

基于通用三坐标测量机的面齿轮齿形误差测量

曾彪¹, 周元生^{1,2}, 王圣晖¹, 何玉辉^{1,2}, 唐进元^{1,2}

(1. 中南大学机电工程学院, 长沙 410083;

2. 中南大学高性能复杂制造国家重点实验室, 长沙 410083)

摘 要: 考虑面齿轮实际齿面的加工误差客观存在的基础上, 采用一种迭代方法建立测量坐标系, 使得测量坐标系尽量接近设计坐标系, 并根据加工误差对测量坐标系与设计坐标系之间关系的数学模型进行约束, 从而实现精确求解。在此基础上, 建立了实测点与理论测量点之间的数学模型, 并由此补偿加工误差引起的相关测量误差。最后进行实际测量实验, 结果显示本方法的测量坐标系与设计坐标系之间的误差相比于传统方法降低了 89% 以上, 最大测量偏差降低了 54% 以上, 测量结果更加真实可靠。

关 键 词: 面齿轮; 三坐标测量机; 齿形误差; 测量坐标系; 测量误差补偿

中图分类号: V260; TH132.41

文献标志码: A

Tooth profile error measurement of face gear based on general coordinate measuring machine

ZENG Biao¹, ZHOU Yuansheng^{1,2}, WANG Shenghui¹,

HE Yuhui^{1,2}, TANG Jinyuan^{1,2}

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering,
Central South University, Changsha 410083, China;

2. State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing,
Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: By considering the truth of the existence of machining errors of face gear, an iterative method was applied to make measurement coordinate system as close as possible to design coordinate system. The optimization model of the relationship between measurement coordinate system and design coordinate system was constrained according to the machining errors. This optimization model was accurately solved based on the above two steps. Furthermore, a mathematical model between the theoretical measurement point and the practical measurement point was established to compensate the related measurement errors caused by machining errors. Finally, the actual measurement experiment was carried out. The results showed that the error between the measurement coordinate system and the design coordinate system of this method was reduced by

收稿日期: 2021-05-13

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFB2001700); 国防基础科研计划(JCKY202013B006);

国家科技重大专项(2019-VII-0017-0158)

作者简介: 曾彪(1996—), 男, 硕士生, 研究方向为齿轮设计制造。

通信作者: 周元生(1986—), 男, 副教授、博士生导师, 博士, 主要研究方向为齿轮设计制造、数控加工。E-mail: zyszy@csu.edu.cn

引用格式: 曾彪, 周元生, 王圣晖, 等. 基于通用三坐标测量机的面齿轮齿形误差测量[J]. 航空动力学报, 2022, 37(4): 856-868.

ZENG Biao, ZHOU Yuansheng, WANG Shenghui, et al. Tooth profile error measurement of face gear based on general coordinate measuring machine[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(4): 856-868.

more than 89% compared with the traditional method, the maximum measurement deviation was reduced by more than 54%, presenting more real and reliable measurement results.

Key words: face gear; coordinate measuring machine; tooth profile error; measurement coordinate system; compensating measurement error

面齿轮传动于20世纪90年代开始作为一种传动分汇扭新型方案应用于直升机传动系统中,相应的面齿轮分汇扭传动主减速器较传统结构质量下降了40%,且具有动力分流效果好、振动小、噪声低等显著优势^[1-2]。面齿轮作为新型传动系统中的关键部件,制造精度是影响其各项性能的重要指标^[3],在加工制造的过程中,准确的齿形测量结果能有效地指导下一步的反调修正^[4-5],从而提高加工精度。

在针对零件加工精度的测量时,首先需根据零件设计模型规划测量路径,获取理论测量点在设计坐标系下的坐标及法矢,并根据加工后的零件建立测量坐标系,进行实际测量获取测量点在测量坐标系下的坐标信息,最后采用数据处理算法进行误差分析^[6-8]。理想情况下,如果测量坐标系与设计坐标系重合或误差很小,且测量设备及软件、偶然因素等影响也很小,得出的测量结果能非常准确地反应出加工误差。而实际测量过程中与理想情况下的差别不容忽视,测量机床自身存在的几何误差、测头类型及相应的数据补偿方式、测量软件的误差评价方法都会对测量结果产生影响^[9-11],除此之外,对测量精度要求很高且几何复杂的齿轮类零件,在不考虑测量设备及软件、偶然性等因素影响的情况下,主要还有以下两个方面引起测量误差。

1) 测量坐标系与设计坐标系之间的差异导致的测量误差。

测量过程中需根据实际加工后的零件几何建立测量坐标系,该过程中影响测量坐标系建立的因素众多,使得测量坐标系难以与设计坐标系重合^[12],且测量之前无法获得衡量两者之间关系的信息^[13]。在此基础上,实际测量前需根据设计模型进行理论测量路径规划,相应测量点的坐标及法矢信息是在设计坐标系下获得的,而测量时这些信息则是在测量坐标系下使用,由于测量坐标系与设计坐标系之间存在差异,故实际测量路径与理论测量路径存在误差,从而影响测量结果。

2) 加工误差引起的测量误差

由于加工误差存在,加工后的齿面相对于原

有设计模型是存在误差的,使得相应的实际测量点与理论测量点存在偏差^[14]。另外,加工误差的存在同时也影响测量坐标系的建立,进一步影响测量结果。

为满足零件的高精度测量要求,目前已存在较多针对上述两个因素的研究工作,Liu和Fang等^[15-16]基于齿轮测量中心,考虑测量过程中加工误差引起的渐开线斜齿轮角对中误差,提出了一种有效的齿距和齿形的测量误差补偿方法。Shi等^[17]提出了一种基于五轴铣床的螺旋锥齿轮在机测量方法。Li等^[18]针对准双曲面齿轮齿面数据测量的局限性,利用误差敏感性分析模型,通过三维测量点重建,得到了描述实际齿面局部微几何特征的真实齿面。Zhang等^[19]针对测量过程中的旋转和加速运动引起的动态测量误差问题,利用加速度计和陀螺仪对测量误差进行补偿;以上研究的相关成果也用在了面齿轮的测量上^[20-21]。

面齿轮的测量设备可以使用齿轮专用测量设备和通用测量设备两类。对于面齿轮专用测量方法,可以采用齿轮测量中心来实现^[22],也可以在三坐标测量机上结合专用的测量软件(如QUINDOS)来实现,上述专用测量方法的测量精度高,但需要配备专用设备或软件。如使用通用测量设备,在三坐标测量机上采用通用测量软件(如PC-DIMS)即可以进行^[23],通用性强,但目前测量精度一般难以保证,需要进一步研究合理的测量方法并开发相关数据处理技术来提高测量精度。

