

基于能量等效的直齿锥齿轮时变啮合刚度计算

陈思宇, 谭儒龙, 郭晓东, 张卫青, 舒锐志
(重庆理工大学 机械工程学院, 重庆 400054)

摘 要: 针对直齿圆锥齿轮啮合刚度的计算问题, 从微元思想出发, 将变截面齿廓划分为若干等截面微段齿段, 基于能量等效建立微段齿段啮合刚度计算模型, 并利用积分方法获得单齿啮合刚度。此外, 基于力平衡和变形协调条件进一步提出了齿轮时变啮合刚度计算模型, 同时根据几何关系导出了相应传动误差计算式。利用有限元分析对解析计算模型进行了验证, 并分析了误差来源。结果表明: 利用该模型不仅能够将直齿锥齿轮啮合刚度计算精度保证在 2% 以内, 还达到了快速求解的目的。

关 键 词: 直齿锥齿轮; 单齿啮合刚度; 能量等效; 时变啮合刚度; 变形协调
中图分类号: V232.8; TH132.41 **文献标志码:** A

Time-varying meshing stiffness calculation of straight bevel gears based on energy equivalence

CHEN Siyu, TAN Rulong, GUO Xiaodong, ZHANG Weiqing, SHU Ruizhi
(School of Mechanical Engineering,
Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: As one of the most important dynamic excitation sources of gear system, gear time-varying meshing stiffness is a key parameter of gear system dynamics model. In view of the problem of calculating the meshing stiffness of straight bevel gears, the variable section tooth profile was divided into several micro-section tooth segments with equal section based on the idea of micro-element. The calculation model of meshing stiffness of micro-section tooth segments was established based on energy equivalent, and the single tooth meshing stiffness was obtained by using integral method. In addition, based on force balance and deformation coordination conditions, a computational model of gear time-varying meshing stiffness was proposed, and the corresponding formula of transmission error was derived according to geometric relations. The finite element analysis was used to verify the calculation method and analyze the error source. The results showed that the calculation accuracy of meshing stiffness of straight bevel gears can be guaranteed within 2% by using this model, and the purpose of quick solution can be achieved.

Key words: straight bevel gear; single tooth mesh stiffness; energy equivalent;
time-varying meshing stiffness; deformation coordination

收稿日期: 2021-03-05

基金项目: 国家重点研发计划项目(2018YFB2001700); 国家自然科学基金资助项目(51805060, 51905060)

作者简介: 陈思宇(1996—), 男, 硕士, 主要从事智能化与数字化制造方面的研究。E-mail: 1605510003@qq.com

通信作者: 谭儒龙(1987—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为高性能机电传动技术及系统、齿轮传动。E-mail: rulong.tan@cqut.edu.cn

引用格式: 陈思宇, 谭儒龙, 郭晓东, 等. 基于能量等效的直齿锥齿轮时变啮合刚度计算[J]. 航空动力学报, 2022, 37(2): 320-329.
CHEN Siyu, TAN Rulong, GUO Xiaodong, et al. Time-varying meshing stiffness calculation of straight bevel gears based on energy equivalence[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(2): 320-329.

刚度激励是齿轮啮合过程中的主要激励形式之一,也是影响齿轮传动系统稳定性、引起参数自激振动的主要因素^[1-3]。而刚度激励是由齿轮传动过程中随时间周期变化的啮合刚度即时变啮合刚度所产生的^[4-5],因此确定轮齿的啮合刚度一直都是齿轮系统动力学研究的热点^[6-7]。

齿轮啮合刚度计算方面,国内外已有大量学者进行研究,并取得了不少成果^[8]。在已发表的文献中,齿轮啮合刚度的计算多采用材料力学法和有限元法^[9-10],其中对圆柱齿轮刚度研究较多,圆柱齿轮的刚度计算基本得到解决^[11-13],马辉等^[14]考虑较为真实的过渡曲线,提出基于改进能量法的直齿轮时变啮合刚度计算模型;Chen等^[15-17]基于刚度与轮齿误差相互作用的思想,提出了更加符合实际的直齿圆柱齿轮时变齿侧间隙啮合刚度解析计算模型。对于锥齿轮而言,由于其齿面的复杂性,要准确计算时变啮合刚度存在较大难度,故可见的文献大多采用有限元法计算,如Mennem^[18]和Marambedu^[19]使用有限单元法计算了轮齿的接触柔度进而得到刚度矩阵;陈霞^[20]利用有限元法计算了不同修形方法修形后的锥齿轮时变啮合刚度;唐进元等基于有限元分析原理,给出了使用有限元软件计算锥齿轮刚度的关键技术及前处理方法^[12]。

在系统动力学中,齿轮啮合刚度是产生内部激励的主要来源之一,啮合刚度求解的准确性会影响整套传动系统的精密性,同时整个传动系统是由各部件耦合,故分配到齿轮分析上的资源有限。以有限元法为代表的数值计算方法,虽然计算精度高,但计算耗时长,不利于快速迭代设计优化。因此,本文试图探寻一种在保证直齿锥齿轮啮合刚度求解精度前提下的快速计算方法。本文基于能量等效原理,建立直齿锥齿轮单齿啮合刚度计算模型;补充力平衡和变形协调条件,发展直齿锥齿轮时变啮合刚度计算方法;最终与有限元分析结果对比表明,本文提出的方法能够在保证求解精度的情况下,实现直齿圆锥齿轮时变啮合刚度的快速计算。

