻点法的插值程序,把转子叶片有限元网格节点的位移插值到流体域耦合交界面上的网格节点中,接着将流体域耦合交界面上的网格节点的位移写入到 UDF(用户定义函数)的宏文件 DEFINE_GRID_MOTION(C 语言)中,并定义运动频率;最后,将宏文件 DEFINE_GRID_MOTION 并行到 CFD 计算软件 CFX 中。观察流场耦合边界的运动情况,并与叶片的振型图进行对比,检验动自行编制的动网格程序的控制效果,如图 12 所示。

以定常结果为初场,进行非定常计算,将 CFX 的分析模式从稳态分析更改到瞬态分析,设置非定常计算的计算时间步长和总时间步长。计算收敛后,打开 CFX-POST,绘制转子叶片表面监测点的脉动压力随时间步推进的变化曲线,如图 13 所示,可以看到当计算到 1200 步后,叶片监测点出现了稳定正弦变化的压力。

取稳定周期变化(等幅强迫振动)的 1 个周期



(a) 动网格程序控制效果图



(b) 振型图

图 12 动网格程序的控制效果对比图
Fig. 12 Comparison of control effect chart of moving grid program

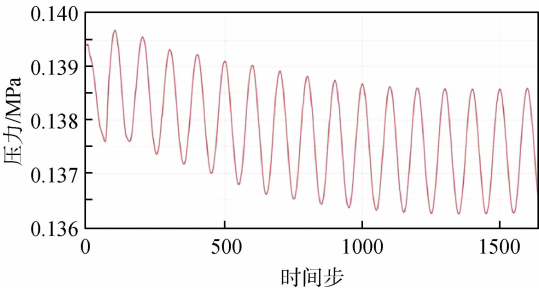


图 13 监测点的压力变化图

Fig. 13 Pressure change diagram of monitoring point

内非定常气动力对叶片所做的气动功,并采用 MATLAB 语言自行编制的基于式(30)的气动阻尼比计算程序来计算得到叶片的前 8 阶等效模态气动阻尼比,如表 4 所示。

通过与文献[25]对比,本文得到了与其相同的数量级,但本文的计算结果略微偏大,这是由于叶片的叶型是经过严谨设计的,在设计过程中,出于减振考虑,会在满足其气动性能要求的前提下,有意将叶片的气动阻尼向稍微偏大的方向设计。本文的计算采用真实的叶片模型,边界条件也模

拟了叶片的真实工作环境,叶片的气动阻尼偏大是正常的现象。虽然气动阻尼结算结果偏大,但依然在合理的区间内,这也能体现出本文提出计算方法的可行性、准确性以及计算结果的有效性。

表 4 模态气动阻尼比

Table 4 Modal aerodynamic damping ratio

阶数	阻尼比
1	0.34
2	0.57
3	0.19
4	0.9
5	0.15
6	0.33
7	0.054
8	0.051

3 气流激励下的强迫振动响应

将文中第 1 节和第 2 节建立的叶片表面气动激振力的预估方法和建立的气动阻尼的分析方法,进一步采用模态叠加法求得叶片在气流激励下的振动应力。

3.1 模态叠加法

模态坐标下的振动方程:

$$\ddot{y}_j + 2\omega_j\zeta_j\dot{y}_j + \omega_j^2y_j = f_j \tag{31}$$

其中 y_j 模态坐标, ω_j 是第 j 阶的系统固有频率, ζ 是模态阻尼比, f_j 是外载荷。

对于简谐激励, f_j 可以写成

$$f_j = f_{cj}e^{i\Omega t} \tag{32}$$

其中 f_{cj} 简谐激励的复数幅值, Ω 是简谐激励的频率。

对于线性系统,式(31)解的形式为

$$Y_j = Y_{cj}e^{i\Omega t} \tag{33}$$

其中 Y_{cj} 是第 j 阶模态坐标的复振幅。

将式(32)和式(33)代入式(30)可得

$$-\Omega^2Y_{cj}e^{i\Omega t} + 2\omega_j\zeta_j(i\Omega Y_{cj}e^{i\Omega t}) + \omega_j^2Y_{cj}e^{i\Omega t} = f_{cj}e^{i\Omega t} \tag{34}$$