为保证面齿轮三坐标测量方法的测量精度,许多学者开展了相关研究。波音公司Heath等^[24]首先提出使用坐标测量仪(CMM)对面齿轮齿面进行坐标测量,并将测量区域规划在工作齿面上。北京工业大学的石照耀教授团队^[25]考虑了面齿轮设计坐标系和测量坐标系之间的转换误差,研究了测球半径对测量结果的影响规律。齿距偏差方面,中南大学的唐进元教授团队^[26]提出面齿轮齿距偏差曲面的相关概念,构建了基于三坐标测量机获得面齿轮齿距偏差曲面的方法。重庆大学的林超等^[27]对如何建立面齿轮的测量坐标系进行了研究,提出了一种基于“三二一原理”的面齿轮测

量坐标系建立方法。

现有的面齿轮测量方面的研究已取得一定成果,但在某些情况下还存在一些局限性,尤其是对以下两个方面的研究还有待深入。

1) 面齿轮测量坐标系与设计坐标系之间关系数学模型的精确求解。

根据坐标变换原理,测量坐标系与设计坐标系之间的关系可以表示为包含 5 个未知量的坐标变换相关的数学模型,并可以进一步根据测量结果来求解该数学模型^[25]。该求解过程为复杂的全局优化问题求解,求解结果不但对初始值非常敏感,而且存在多解,且很可能实际要找的解并非全局最优解,故容易出现噪声解。面齿轮齿面复杂,根据传统方法建立的测量坐标系与设计坐标系还存在较大偏差,使得相应优化问题的初值不理想。此外,目前也无相关研究来指导如何避免该优化问题的噪声解。

2) 测量坐标系与设计坐标系的差异及加工误差对测量结果的影响相互耦合,目前还缺乏同时考虑这两个因素对测量结果影响的研究工作。

针对上述两个问题,本文提出了相应解决方案,主要思路包含下述 3 点:

1) 鉴于加工误差的客观存在,在建立测量坐标系的过程中,综合考虑面齿轮的几何特点及其相应加工误差,尽可能将测量坐标系接近设计坐标系,从而为求解测量坐标系与设计坐标系之间关系的数学模型提供良好的初值。

2) 根据加工误差约束测量坐标系与设计坐标系之间关系的数学模型,有效地缩小解集空间,从而尽量避免噪声解。

3) 在获得测量坐标系与设计坐标系之间关系的基础上,进一步分析加工误差对测量结果的影响,并由此补偿加工误差引起的测量误差。

1 测量路径规划

1.1 面齿轮齿面方程及法矢

面齿轮齿面几何一般根据面齿轮的产形原理进行设计,考虑面齿轮与小轮的啮合过程,将小轮替换为一个少齿数的产形轮,面齿轮齿面则由该产形轮齿面在啮合过程中包络形成^[1-2]。以正交直齿面齿轮为例,产形轮(或小轮)与面齿轮啮合的相对位置关系如图 1 所示,其中产形轮轴线与面齿轮轴线相交于一点,且产形轮和面齿轮在啮合过程中分别以角速度 ω_s 、 ω_2 旋转角度 φ_s 、 φ_2 。根据

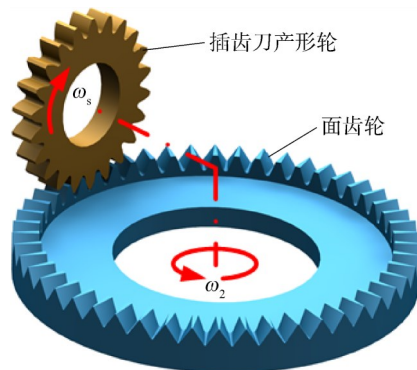


图 1 面齿轮副空间啮合

Fig.1 Spatial meshing of face gear pair

产形轮齿面方程和相应的啮合过程,可得面齿轮齿面方程^[28]

$$\mathbf{r}(\theta_s, \varphi_2) = [x(\theta_s, \varphi_2) \ y(\theta_s, \varphi_2) \ z(\theta_s, \varphi_2)]^T \quad (1)$$

其中 θ_s 为产形轮齿廓线的参变量。根据齿面方程,对应齿面点法矢可表示为

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}(\theta_s, \varphi_2)}{\partial \theta_s} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\theta_s, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} \quad (2)$$

1.2 待测区域规划

在面齿轮齿形误差的评价过程中,应选取合适的齿面区域进行测量。首先,为了避免测球在齿顶边缘和齿根处发生干涉,测量齿面时在边界处需要预留出一定的空间。其次,考虑面齿轮过渡区域不直接参与啮合传动,为了更好地分析测量结果,面齿轮齿形误差评价范围以工作齿面为对象^[29]。在上述两点考虑的基础上,参照螺旋锥齿轮的齿形误差测量方法^[30],测量区域 ABCD 规划如图 2 所示,齿宽方向各向内收缩 10%;齿顶向下收缩 5%,过渡曲线向上收缩 5%;其中 W_h 为面齿轮齿宽, H_v 表示工作区域对应齿宽处的截面线在面齿轮轴线上的投影。测量区域密度为 9×5 的网格点,即在齿宽方向取 9 个网格点,齿高方向上取 5 个网格点。

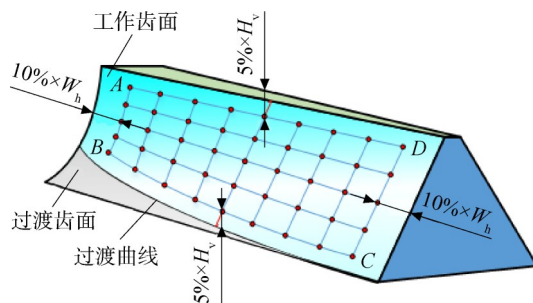


图 2 面齿轮齿面网格示意图

Fig.2 Schematic diagram of face gear tooth surface mesh

1.3 测量点坐标求解

要实现对面齿轮测量路径的规划,还需求得待测区域网格点的理论坐标。为此,构建面齿轮齿槽中心平面 ZOR ,如图3所示,待测区域网格点

与平面 ZOR 上的点存在一一对应的关系,以齿面上某一待测网格点 P_i 为例,其绕面齿轮轴线 Z 旋转的轨迹与平面 ZOR 的唯一交点为点 P ,相应地称该一一对应的关系为旋转投影关系。