1 单齿啮合刚度计算模型

基于背锥可以展成平面,且与球面相切于分度圆锥成直角的原理,锥齿轮大端与小端的齿顶圆半径 r_{ad} 、 r_{ax} ,分度圆半径 r_d 、 r_x ,基圆半径 r_{bd} 、 r_{bx} ,齿根圆半径 r_{fd} 、 r_{fx} 可表达为

$$\begin{aligned} r_{ad} &= d_a / (2 \cos \delta) \\ r_{ax} &= [d_a - 2B \sin(\delta + \theta_a) / \cos \theta_a] / (2 \cos \delta) \\ r_d &= d / (2 \cos \delta) \\ r_x &= (d - 2B \sin \delta) / (2 \cos \delta) \\ r_{bd} &= d_b / (2 \cos \delta) \\ r_{bx} &= [d_b - 2B \sin(\delta - \theta_b) / \cos \theta_b] / (2 \cos \delta) \\ r_{fd} &= d_f / (2 \cos \delta) \\ r_{fx} &= (d_f - 2B \sin(\delta - \theta_f) / \cos \theta_f) / (2 \cos \delta) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 d 、 d_a 、 d_b 、 d_f 分别是分度圆直径、齿顶圆直径、基圆直径、齿根圆直径; δ 、 θ_a 、 θ_b 、 θ_f 、 B 分别是分度圆锥角、齿顶角、齿基角、齿根角、齿宽。

结合式(1)所求基圆半径,代入式(2)即可求得直齿锥齿轮轮齿在背锥上展开的平面渐开线齿廓,如图1所示,其中 $\Sigma_x=(O_x, x_x, y_x, z_x)$ 、 $\Sigma_d=(O_d, x_d, y_d, z_d)$ 分别是小端与大端齿廓坐标系。

$$\begin{aligned} x &= r_b \cos \theta + \pi r_b \theta \sin \theta / 180^\circ \\ y &= r_b \sin \theta - \pi r_b \theta \cos \theta / 180^\circ \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

直齿锥齿轮啮合时,齿廓沿整个齿面宽度同时进入和脱离接触,轮齿沿齿宽方向为变截面齿廓(如图2所示)。变截面轮齿刚度的解析计算较为困难,若采用当量齿轮齿形代替原有齿形进行计算又会带来较大误差,因此本文将轮齿沿背锥方向划分为多段微小齿段进行分析。

如图2所示,结合式(1),任意齿段大端与小端的齿顶圆半径 r_{ad}^* 、 r_{ax}^* 、分度圆半径 r_d^* 、 r_x^* 、基圆半径 r_{bd}^* 、 r_{bx}^* 、齿根圆半径 r_{fd}^* 、 r_{fx}^* 表达式为

$$\begin{aligned} r_{ad}^* &= [d_a - 2(i-1)db \sin(\delta + \theta_a) / \cos \theta_a] / (2 \cos \delta) \\ r_{ax}^* &= [d_a - 2idb \sin(\delta + \theta_a) / \cos \theta_a] / (2 \cos \delta) \\ r_d^* &= [d - 2(i-1)db \sin \delta] / (2 \cos \delta) \\ r_x^* &= (d - 2idb \sin \delta) / (2 \cos \delta) \\ r_{bd}^* &= [d_b - 2(i-1)db \sin(\delta - \theta_b) / \cos \theta_b] / (2 \cos \delta) \\ r_{bx}^* &= [d_b - 2idb \sin(\delta - \theta_b) / \cos \theta_b] / (2 \cos \delta) \\ r_{fd}^* &= [d_f - 2(i-1)db \sin(\delta - \theta_f) / \cos \theta_f] / (2 \cos \delta) \\ r_{fx}^* &= [d_f - 2idb \sin(\delta - \theta_f) / \cos \theta_f] / (2 \cos \delta) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 i 是齿段序号,当齿宽 db 值足够微小,即可视每微段齿段大小端渐开线是等值的。为兼顾计算效率与计算精度,对直齿锥齿轮啮合过程做以下假设:①忽略相邻微段齿段之间的弹性变形耦合作用;②每微段齿段载荷沿接触线分配均匀;③每

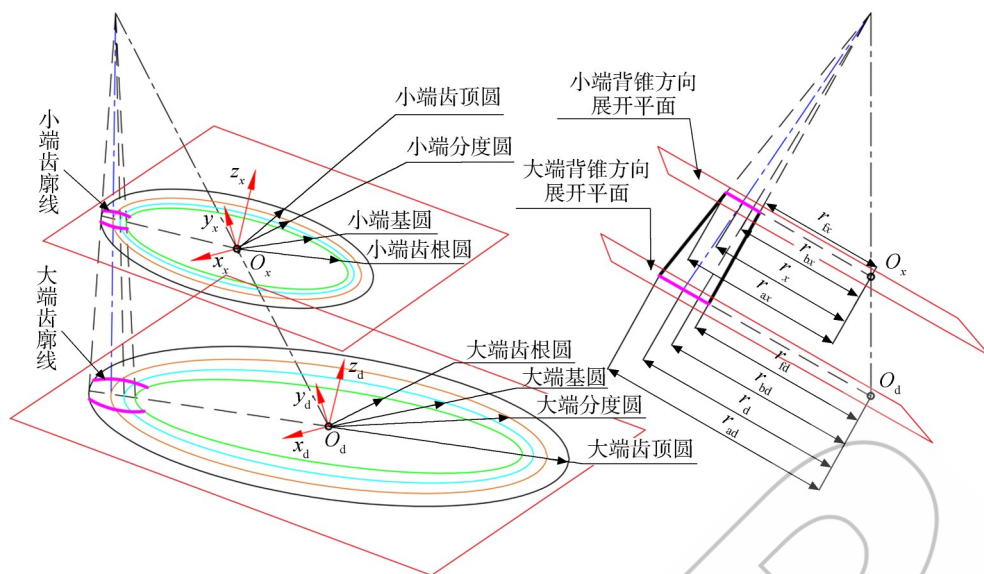


图 1 平面渐开线齿廓图

Fig.1 Plane involute tooth profile diagram

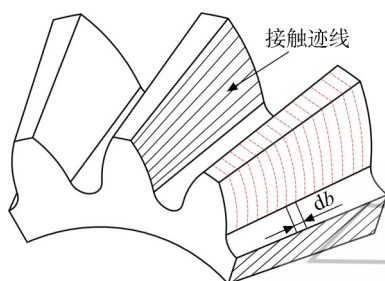


图 2 直齿锥齿轮切片示意图

Fig.2 Schematic diagram of straight bevel gear characteristic

微段齿廓齿形可由背锥上的平面渐开线表征。有效解决了接触线上载荷 F 分布不均匀的问题,求得每个瞬时参与啮合齿段的啮合刚度,通过累积积分势能法,沿齿宽积分即可得到这一瞬时啮合位置的总啮合刚度(如图 3 所示)。