整理式(34)得

$$(-\Omega^2 + 2i\omega_j\zeta_j + \omega_j^2)y_{cj} = f_{cj} \tag{35}$$

求得 Y_{cj}

$$Y_{cj} = \frac{f_{cj}}{-\Omega^2 + 2i\omega_j\zeta_j + \omega_j^2} \tag{36}$$

各模态的贡献量为

$$\{W_{d,j}\} = \{\Phi_j\}Y_{cj} \tag{37}$$

其中 $\{W_{d,j}\}$ 是 j 阶模态下的贡献量, $\{\Phi_j\}$ 是 j 阶固有振型。

最后,得到复位移是

$$\{u_c\} = \sum_{j=1}^n \{W_{d,j}\} \tag{38}$$

在基于 QR 分解(正交三角分解)模态提取方法中,式(38)为

$$-\Omega^2I + i\Omega\Phi^TW_d\Phi + \Lambda^2Y = \Phi^Tf \tag{39}$$

其中 Λ 为模态坐标下提取出的一对角矩阵。求解上述方程,再乘以特征向量,就可以计算出方程所示的复位移。

3.2 振动应力算例分析

在轴流式压气机中,叶片气动激振力的主要来源是尾流激振和旋转失速,将非定常流场计算结果导出,可以明显地观察到叶片的尾迹部分的气流亏损,如图 14 所示,同样又在转子叶片前缘处捕捉到了激波,如图 15 所示。激波是跨声速风扇/压气机内部流场中特有的物理现象,激波以及相邻叶片的压力扰动等会造成的压气机流道内非均匀流动,此非均匀流动作用会引起叶片的振动。

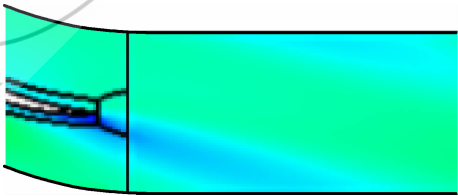


图 14 尾迹亏损图
Fig. 14 Tail loss map

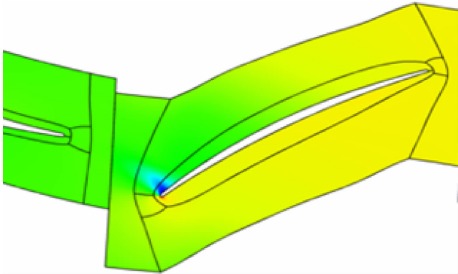


图 15 激波位置图
Fig. 15 Shock location map

本文将叶片表面所受的气动激振力加载到转子叶片上,再通过 ANSYS 中的模态叠加法进行谐响应计算,其中单元类型选为 solid185,有限元网格总数为 5 907;转子叶片边界条件为根部固支,转速为 942.949 rad/s,阻尼设置为前文所计

算得到的转子叶片前 8 阶模态阻尼比,叶片的材料参数的设置分别为密度 4500 kg/m^3 ,弹性模量为 115 GPa ,泊松比为 0.301 ,计算结果如图 16 和图 17 所示,叶根位置的应力集中现象是有限元计算时叶片的约束方式导致的,约束直接施加在叶根处,导致计算结果中叶根附近的应力值偏大。由圣维南原理,一般认为约束附近的应力计算结果是失真的,应舍去,所以在选取叶片最大应力点的时候,舍弃了叶根处附近的点。叶身最大振动应力约为 100 MPa ,与文献[26]实验结果应力水平相当。