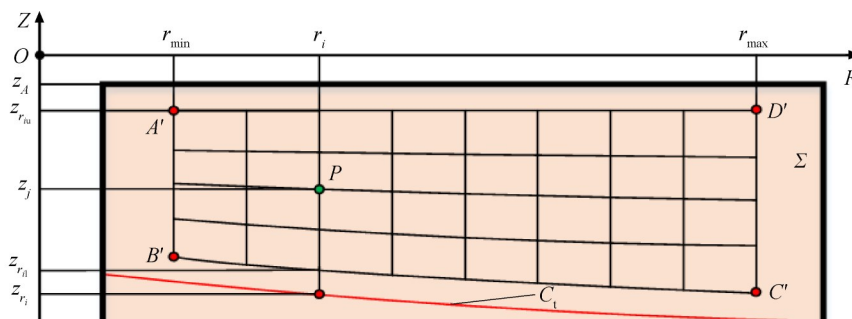


图3 待测区域投影平面

Fig.3 Projection plane of the area to be measured

对应地,面齿轮齿面在 ZOR 上的旋转投影为 Σ ,待测区域 $ABCD$ 在平面 ZOR 上的旋转投影为 $A'B'C'D'$,曲线 C_i 为过渡曲线在 ZOR 上的旋转投影。假设面齿轮内半径为 R_i ,外半径为 R_o ,在图3所示的 ZOR 坐标系内,投影区域 $A'B'C'D'$ 边缘点 A' 、 B' 的 r 坐标 $r_{\min}$ 为

$$r_{\min} = R_i + (R_o - R_i) \times 10\% \quad (3)$$

边缘点 D' 、 C' 的 r 坐标 $r_{\max}$ 为

$$r_{\max} = R_o - (R_o - R_i) \times 10\% \quad (4)$$

在 OR 轴的 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 区间上规划9个等距节点 $r_i (i=1, 2, \dots, 9)$,使得

$$r_i = r_{\max} - \frac{i-1}{8} (r_{\max} - r_{\min}) \quad (5)$$

根据过渡曲线形成原理^[31],结合齿面方程(式(1)),过渡曲线上半径 r_i 处的点 $r(\theta_{\max}, \varphi_i)$ 满足

$$\sqrt{x^2(\theta_{\max}, \varphi_i) + y^2(\theta_{\max}, \varphi_i)} = r_i \quad (6)$$

其中 $\theta_{\max}$ 为产形轮齿顶对应的展角,是已知常数。据此求解式(6)可得 φ_i ,再将 $\theta_{\max}$ 、 φ_i 代入式(1),可得过渡曲线在 r_i 处 Z 坐标 z_{r_i} 为

$$z_{r_i} = z(\theta_{\max}, \varphi_i) \quad (7)$$

C_i 为齿面过渡曲线绕 Z 轴旋转投影得到,故曲线 C_i 上所有点在 ZOR 平面上的 Z 坐标与过渡曲线上对应点的 Z 坐标相等,令投影区域在 R_i 处的 Z 坐标上下限 $z_{r_{\min}}$ 、 $z_{r_{\max}}$ 为

$$z_{r_{\min}} = z_A - (z_A - z_{r_i}) \times 5\% \quad (8)$$

$$z_{r_{\max}} = z_{r_i} + (z_A - z_{r_i}) \times 5\% \quad (9)$$

式(8)、式(9)中 z_A 为面齿轮齿顶在 ZOR 坐标系内的 Z 坐标值,这样在投影区域 $A'B'C'D'$ 内,

每一个 r_i 对应着一对上下限 $z_{r_{\min}}$ 、 $z_{r_{\max}}$,如图3所示。

相应的在区间 $[z_{r_{\min}}, z_{r_{\max}}]$ 上规划5个等距节点 $z_j (j=1, 2, \dots, 5)$,使得

$$z_j = z_{r_{\min}} + \frac{j-1}{4} (z_{r_{\max}} - z_{r_{\min}}) \quad (10)$$

结合式(5)和式(10),投影区域 $A'B'C'D'$ 内的 9×5 个网格点坐标可表示为 $P(r_i, z_j)$ 。根据旋转投影的原理,投影网格点 P 与待测齿面网格点 $P_i(\theta_s, \varphi_2)$ 之间存在对应关系如下:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2(\theta_s, \varphi_2) + y^2(\theta_s, \varphi_2)} = r_i \\ z(\theta_s, \varphi_2) = z_j \end{cases} \quad (11)$$

已知参数 r_i 和 z_j ,求解式(11)对应的参数 θ_s 、 φ_2 ,具体求解过程可以参考文献[28],再结合式(2)可求得齿面网格点 P_i 及其法矢 $\mathbf{n}_i$,故网格点理论坐标及法矢可表示为关于参数 r_i 、 z_j 的矢量函数 $P_i(r_i, z_j)$ 和 $\mathbf{n}_i(r_i, z_j)$ 。

2 测量坐标系的建立

2.1 测量坐标系建立策略

以面齿轮设计坐标系作为理想测量坐标系,齿面网格中心点为设计坐标系的角向定位基准,假设面齿轮设计坐标系 S_d 如图4所示,坐标原点 O_d 与上端面圆心重合, Z_d 轴与面齿轮轴线共线,远离上端面的方向为正, Y_d 方向为网格中心点 $P_i(r_5, z_3)$ 与 Z_d 轴确定的平面的法矢, X_d 根据笛卡儿右手法则确定。

定义理想的测量坐标系之后,需进一步建立测量坐标系与实际零件之间的关系,由于该坐标

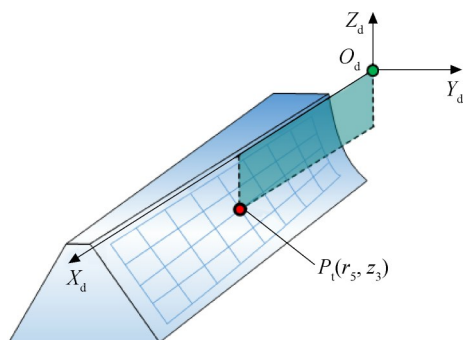


图4 面齿轮设计坐标系

Fig.4 Face gear design coordinate system

系通常与理想的测量坐标系有所差异,称之为实际测量坐标系。一般地,可通过测量零件特征元素上各个实际点的坐标,并进行相应的数学处理,从而建立工件实际摆放位置与测量坐标系之间的对应关系,即获得了实际测量坐标系。对于面齿轮齿面来说,网格中心点 $P_i(r_i, z_i)$ 并不是突出的特征元素,在确定测量坐标系角向定位基准的过程中,很难准确地在实际齿面上触碰到该点,存在一定程度的偶然性;选取的测量基准与设计基准位置的差异将会导致测量坐标系与设计坐标系不重合,影响测量结果的准确性。