将微段齿段轮齿简化为如图 4 所示的变截面

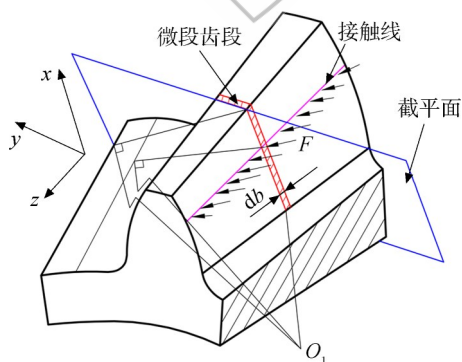


图 3 轮齿受力分析简图

Fig.3 Force analysis diagram of gear teeth

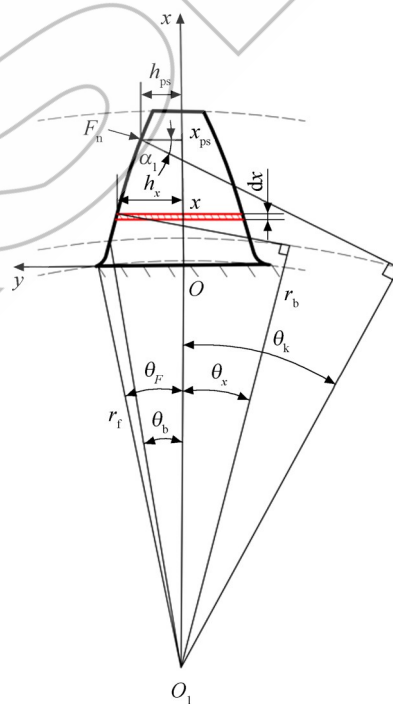


图 4 等效轮齿变截面悬臂梁模型

Fig.4 Equivalent gear tooth variable section cantilever beam model

悬臂梁模型,图中 F_n 为作用于齿廓曲面的法向接触力, F_q 与 F_d 分别为切向力与轴向力。将单个微段齿廓的形变能分解为赫兹接触应变能 U_h 、弯曲应变能 U_b 、剪切应变能 U_s 以及沿齿高方向的轴向压缩应变能 U_a 。根据图 4 所示的微段齿廓受力模型,各应变能表达式可导出为

$$\begin{aligned}
dU_b &= \frac{F_n^2}{2dK_b} = \\
&\int_0^{x_{ps}} \frac{[F_n(x_{ps}-x)\cos\alpha_1 - F_n h_{ps}\sin\alpha_1]^2}{2Edb(2h_x)^3/12} dx \\
dU_s &= \frac{F_n^2}{2dK_s} = \int_0^{x_{ps}} \frac{1.2(F_n\cos\alpha_1)^2}{2G2h_x db} dx \\
dU_a &= \frac{F_n^2}{2dK_a} = \int_0^{x_{ps}} \frac{(F_n\sin\alpha_1)^2}{2E2h_x db} dx \\
dU_h &= \frac{F_n^2}{2dK_h} \quad (4)
\end{aligned}$$

式中 α_1 是 F_n 与齿厚方向的夹角, h_{ps} 是 F_n 作用点 x_{ps} 处齿厚的一半, h_x 是变截面 x 处齿厚的一半, dx 是截面微段长度, K_b 、 K_s 、 K_a 、 K_h 分别是弯曲等效刚度、剪切等效刚度、轴向压缩等效刚度以及赫兹等

$$\begin{aligned}
K_b &= \int_0^B \frac{1}{\left\{ \int_0^{x_{ps}} \frac{3[(x_{ps}-x)\cos\alpha_1 - h_{ps}\sin\alpha_1]^2}{2Eh_x^3} dx \right\}} db \\
K_s &= \int_0^B \frac{1}{\left\{ \int_0^{x_{ps}} \frac{1.2\cos^2\alpha_1}{2Gh_x} dx \right\}} db \\
K_a &= \int_0^B \frac{1}{\left\{ \int_0^{x_{ps}} \frac{\sin^2\alpha_1}{2Eh_x} dx \right\}} db \\
K_h &= \frac{\pi EB}{4(1-\nu^2)} \quad (6)
\end{aligned}$$

式中 ν 为材料泊松比。

除齿形变形外,可进一步考虑齿轮轮体变形所引起的齿轮等效啮合刚度^[21]。

轮体基本几何模型如图5所示,当 dx 与 dy 足

$$\begin{aligned}
L_x &= \tan[2\arctan(h_f/R)] \times (R-B) - h_f(R-B)/R \\
L_d &= \tan[2\arctan(h_f/R)] \times R - h_f \\
L_{hr} &= \left[1 - \frac{L_x + h_f(R-B)/R}{(d/2 - B\sin\delta)/\cos\delta} \right] \times [d(R-B)/(2R)] \\
L_{hd} &= \frac{d}{2} \left(1 - \frac{L_d + h_f}{d\cos\delta/2} \right) \quad (7)
\end{aligned}$$

式中 R 、 h_f 分别是外锥矩和齿根高,结合式(7)求得每空心圆轴的外径 D 与内径 d_k ,通过式(8)求得等效扭转刚度值 dK_t ,进一步沿截面积分可得到整体轮体变形等效扭转刚度 K_t 。

$$dK_t = \frac{G\pi(D^4 - d_k^4)}{32} \quad (8)$$

综合上述轮齿各等效刚度,齿轮副单齿啮合刚度 K_e 可表示为(下标1、2表示主动轮与被动轮)

$$\begin{aligned}
K_e &= 1 / \left(\frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{a1}} + \frac{1}{K_{t1}} + \frac{1}{K_{b2}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{K_{s2}} + \frac{1}{K_{a2}} + \frac{1}{K_{t2}} + \frac{1}{K_h} \right) \quad (9)
\end{aligned}$$