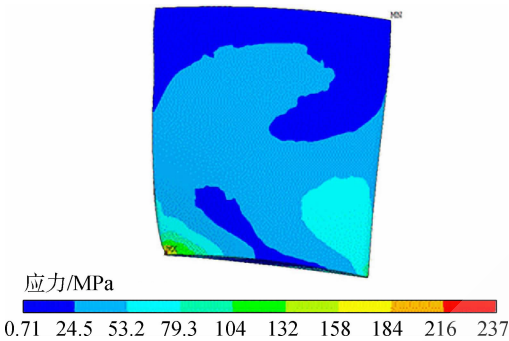


图 16 转子叶片叶背振动应力图

Fig. 16 Vibration stress diagram of rotor blade back

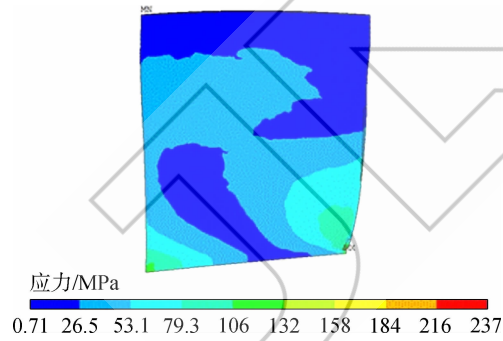


图 17 转子叶片叶盆振动应力图

Fig. 17 Vibration stress diagram of rotor blade basin

4 结 论

本文开展气流激励下叶片振动响应分析方法研究,建立了气动激振力预估方法、叶片气动阻尼分析方法和叶片在气流激励下的强迫振动响应分析方法,建立了一套完整的满足工程精度需要,并且有很高计算效率的气流激励下叶片振动响应计算体系,同时有很广的适用性以及扩展性,计算过程不受到模型几何形状的限制,还可以通过修改计算过程中的某些参数,实现计算精度与计算量

之间的权衡。

1) 叶片表面气动力预估方法

(1) 采用非线性谐波法对 1.5 级压气机转/静子进行非定常计算,获得了叶片表面所受的脉动压力,并完成转子叶片所受脉动压力向气动激振力的转化。

(2) 应用非线性谐波法求解时可根据精度需求与计算时间限制,调整谐波的阶数,达到求解过程的最优控制。

(3) 通过自行开发的流固转换接口程序,建立了叶片表面所受的气动激振力预估方法,为开展气流激励下的强迫振动响应提供了支撑。

2) 气动阻尼分析方法

(1) 对叶片进行弱流固耦合分析,计算气动力对叶片所做的气动负功,并将气动负功等效为黏滞阻尼力的功,进而求得叶片的模态气动阻尼比,建立了气动阻尼分析方法,计算了 1.5 级压气机转子叶片的前 8 阶等效模态气动阻尼比,结果与参考文献一致,验证了方法的有效性。

(2) 在处理固体域网格和流体域网格数据传递问题时,采用自行编制的动网格控制程序,使计算方法得到了简化,且不再受叶片叶型的限制,扩大了计算方法的适用范围。

3) 气流激励下叶片振动响应分析方法,

(1) 基于上述获得的叶片表面的气动激振力和模态气动阻尼比,并加载到转子叶片上,采用模态叠加法对转子叶片强迫振动响应分析,可得一套适合工程应用的气流激励下叶片振动响应分析方法。

(2) 将前排静子引起的尾流激振的 1 阶谐波气动激振力加载到转子叶片上,获得了叶片表面的振动应力,应力水平与参考文献实验数据应力水平相当,证明了计算结果的有效性。

参考文献:

[1] 罗楚威,陈江. 轴流压气机非定常数值模拟方法精度分析[J]. 航空动力学报,2017,32(11):2808-2816.
LUO Chuwei, CHEN Jiang. Accuracy analysis of numerical simulation method for unsteady axial flow compressor[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(11): 2808-2816. (in Chinese)
[2] SMITH N R, KEY N L. Blade-row in-teraction effects on unsteady stator loading in an em-bedded compressor stage [J]. Journal of Propulsion and Power, 2017, 33(1): 248-255.
[3] KULISA P, DANO C. Numerical simulation of unsteady blade row interactions induced by passing wakes[J]. Euro-