为了减小制造误差及选取基准时的偶然性对测量坐标系的影响,本文基于以下两点策略建立测量坐标系,使得建立的实际测量坐标系尽可能接近理想的测量坐标系(即设计坐标系):

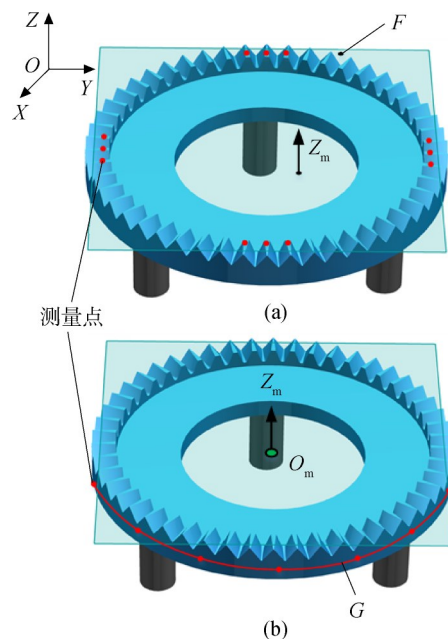
- 1) 考虑面齿轮齿坯外圆和齿顶端面的公差,确定测量坐标系的原点 O_m 和 Z_m 轴;
- 2) 基于迭代思想确定测量坐标系的 X_m 轴。

2.2 测量坐标系原点 O_m 及 Z_m 轴确定

采用通用测量软件进行测量时,系统存在一个初始坐标系 $O-XYZ$,在该坐标系下逐次触测面齿轮顶面区域的点,根据平面拟合的原理,当测量点到达一定数目时,用最小二乘的方式将测点拟合成一平面 F ,并随着测点的增加逐次更新 F ;当 F 随着触点的增加,其所表现出来的平面度在图纸规定的平面度公差范围内跳动时,提取 F 的法矢作为测量坐标系 Z_m 轴所在的方向,如图5(a)所示。平面 F 在 $O-XYZ$ 坐标系下可表示为

$$z = z_F \quad (12)$$

Z_m 轴方向确定后,测针触测外圆同一高度上的点,如图5(b)所示。当测量点个数达到一定数目时,采用最小二乘的方式将测点拟合为圆 G ,并随着测点的增加逐次更新 G ;当 G 的圆度在公差

图5 O_m 位置和 Z_m 方向确定Fig.5 Define O_m position and Z_m direction

规定的范围内趋于稳定时,提取圆心坐标 $O_G(x_G, y_G, z_G)$,此时将测量坐标系的原点 $O_m(x_m, y_m, z_m)$ 定义为

$$\begin{cases} x_m = x_G \\ y_m = y_G \\ z_m = z_F \end{cases} \quad (13)$$

2.3 测量坐标系 X_m 轴的确定

定义测量坐标系原点 O_m 和 Z_m 轴后,尚未确定的 X_m 轴、 Y_m 轴方向仍为系统初始的 X 、 Y 方向。如图6所示,在该坐标系下,将测针大致触测网格中心点 $P_i(r_i, z_i)$ 附近区域,获得测点 P_0 的三坐标测量值 $(x_{P_0}, y_{P_0}, z_{P_0})$,根据式(14)、式(15)将其转换成柱坐标形式 $(R_{P_0}, \beta_{P_0}, z_{P_0})$ 。

$$R_{P_0} = \sqrt{x_{P_0}^2 + y_{P_0}^2} \quad (14)$$

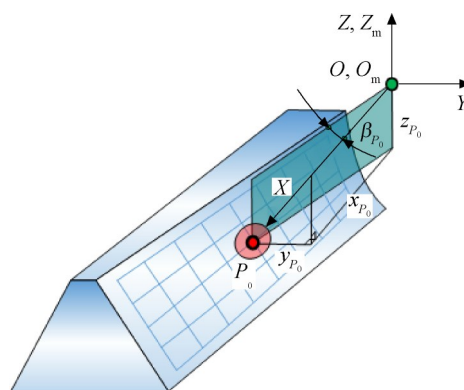


图6 粗建测量坐标系

Fig.6 Roughly establish the measurement coordinate system

$$\beta_{P_0} = \arctan\left(\frac{y_{P_0}}{x_{P_0}}\right) \quad (15)$$

其中 R_{P_0} 为点 P_0 所在的半径位置, β_{P_0} 为点 P_0 的极角。

获得 P_0 与初始 X 轴之间的转角 β_{P_0} 之后, 将坐标系 O_m-XYZ_m 绕 Z_m 轴旋转 β_{P_0} 角, 使得 XO_mZ_m 平面经过 P_0 点, 便于后文描述, 将旋转之后的测量坐标系定义为 S_0 , 此时 S_0 的 X 轴方向定义为 X_m 轴, Y 轴的方向定义为 Y_m 轴。对于面齿轮齿面来说, 点 $P_i(r_i, z_i)$ 并不是特征元素, 测量时无法保证测点 P_0 就是理论网格中心点 $P_i(r_i, z_i)$, 那么以 P_0 为角向定位基准粗略建立的测量坐标系就会与设计坐标系之间存在偶然性偏差。

为避免这一问题, 使角向定位基准点较为准确地落在面齿轮理论网格中心上, 采用一种迭代寻找齿面网格中心点确定测量坐标系 X_m 方向的方法。具体步骤如下:

1) 根据建立的理想测量坐标系(如图4所示), 求得理论网格中心点 $P_i(r_i, z_i)$ 的柱坐标 (R, O, Z) , 及该点的法矢量 $\mathbf{n}_i(r_i, z_i)$ 。

2) 在坐标系 S_k (k 初始值为 0) 下沿理论法矢 $\mathbf{n}_i(r_i, z_i)$ 触测点 $P_i(r_i, z_i)$, 输出极坐标形式的测量结果 (R_k, β_k, Z_k) ;