效刚度, E 和 G 分别是材料的弹性模量和切变模量。

根据图4中的几何关系, x_{ps} 、 h_{ps} 、 x 和 h_x 可由式(5)确定

$$\begin{aligned}
x_{ps} &= r_b[\cos\theta_k + (\theta_k + \theta_b)\sin\theta_k] - r_f\cos\theta_F + \\
&\quad (r_{ad} - r_{fd})/(r_{ax} - r_{fx}) \times (i-1) \times db/B \\
h_{ps} &= r_b[(\theta_k + \theta_b)\cos\theta_k - \sin\theta_k] \\
x &= r_b[\cos\theta_x + (\theta_x + \theta_b)\sin\theta_x] - r_f\cos\theta_F \\
h_x &= r_b[(\theta_x + \theta_b)\cos\theta_x - \sin\theta_x] \quad (5)
\end{aligned}$$

式中 θ_k 、 θ_x 、 θ_b 、 θ_F 分别是接触点、变截面齿廓点与基圆相切点处、基圆处齿廓点、齿根圆处齿廓点与齿厚中心线间的夹角。将式(5)代入式(4)并沿齿宽方向积分并整理可得轮齿各等效刚度表达式如下:

够微小时,将锥齿轮轮体近似视为等值空心圆轴,

根据其几何关系,小端基体厚度 L_x 、大端基体厚度 L_d 、小端基体轴孔半径 L_{hr} 、大端基体轴孔半径 L_{hd} 可导出如式(7)所示

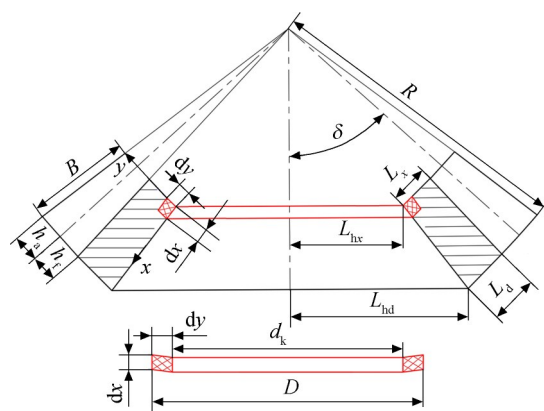


图5 齿轮轮体模型

Fig.5 Gear wheel body model

2 时变啮合刚度计算模型

直齿锥齿轮在啮合过程中一般还存在多齿啮合区。根据齿轮重合度,在单齿啮合刚度的基础上,可进一步导出直齿锥齿轮的时变啮合刚度模型。齿轮啮合过程中单齿啮合刚度变化情况如图 6 所示,曲线 ACB 表示一对齿轮副由啮入到啮出时刚度的变化曲线, A 为啮入点, B 为啮出点,重合度为 ϵ_a 。由图 6 可知,区间 $[0, \epsilon_a - 1]$ 及 $[1, \epsilon_a]$ 为双齿啮合区, $[\epsilon_a - 1, 1]$ 为单齿啮合区。

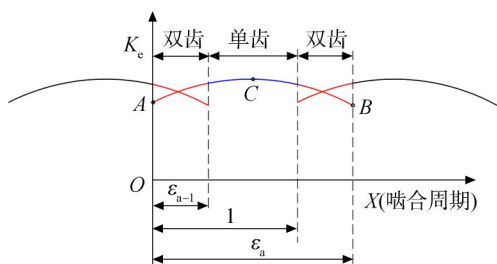


图 6 啮合区域示意图

Fig.6 Schematic diagram of meshing area

根据直齿锥齿轮渐开线展成原理,直齿锥齿轮重合度计算公式可表示为如式(10)所示

$$\epsilon_a = \frac{Z_1}{360^\circ \sin \delta_{b1}} (\psi_1 + \psi_2 - \psi_{m1} - \psi_{m2}) \quad (10)$$

式中的 δ_b 为基锥角, ψ 、 ψ_m 分别为分锥上齿形、渐开线齿形起测点的展开角^[22]。

单齿啮合区时变啮合刚度可由式(9)直接导

出。而在多齿啮合区时,齿轮副应满足以下两个基本条件:①力平衡条件;②变形协调条件,亦即单齿载荷所引起的变形转角应相等。根据变形协调条件,假设在从动轮变形转角为 θ 的情况下有 N 对齿参与啮合,第 i 对齿变形量 δ_i 的表达式为

$$\delta_i = L_i \theta \cos \alpha_i \quad (11)$$

式中 α_i 是啮合点处啮合力与齿厚方向的夹角, L_i 是图 4 所示啮合点距圆心 O_1 的距离,通过式(11)求得每齿段轮齿的变形量,求和取其平均值即为当前瞬时接触时刻轮齿变形量。通过变形量与单齿啮合刚度值可得啮合力表达式为

$$F_i = K_i \delta_i \quad (12)$$

根据力平衡条件,全部啮合力与外力须相等,即式(13)所示方程

$$F_n = \sum_{i=1}^N F_i = \sum_{i=1}^N K_i \delta_i \quad (13)$$

根据啮合刚度定义,每单位齿宽齿面法向载荷 F_n 和每个轮齿齿面法向变形量总和 δ_z 的比值,称为啮合刚度 K ,表达式为

$$K = \frac{F_n}{\delta_z} \quad (14)$$

假设第 j 对啮合齿的变形量 δ_j 比其他齿对大,综合式(11)~式(14)可得多齿啮合刚度表达式为

$$K = \frac{F_n}{\delta_z} = \frac{\sum_{i=1}^N K_i L_i \cos(\alpha_i)}{L_j \cos(\alpha_j)} \quad (15)$$