- pean Journal of Mechanics: B Fluids, 2005, 25(3): 379-392.
- [4] 刘锡阳, 于海力, 赵晓路, 等. 相位延迟法在双排涡轮三维非定常流动数值模拟中的应用[J]. 工程热物理学报, 2005, 26(6): 46-48.
- LIU Xiyang, YU Haili, ZHAO Xiaolu, et al. Accuracy analysis of numerical simulation method for unsteady axial flow compressor[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2005, 26(6): 46-48. (in Chinese)
- [5] WANG Xiangpeng, WANG Yanrong, TIAN Aimei. Effect of axial spacing between rotor-stator on vibration stress of blade[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(6): 1427-1434.
- [6] ARNONE A. Rotor-stator interaction analysis using the Navier-Stokes equations and a multi-grid method[J]. Journal of Turbomachinery, 1996, 118(4): 1-15.
- [7] 李亚, 黄秀全, 王远刚. 叶片数约化对叶片气动载荷的影响研究[J]. 科学技术与工程, 2013, 13(11): 3190-3194.
- LI Ya, HUANG Xiuquan, WANG Yuangang. Study on the influence of blade reduction on blade aerodynamic load[J]. Science Technology and Engineering, 2013, 13(11): 3190-3194. (in Chinese)
- [8] FENG Wang, DI MARE L. Favre-averaged nonlinear harmonic method for compressible periodic flows[J]. AIAA Journal, 2019, 57(3): 1133-1142.
- [9] BURON J D, HOUDE S, LESTRIEZ R, et al. Application of the non-linear harmonic method to study the rotor-stator interaction in Francis-99 test case[J]. Journal of Physics Conference Series, 2015, 579(1): 156-169.
- [10] 药晓江, 董景新, 尚捷, 等. 非线性谐波法在叶轮机械非定常计算中的应用[J]. 推进技术, 2016, 37(4): 632-639.
- YAO Xiaojang, DONG Jingxin, SHANG Jie, et al. Application of nonlinear harmonic method in unsteady calculation of turbomachinery[J]. Journal of Propulsion Technology, 2016, 37(4): 632-639. (in Chinese)
- [11] 王翔鹏. 叶片尾迹激励及其强迫振动响应[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2015.
- WANG Xiangpeng. Blade wake excitation and its forced vibration response[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2015. (in Chinese)
- [12] VILMIN S P, LORRAIN É R, TARTINVILLE B T, et al. The nonlinear harmonic method: from single stage to multi-row effects[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2013, 27(2): 88-99.
- [13] SEINTURIER E, LOMBARD J P, DUMAS M, et al. Forced response prediction: methodology for the design of HP compressors bladed disks[R]. ASME Paper GT2004-53372, 2004.
- [14] SRIVASTAVA R, BAKHLE M A, KEITH T G. Numerical simulation of aerodynamic damping for flutter analysis of turbomachinery blade rows[J]. Journal of Propulsion and Power, 2003, 19(2): 260-267.
- [15] 郭雪莲, 李琳. 航空发动机叶片气动阻尼的研究[C]// 第十一届全国空气弹性学术交流会会议论文集. 昆明: 中国空气动力学学会空气弹性力学专业委员会、中国力学学会流固耦合力学专业委员会、中国力学学会, 2009: 475-479.
- [16] 张陈安, 张伟伟, 叶正寅. 一种高效的叶轮机叶片气动阻尼计算方法[J]. 力学学报, 2011, 43(5): 826-833.
- ZHANG Chenan, ZHANG Weiwei, YE Zhengyin. An efficient calculation method for aerodynamic damping of turbine blades[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(5): 826-833. (in Chinese)
- [17] 肖军, 杨启超, 王乐. 离心叶轮气动阻尼的数值分析[J]. 航空动力学报, 2018, 33(9): 2129-2138.
- XIAO Jun, YANG Qichao, WANG Le. Numerical analysis of aerodynamic damping of centrifugal impeller[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(9): 2129-2138. (in Chinese)
- [18] 于航. 叶轮机械振动的气动阻尼研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2006.
- YU Hang. Study on aerodynamic damping of turbomachinery vibration[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006. (in Chinese)
- [19] 郑赟, 余永博. 轴向间距对转子叶片颤振特性的影响机理[J]. 北京航空航天大学学报, 2018, 44(4): 709-716.
- ZHENG Yun, YU Yongbo. Mechanism of the influence of axial spacing on the flutter characteristics of rotor blades[D]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2018, 44(4): 709-716. (in Chinese)
- [20] PALAZOTTO A, SHIPMAN W. The consideration of high cycle fatigue in a turbine blade[R]. AIAA-2002-1537, 2002.
- [21] 王梅. 非定常流场分析结果向结构载荷压力场转化问题的解决[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2005, 18(3): 15-18.
- WANG Mei. The solution to the problem of transforming the results of unsteady flow field analysis into structural load pressure field[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2005, 18(3): 15-18. (in Chinese)
- [22] PIRACCINI F, LORUSSO S, MACELI N, et al. Forced response analysis of a steam turbine shrouded blade: numerical analysis and experiments[R]. ASME Paper GT2013-95703, 2013.
- [23] 王立刚, 沈艳, 杨丽宏. 高等数值计算[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014: 114-119.
- [24] 赵军, 刘宝杰. 非线性谐波法的进一步校验分析[J]. 航空动力学报, 2008, 23(4): 680-686.
- ZHAO Jun, LIU Baojie. Further verification of nonlinear harmonic method[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(4): 680-686. (in Chinese)
- [25] 于航. 叶轮机械振动叶片的气动阻尼研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2008.
- YU Hang. Study on aerodynamic damping of vibrating blades of turbomachinery[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008. (in Chinese)
- [26] 王延荣, 李其汉. 航空发动机结构振动设计问题[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2014: 69-73.