3) 比较该点的测量半径 R_k 与理论半径 R_i ; 若满足精度要求 $|R_k - R_i| \leq \epsilon$, 输出坐标系 S_k 作为后续测量齿面的精确坐标系; 若不满足精度要求 $|R_k - R_i| \leq \epsilon$, 则将坐标系 S_k 绕 Z_k 轴旋转 β_k 角度, 旋转后的坐标系定义为 S_{k+1} , 且令 $k = k + 1$, 跳转执行步骤 2)。

相应的流程如图7所示。

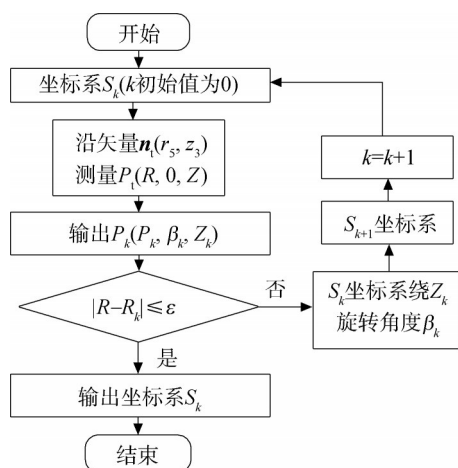


图7 迭代建立测量坐标系

Fig.7 Iteratively establish the measurement coordinate system

3 测量误差补偿

3.1 测量坐标系误差补偿及齿面位置匹配

为了便于描述, 本文将设计坐标系下 9×5 的理论点 $P_i(r_i, z_i)$ 及法矢 $\mathbf{n}_i(r_i, z_i)$ 简写为 P_{ij} 和 $\mathbf{N}_{ij}$, 对应的测量数据为 Q_{ij} ; 其中 $i = 1, \dots, 9; j = 1, \dots, 5$ 。

根据文中第2节叙述的迭代方法, 以 $|R_k - R_i| \leq \epsilon$ 为条件退出迭代过程, 较为准确地寻找到了实际齿面在半径 R 处的点作为 X_m 方向的定位基准, 从而降低了测量坐标系建立过程中的偶然性。此时如果齿面完全理想, 那么结束迭代时, 在 S_k 坐标系下, 网格中心点的角度值 β_k 应该非常接近 0; 然而在实际测量过程中发现, 在齿面半径为 R , 高度为 Z 处的点(实际齿面网格中心)由于制造误差的存在, 其角度测量值 β_k 与 0 之间有一定差距。这一现象表明, 以该点为角向定位基准建立的测量坐标系包含了该点的制造误差, 从而体现在测量值 β_k 上, 因此在面齿轮测量坐标系平面和轴向定位准确的情况下, 可以认为测量坐标系与设计坐标系之间存在绕 Z_m 的角度偏转, 并且该角度接近 β_k 。如图8(a)所示, 其中 S_d 为设计坐标系, S_k 为最终建立的测量坐标系。

为了减小测量坐标系与设计坐标系不重合带来的测量误差, 提取测量网格中心点 Q_{53} 柱坐标 (R_k, β_k, Z_k) 中的角度坐标 β_k , 将理论网格 P_{ij} 与法向量 $\mathbf{N}_{ij}$ 绕 Z_k 轴旋转 β_k 角度转换为新的理论网格 P'_{ij} 及法矢 $\mathbf{N}'_{ij}$, 从而将理论数据和测量数据统一到同一坐标系下, 如图8(b)所示。以旋转后的网格作为评价齿形误差的新理论网格。 P'_{ij} 、 $\mathbf{N}'_{ij}$ 可由式(16)、式(17)求得

$$P'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta_k & -\sin \beta_k & 0 \\ \sin \beta_k & \cos \beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P_{ij} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta_k & -\sin \beta_k & 0 \\ \sin \beta_k & \cos \beta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{N}_{ij} \quad (17)$$

通过旋转理论网格的位置, 补偿了由于测量基准制造误差而引起的测量坐标系误差。对于整个测量网格 Q_{ij} 而言, 所有点都是在有误差的测量坐标系下测量的, 虽然都在实际齿面上, 然而这些点由于测量坐标系偏差会与理论齿面测量区域之间存在一定的扭转错位, 如图9所示。为提高测量结果的可靠度, 在利用测量点得出误差数据之前, 应将测量网格与理论网格进行位置匹配^[32]。

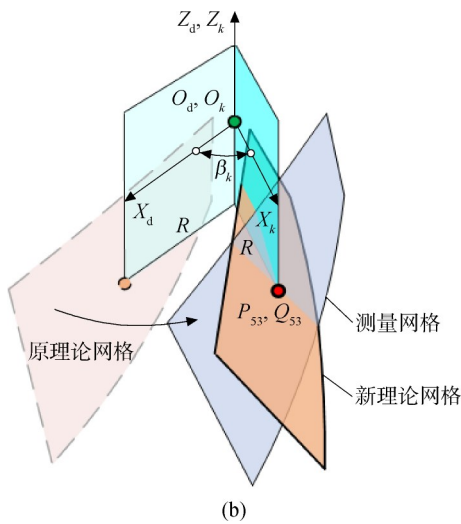
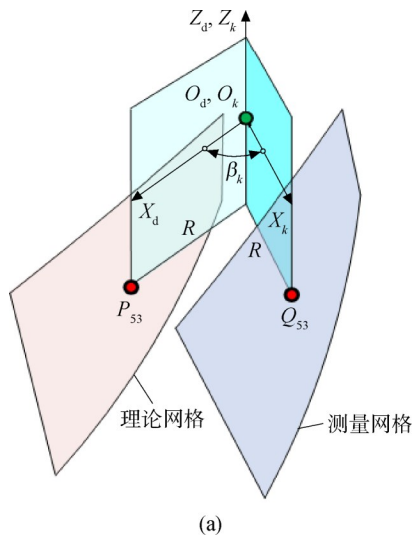


图8 测量数据与理论数据之间的关系

Fig.8 Relationship between measured data and theoretical data

而该策略的基本要求是应避免测量数据失真,能反映最真实的齿面误差。因此测量数据匹配的任务可以表示为:给定参考点阵(理论齿面) P'_{ij} 和待匹配的测量点阵 Q_{ij} ,假定两点阵已经非常接近,求 Q_{ij} 的一个变换 Q'_{ij} ,使得 Q'_{ij} 与 Q_{ij} 最大程度地重合。本文采用两点阵各点之间的法向距离平方和作为评判重合度大小的依据。