如图 7 所示,根据扭矩 T 与圆周力 F_t 、法向力

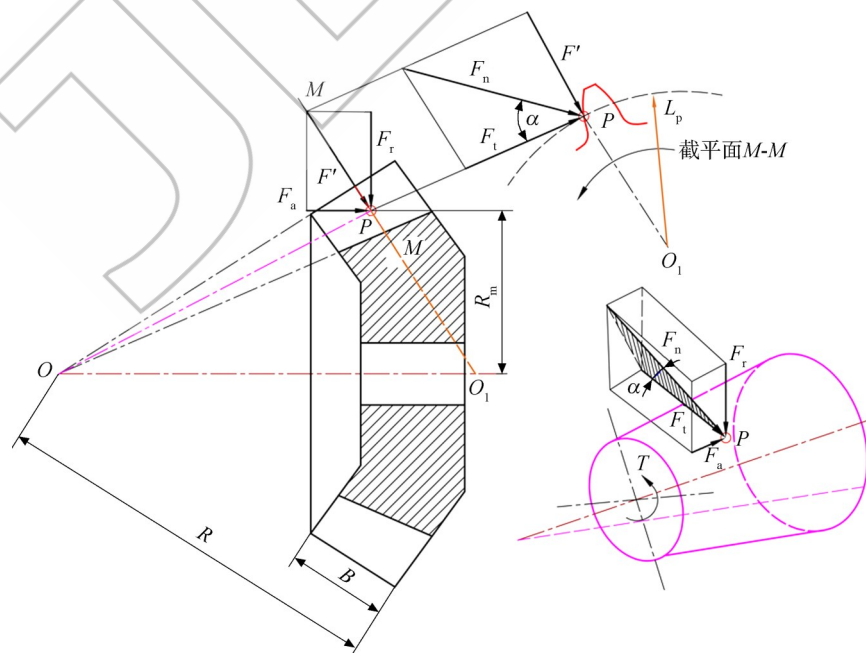


图 7 受力分析示意图

Fig.7 Schematic diagram of force analysis

F_n 之间的等量关系,以及法向变形量与周向变形转角的几何关系,由综合啮合刚度 K 可进一步求得受载时直齿锥齿轮传动误差 E_t ,如式(16)所示

$$F_t = T/R_m$$
$$F_n = F_t/\cos\alpha$$
$$E_t = 2\arcsin\{\sin[F_n/(K\times L_p)/2]\times L_p/R_m\}$$

(16)

3 算例分析

本节对比上文所述时变啮合刚度模型与有限元(FEM)分析结果的差异,完成模型的验证。进行对比的直齿锥齿轮 4 组参数如表 1 所示。

表 1 齿轮参数
Table 1 Gear parameter

参数	模数 m/mm			
	2	4	4	2.5
主动轮齿数 z_1	17	19	20	16
配对齿轮齿数 z_2	19	34	25	28
法向齿形角 $\alpha/(\text{°})$	20	20	20	20
齿面宽 B/mm	8	23	20	12
齿顶高系数 h_a^*	1	1	1	1
齿隙系数 C^*	0.2	0.2	0.2	0.2
变位系数 X	0	0	0	0
弹性模量 E/GPa	206	206	206	206
泊松比 ν	0.3	0.3	0.3	0.3

3.1 齿轮有限元前处理模型

考虑到实例中的齿轮副参数重合度大于 1 且小于 2,采用三对轮齿进行分析。有限元理论表明应用高阶单元特别是高阶六面体单元进行接触分析会导致计算难以收敛,因此,在本文中,综合考虑计算效率及计算精度后,选用低阶六面体单元划分实体部分网格^[23]。在接触区域附近,应力变化十分剧烈,为保证计算精度,对参与接触齿面部分单元边长大小设定为 0.2 mm,对其他部分单元边长大小设定为 1~2 mm。齿轮基体两侧切面和底面与转动中心建立铰接副(RP-1、RP-2),接触面间通过接触单元进行耦合,接触行为为标准接触。最终划分的网格模型如图 8 所示。

材料属性的定义见表 1,摩擦因数设为 0.15。小轮施加转动,大轮分别施加 10、30、50 N·m 的扭矩(T),运动学模型如图 9 所示。分析过程不考

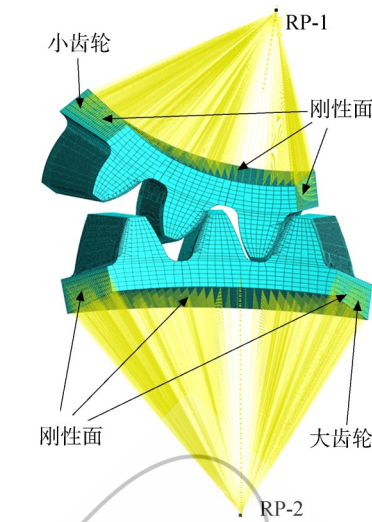


图 8 有限元模型
Fig.8 Finite element model

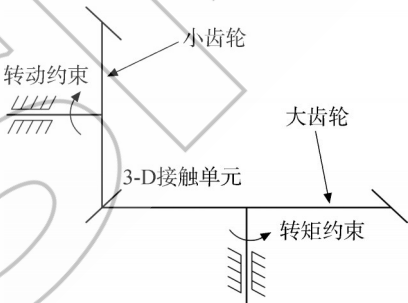


图 9 运动学模型
Fig.9 Kinematical model

虑动力学效应。
3.2 计算结果处理与分析

采用文献[12]的后处理方法对结果进行分析,并提取出单齿啮合刚度与综合啮合刚度曲线,再根据下式得到传动误差曲线:

$$E_t = \theta_g - Z \cdot \theta_p$$

(17)

式中 Z 是齿轮的传动比, θ_g 、 θ_p 分别代表主动齿轮和被动齿轮的角位移。

针对表 1 中 4 组实例,由文中方法、有限元法求解的单齿啮合刚度、综合啮合刚度和传动误差曲线对比图如图 10~图 12 所示,图中 T 表示扭矩。通过对比可知,两者整体上吻合良好,从图 10 中可看出,在单齿啮合刚度曲线整个啮合过程中,啮入、啮出区域刚度较小,而在中间部分对应的啮合刚度较强。从图 11 中可看出,单齿啮合刚度小,双齿啮合刚度大,在低载荷低重合度情况下,扭矩大小不一样,其刚度基本相同,不会随着扭矩变化而变化,且综合啮合刚度曲线是在一定范围内呈周期性交替变化的。从图 12 中可看出,

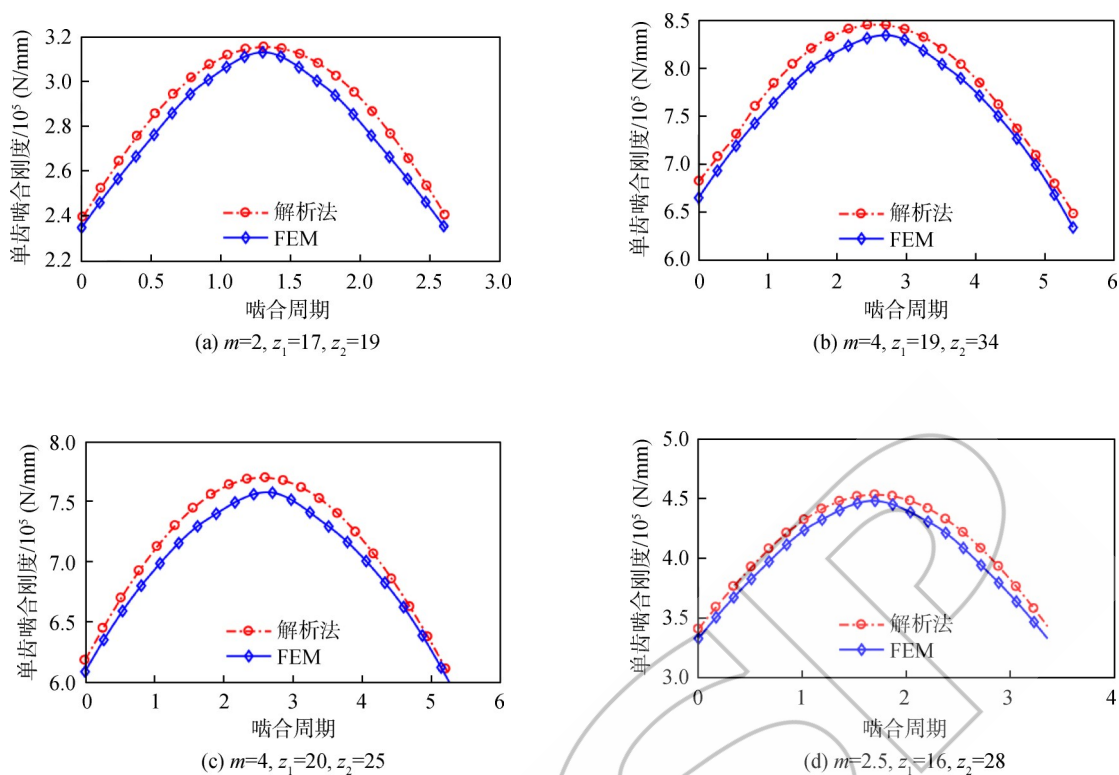


图 10 单齿啮合刚度对比图

Fig.10 Comparison diagram of single tooth meshing stiffness

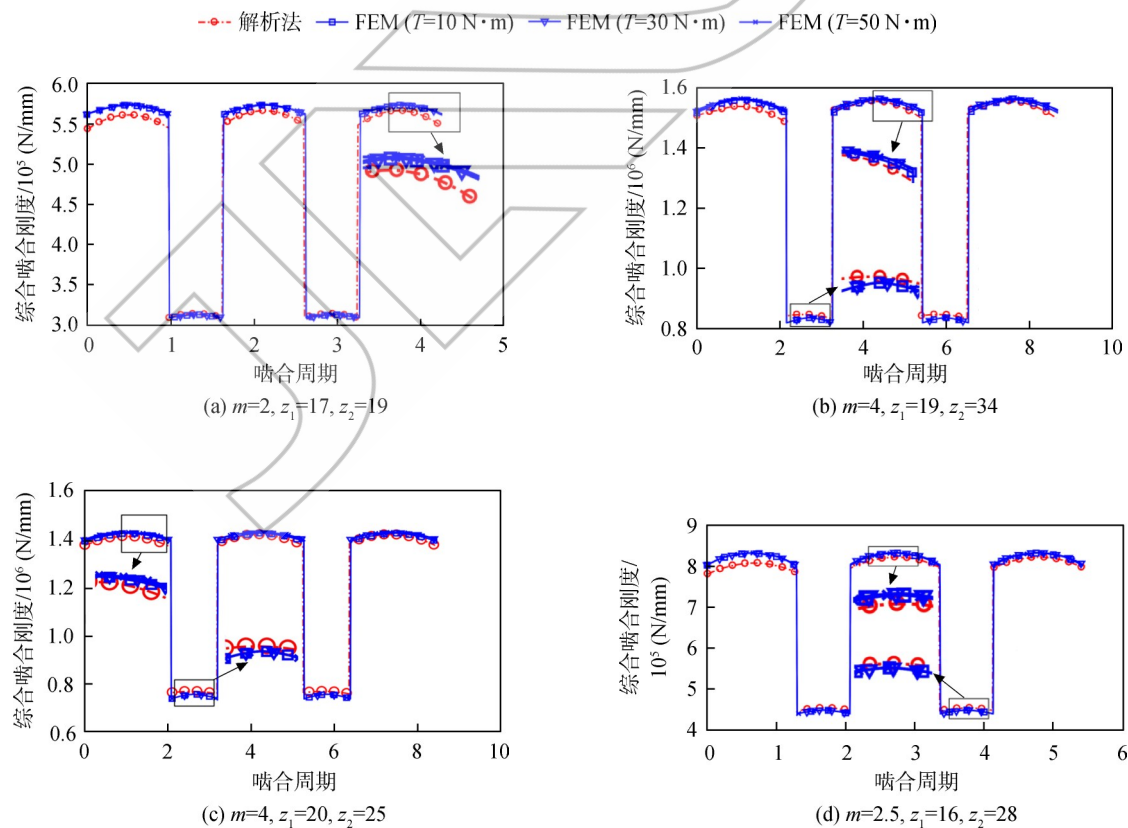
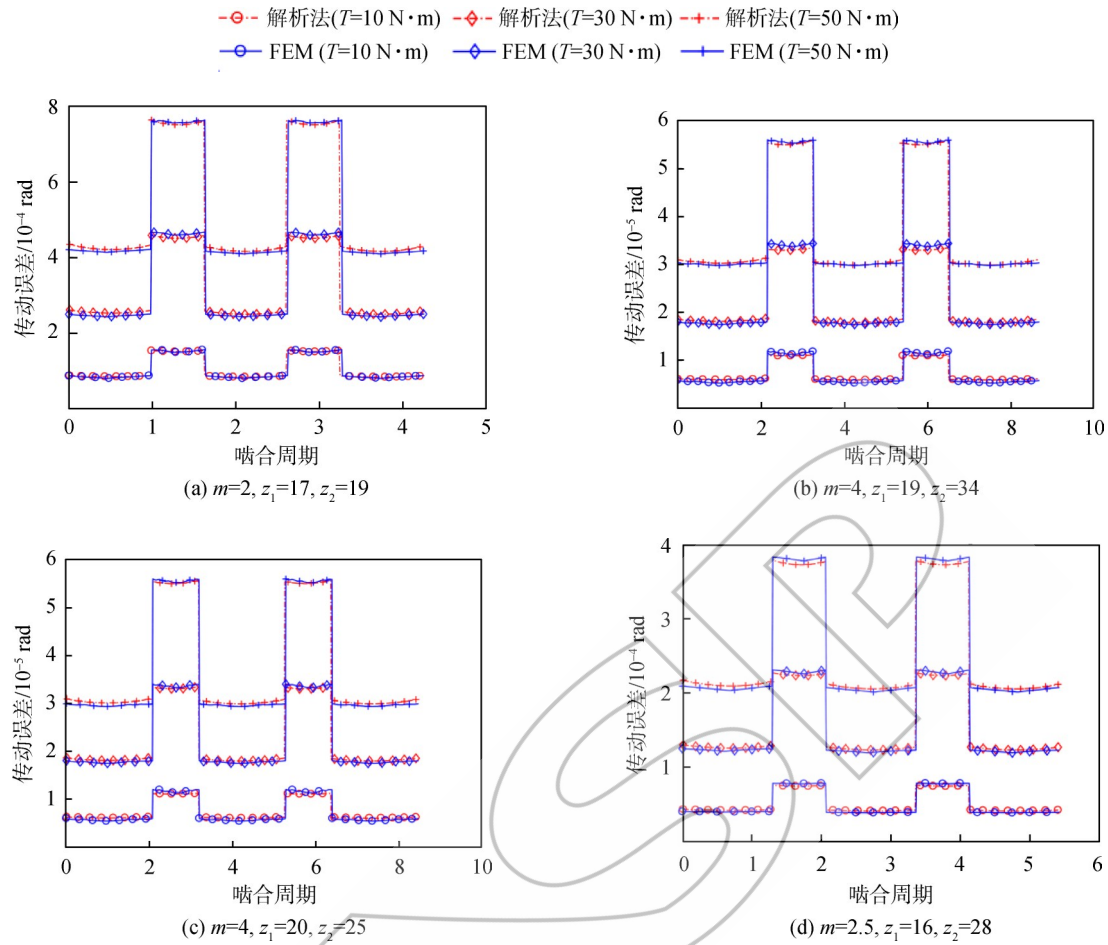


图 11 综合啮合刚度对比图

Fig.11 Comprehensive meshing stiffness comparison diagram



单齿区域的传动误差大,双齿区域的传动误差小,且传动误差与扭矩几乎成正比关系,扭矩越大传动误差越大,单齿和双齿传动误差变化越明显。但依旧存在少量误差,造成该误差的主要原因有以下几点:①本文的解析模型将本是球面渐开线的轮齿用平面渐开线进行了近似,存在几何误差;②本文未考虑微段齿段间的弹性变形作用;③承载接触下的重合度计算是根据位移协调原则进行的,本文提及的重合度计算是按照几何关系计算的,因此存在一定的误差。

主要对比结果如表 2 所示,刚度计量单位为 kN/mm,耗时计量单位为 h·min·s(小时·分钟·

表 2 啮合刚度计算误差、耗时对比

齿轮参数	计算 方法	单齿啮合刚度		时变啮合刚度		计算耗时/ (h·min·s)
		最大值/(kN/mm)	相对误差/%	平均值/(kN/mm)	相对误差/%	
$m=2, z_1=17, z_2=19$	FEM	313	0.51	505	1.48	4h0min36s
	解析法	314.6		497.5		21.084 s
$m=4, z_1=19, z_2=34$	FEM	835	1.32	1 409	1.39	6h27min3s
	解析法	846		1 389.4		46.262 s
$m=4, z_1=20, z_2=25$	FEM	758	1.58	1 288	1.65	5h51min49s
	解析法	770		1 266.7		38.847 s
$m=2.5, z_1=16, z_2=28$	FEM	448	1.11	734	1.42	4h45min21s
	解析法	453		723.6		23.329s

秒)。从表2可以看出,本文模型与有限元分析计算结果误差低于2%,从表2还可以看出,在计算精度接近的情况下,本文模型计算耗时远低于有限元分析模型,因此可以认为在保证计算精度的前提下,本文模型可达到快速导出直齿锥齿轮时变啮合刚度的目的。