假设待匹配的测量点阵 Q_{ij} 与匹配后点阵 Q'_{ij} 的位置关系用3个平移量 x, y, z 以及绕 Z 轴和 X 轴的两个旋转量 φ, θ 来表示^[25],变换后的测量数据 Q'_{ij} 经位置匹配后的坐标由式(18)确定。

$$\begin{bmatrix} Q'_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} = R_x(\theta) \cdot R_z(\varphi) \cdot T(x, y, z) \cdot \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中

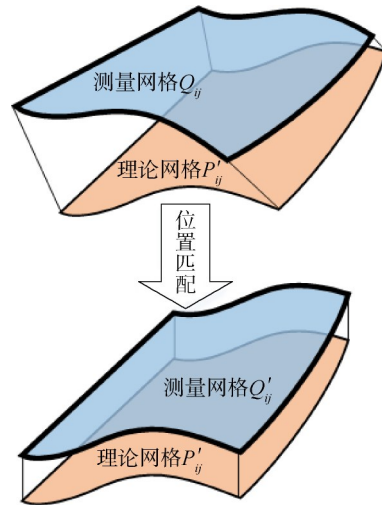


图9 曲面位置匹配

Fig.9 Surface position matching

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

为此构造目标函数

$$\min f = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^5 T_{ij}^2 \quad (22)$$

其中

$$T_{ij} = [Q'_{ij} - P'_{ij}] \cdot N'_{ij} \quad (23)$$

考察目标函数(式(22))中的5个优化变量,运用本文第2节描述的方法建立测量坐标系的过程中,保证了测量点阵与理论点阵之间的3个偏移量 x, y, z 在一个接近0的微小区间内,事实上针对式(22)中5个变量进行无约束优化模型求解时,得到的结果在数学上虽为全局最优,但没有反映齿面真实的情况,详细讨论见实验部分。

结合实际,为了不使测量点失真,对3个偏移量 x, y, z 施加如下约束:

$$\begin{cases} x_1 < x < x_u \\ y_1 < y < y_u \\ z_1 < z < z_u \end{cases} \quad (24)$$

式(24)中,偏移量 x, y 的上下边界可由面齿

轮齿坯的同轴度公差确定,偏移量 z 的上下边界可由齿顶平面度公差确定。目标函数(式(22))另外两个参数 φ 、 θ 。的约束条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

利用优化算法求解满足条件的最优解 φ^* 、 θ^* 、 x^* 、 y^* 、 z^* ,将其代入到式(18),获得位置匹配后的测量点阵 Q'_{ij} 。

3.2 实测点误差补偿

如图10所示,使用三坐标测量机进行测量时,给定的测量指令是测针沿 P' 的法矢 N' 方向去触测实际齿面,由于加工误差导致待测点附近的曲率变化较大以及测球半径的影响,测球在沿理论点法矢 N' 移动的过程中,往往未到达指定位置 Q'' 时就已经触测到 Q' ,这导致实际测量点 Q' 没有在理论点 P' 的法向上,此时测头显示的示值为 Q' 点相关的坐标信息,从而产生测量偏差 ϵ_m ,使得测量结果不能真实地反映齿面误差规律^[14],继而影响齿面后续的加工反调等工艺。

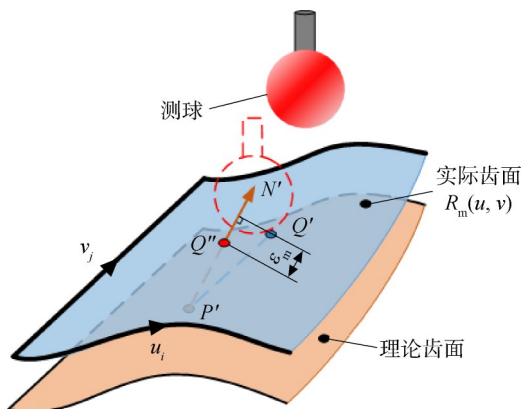


图10 测量误差示意图

Fig.10 Schematic diagram of measurement error

为尽可能地避免制造误差引起的测量偏差 ϵ_m ,本研究将测量网格重构成NURBS(non-uniform rational B-splines)曲面,采用相关的优化算法在该曲面上寻找 P' 对应的理想的测量点 Q'' 的坐标,具体步骤如下。

1) 将位置匹配后的测量点阵 Q'_{ij} 拟合成NURBS曲面 $R_m(u, v)$,其中 u 、 v 为齿宽和齿高两个方向上的参数。每一个有序数对 (i, j) 对应一组 (u_i, v_j) 。

2) 对于理论齿面上的某一点 P'_{ij} ,构造优化目

标如下:

$$[P'_{ij} - R_m(u, v)] \times N'_{ij} \rightarrow 0 \quad (26)$$

运用优化算法,以 (u_i, v_j) 为初值在曲面 $R_m(u, v)$ 上搜索 Q'_{ij} 对应的参数 (u_i^*, v_j^*) ,故点 Q'_{ij} 可表示成如下形式:

$$Q'_{ij} = R_m(u_i^*, v_j^*) \quad (27)$$

3) 将补偿后的测量点 Q'_{ij} 与对应的理论点 P'_{ij} 比较获得齿面偏差

$$\epsilon_{ij} = (P'_{ij} - Q'_{ij}) \cdot N'_{ij} \quad (28)$$

4 测量实验

4.1 实验设备及对象

实验采用装有SP600M线性测头的海克斯康STATUS575型的三坐标测量机(如图11所示)以及克林贝格P65的齿轮测量中心(如图12所示);结合通用测量软件PC-DIMS和专用测量软

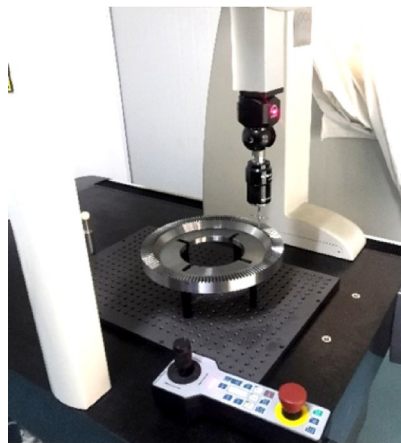


图11 海克斯康三坐标测量机测量面齿轮

Fig.11 Measuring face gear by Hexagon coordinate measuring machine



图12 克林贝格齿轮测量中心测量面齿轮

Fig.12 Measuring face gear by Klingelnberg gear measuring center

件 QUINDOS 对齿面进行测量。测量对象为 6 级精度 (参照锥齿轮标准 GB11365-2019) 的直齿面齿轮。

4.2 实验方法及测量结果

为验证本文所提出方法的合理性,设计实验步骤如下:

1) 基于三坐标测量机结合通用测量软件 PC-DMIS, 分别采用常规方法^[33]和本文方法建立测量坐标系对同一齿面进行测量, 分别获得采用常规方法建立的坐标系下的原始坐标数据和采用本文方法建立的坐标系下的原始坐标数据, 结果如图 13 所示。

2) 将常规方法获得的原始坐标数据与理论坐标数据对比获得法向偏差, 结果如图 13(a) 所

示; 将本方法获得的原始坐标数据采用本文提出的补偿方法, 获得齿面偏差如图 13(c) 所示。

3) 针对本文第 3.1 节中讨论的无约束优化模型, 本文做了 1 组对比实验, 即将本文方法中的位置匹配参数约束条件 (式 (24)) 更改为实数范围, 其余保持不变, 所得测量结果如图 13(b) 所示。

4) 最后, 为了验证本文测量方法是否有效, 基于齿轮测量中心结合专用测量软件 QUINDOS 对该齿面进行第 3 次测量, 获得结果如图 13(d) 所示, 将该结果作为检验本文方法是否有效的标准。

5) 为了避免偶然性, 本实验针对两组不同的齿面进行了上述测量操作, 所得齿面 2 测量结果如图 14 所示。

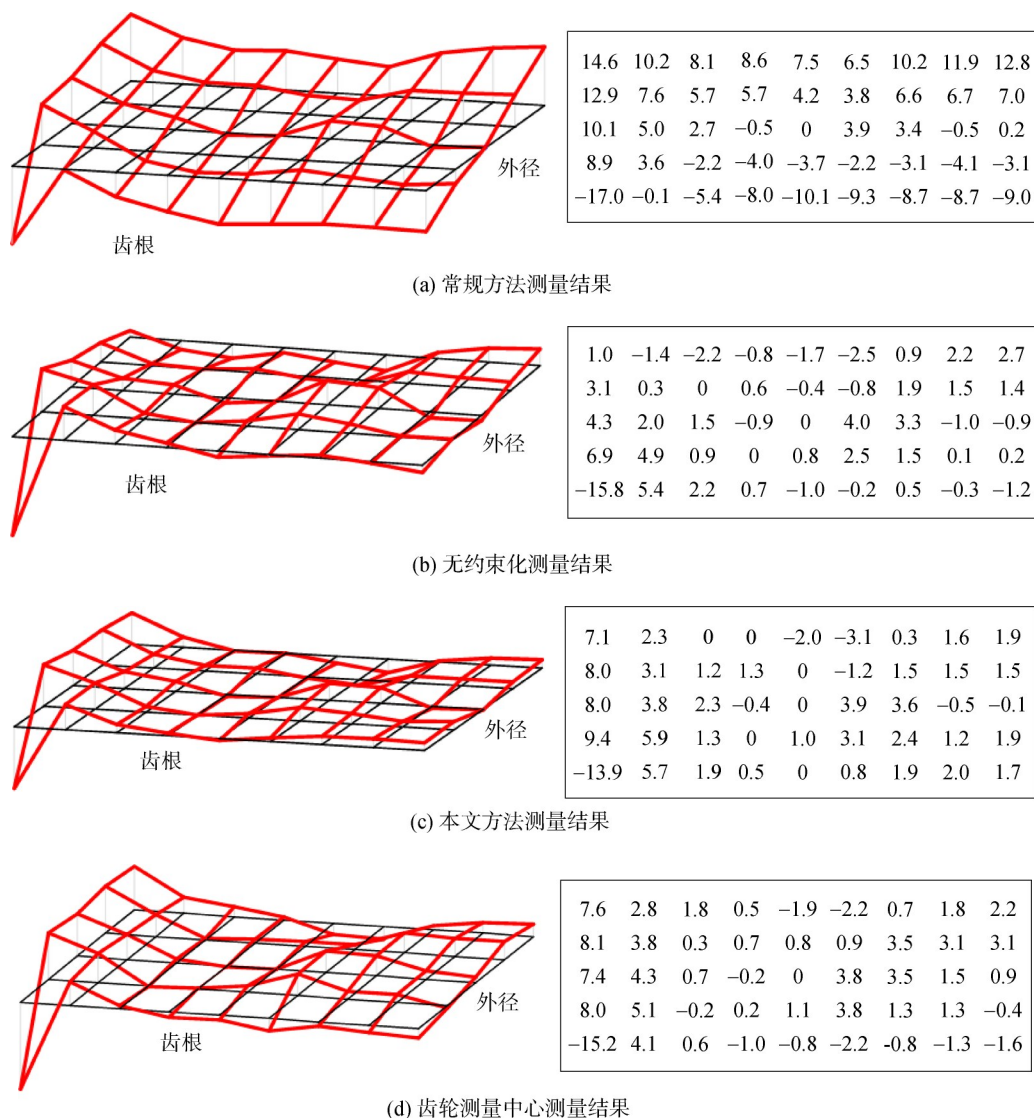
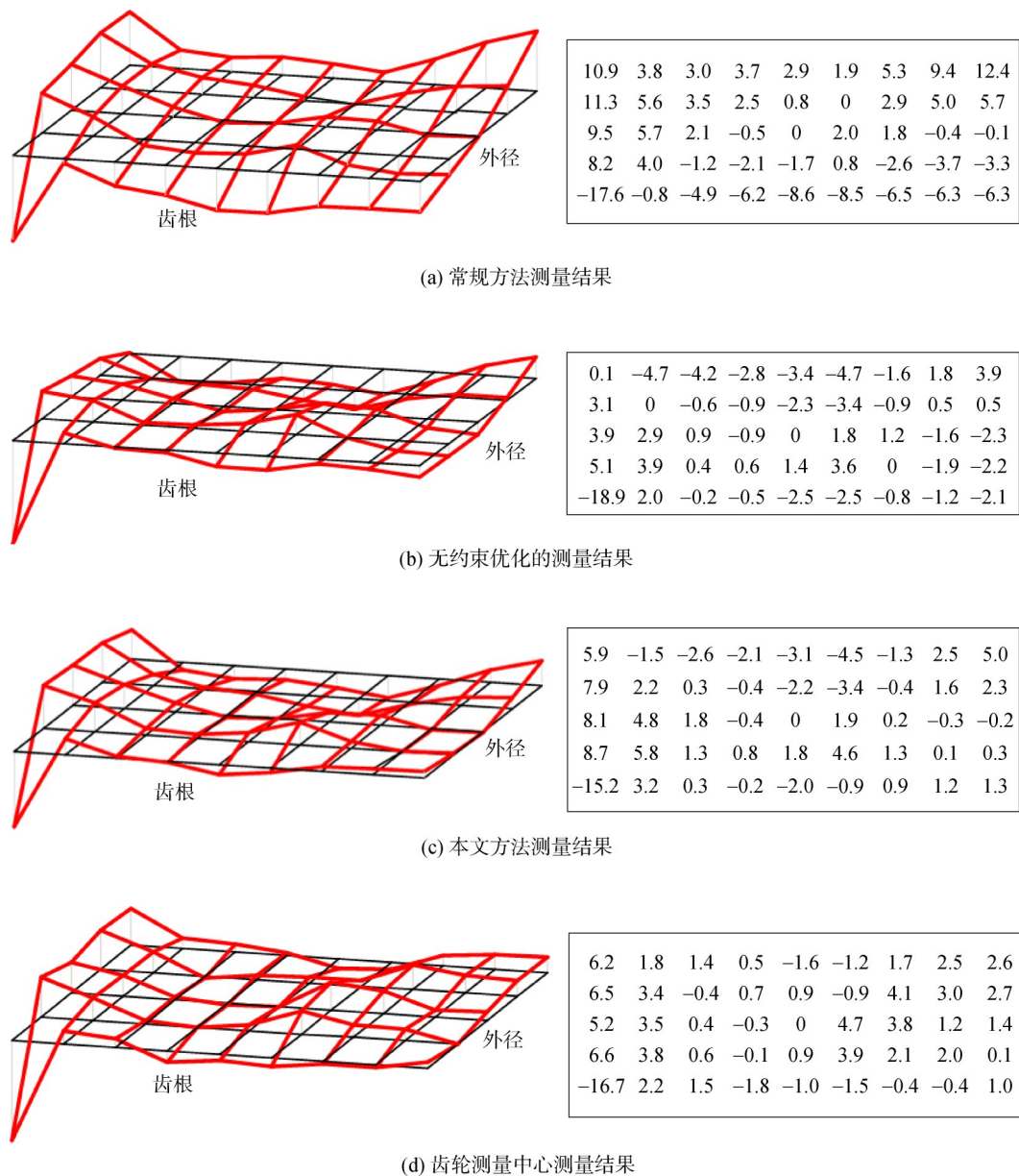