4 结 论

1) 基于微元思想,将直齿锥齿轮轮齿进行切片处理,并从能量等效思想出发,能够有效构建锥齿锥齿轮单齿啮合刚度模型。

2) 基于变形协调原理,补充力平衡与变形协调方程,在直齿锥齿轮单齿啮合刚度的基础上能够有效导出综合啮合刚度计算式。

3) 文中提出的刚度解析模型在保证精度的前提下,达到了直齿锥齿轮啮合刚度快速求解的目的,在传动系统的耦合分析当中,有效地减少了分配到齿轮分析上的资源。

对于当前大量使用的如直齿轮、斜齿轮、直齿锥齿轮等修形齿轮的啮合刚度计算,均可运用本文方法:基于微元思想,在能量等效的基础上,创建合理的截平面与等量关系,然后构建悬臂梁模型,采用累计积分势能法来计算其啮合刚度(此处积分范围即为每一瞬时接触迹线的长度);而对于弧齿等齿轮而言,由于其齿形的特殊性,每一瞬时接触线上的接触点构建的截平面,所得到的截面齿廓则不适用于悬臂梁模型,或许采用边界元算法或有限元算法更为合适。

参考文献:

- [1] 王延忠,周元子,李国权,等.螺旋锥齿轮啮合刚度及参数振动稳定性研究[J].航空动力学报,2010,25(7):1664-1669.
WANG Yanzhong, ZHOU Yuanzi, LI Guoquan, et al. Study on meshing stiffness and parametric vibration stability of spiral bevel gear[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(7): 1664-1669. (in Chinese)
- [2] 孟宗,石桂霞,王福林,等.基于时变啮合刚度的裂纹故障齿轮振动特征分析[J].机械工程学报,2020,56(17):108-115.
MENG Zong, SHI Guixia, WANG Fulin, et al. Vibration characteristic analysis of cracked gear based on time-varying meshing stiffness[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(17):108-115. (in Chinese)
- [3] WAN Zhiguo, CAO Hongrui, ZI Yanyang, et al. Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 92:447-463.
- [4] SHAO Y, CHEN Z. Dynamic features of planetary gear set with tooth plastic inclination deformation due to tooth root crack[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 74(4):1253-1266.
- [5] 樊继开.含裂纹齿轮的时变啮合刚度计算及裂纹辨识研究[D].武汉:华中科技大学,2017.
FAN Jikai. Calculation of time-varying meshing stiffness of cracked gear and study on crack identification[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2017. (in Chinese)
- [6] CHEN Siyu, TANG Jiuyuan, LUO Caiwang. Effects of the gear tooth modification on the nonlinear dynamics of gear transmission system[J]. Advanced Materials Research, 2010, 905(198):2764-2769.
- [7] CHEN Siyu, TANG Jiuyuan, LUO Caiwang, et al. Nonlinear dynamic characteristics of geared rotor bearing systems with dynamic backlash and friction[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4):466-478.
- [8] PIMSARN M, KAZEROUNIAN K. Efficient evaluation of spur gear tooth mesh load using pseudo interference stiffness estimation method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(8):769-786.
- [9] 常乐浩,刘更,郑雅萍,等.一种基于有限元法和弹性接触理论的齿轮啮合刚度改进算法[J].航空动力学报,2014,29(3):682-688.
CHANG Lehao, LIU Geng, ZHENG Yaping, et al. A modified method for determining mesh stiffness of gears based on finite element method and elastic contact theory[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(3):682-688. (in Chinese)
- [10] 王刚强.修形斜齿轮啮合刚度解析模型与系统振动特性研究[D].重庆:重庆大学,2018.
WANG Gangqiang. An analytical model for the meshing stiffness of helical gears with modification and system vibration characteristics[D]. Chongqing: Chongqing University, 2018. (in Chinese)
- [11] 魏冰阳,杨建军,聂少武.差曲面拓扑的齿轮啮合刚度计算与承载接触分析[J].航空动力学报,2019,34(12):2745-2752.
WEI Bingyang, YANG Jianjun, NIE Shaowu. Calculation of gear meshing stiffness and loaded tooth contact analysis based on ease-off surface topology[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(12):2745-2752. (in Chinese)
- [12] 唐进元,蒲太平.基于有限元法的螺旋锥齿轮啮合刚度计算[J].机械工程学报,2011,47(11):23-29.
TANG Jinyuan, PU Taiping. Meshing stiffness calculation of spiral bevel gears based on finite element method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11):23-29. (in Chinese)
- [13] ALSHYYAB A, KAHRAMAN A. Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: period-one motions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 284(1):151-172.
- [14] 马辉,逢旭,宋溶泽,等.基于改进能量法的直齿轮时变啮合刚度计算[J].东北大学学报(自然科学版),2014,35(6):

- 863-866,884.
- MA Hui, PENG Xu, SONG Rongze, et al. Calculation of time-varying mesh stiffness of straight gear based on improved energy method[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science Edition), 2014, 35(6): 863-866, 884. (in Chinese)
- [15] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 62:63-74.
- [16] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Mesh stiffness of an internal spur gear pair with ring gear rim deformation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 69:1-12.
- [17] CHEN Zaigang, ZHOU Ziwei, ZHAI Wanming, et al. Improved analytical calculation model of spur gear mesh excitations with tooth profile deviations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 149:103838.1-103838.17.
- [18] MENNEM R C. Parametrically excited vibrations in spiral bevel geared systems[D]. West Lafayette, US: Purdue University, 2004.
- [19] MARAMBEDU K R. Development of a procedure for the analysis of load distribution, stresses and transmission error of straight bevel gears[D]. Columbus, US: Ohio State University, 2009.
- [20] 陈霞. 直齿锥齿轮修形方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
- CHEN Xia. Research on the tooth modification methods of the straight bevel gear[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006. (in Chinese)
- [21] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness[J]. European Journal of Mechanics: A/Solids, 2008, 28(3):461-468.
- [22] 孙庆华. 直齿锥齿轮渐开线齿形起测点的展开角计算[J]. 计量技术, 1995(9):7-9.
- SUN Qinghua. Calculation of expand angle of measuring point of involute tooth profile of spur bevel gears[J]. Metrology Science and Technology, 1995(9):7-9. (in Chinese)
- [23] 谭儒龙. 共轭曲线锥齿轮研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
- TAN Rulong. Research on conjugated curve bevel gears[D]. Chongqing: Chongqing University, 2016. (in Chinese)

(编辑: 王碧珩)