图 13 齿面 1 测量结果 (单位: μm)

Fig.13 Tooth surface 1 measurement result (unit: μm)

图14 齿面2测量结果(单位: μm)Fig.14 Tooth surface 2 measurement result (unit: μm)

4.3 实验结果分析

将基于三坐标测量机的不同测量方法获得的3组齿面测量结果与齿轮测量中心获得的结果对比,获得表1、表2所示的统计数据,包括:

- 1) 三坐标测量结果与齿轮测量中心结果对应点之间的最大测量偏差值。
- 2) 三坐标测量结果与齿轮测量中心结果 9×5 个点的相对偏差平方和。
- 3) 三坐标测量结果以及齿轮测量中心结果的绝对误差平方和。
- 4) 本文方法建立的测量坐标系与齿轮测量

中心测量坐标系之间的位置误差。

对应点之间的最大测量偏差是从单个点的层面反映不同方法的测量结果之间的吻合性。据表1、表2可知,本文方法相比于常规方法和无约束优化方法该项结果均为最小。从单个点的测量偏差层面验证了本文提出的误差补偿方法能有效地减小测量偏差。

相对偏差平方和反映的是不同方法的测量结果之间的整体吻合程度。据表1、表2可知,本文方法所得测量结果与齿轮测量中心结果之间的相对偏差平方和小于无约束优化方法和常规方法,

表 1 三坐标测量机与齿轮测量中心测量结果的对比(齿面 1)

Table 1 Comparison of measurement results between the coordinate measuring machine and gear measuring center (tooth surface 1)

数据统计项目	数值			
	本文方法	无约束优化 补偿方法	常规方法	齿轮测量中心
单个点最大测量偏差/ μm	3.3	6.6	10.6	0
相对偏差平方和/ $10^{-5} \mu\text{m}^2$	8.9	18.0	140.0	0
绝对误差平方和/ $10^{-4} \mu\text{m}^2$	6.6	4.7	26.0	6.72
测量坐标系误差/($^\circ$)、($^\circ$)、mm、mm、mm [φ^* 、 θ^* 、 x^* 、 y^* 、 z^*]	[0.080, -0.315, 0.025, 0.024, 0]	[0.072, -0.338, 0.239, 0.228, 0.147]	[0.072, -0.338, 0.239, 0.228, 0.147]	[0, 0, 0, 0, 0]

表 2 三坐标测量机与齿轮测量中心测量结果的对比(齿面 2)

Table 2 Comparison of measurement results between the coordinate measuring machine and gear measuring center (tooth surface 2)

数据统计项目	数值			
	本文方法	无约束优化 补偿方法	常规方法	齿轮测量中心
单个点最大测量偏差/ μm	4.5	6.5	9.8	0
相对偏差平方和/ $10^{-4} \mu\text{m}^2$	1.7	3.3	7.3	0
绝对误差平方和/ $10^{-4} \mu\text{m}^2$	6.9	6.2	16.0	6.09
测量坐标系误差/($^\circ$)、($^\circ$)、mm、mm、mm) [φ^* 、 θ^* 、 x^* 、 y^* 、 z^*]	[0.057, -0.223, -2.37×10^{-4} , 2.90×10^{-6} , 0]	[0.057, -0.223, -2.37×10^{-4} , 2.90×10^{-6} , 0]	[-0.087, -0.107, 0.147, 0.279, 0.157]	[0, 0, 0, 0, 0]

这表明就整体测量结果而言,本文提出的三坐标测量方法获得的测量结果更接近真实齿面。

分析本文方法与常规方法所得到的误差曲面的趋势发现,由于常规方法建立测量坐标系时难以确定角向定位基准,建立的测量坐标系与设计坐标系之间存在较大误差(3个位移误差 x^* 、 y^* 、 z^*),使得测量所得齿面(图 13(a)和图 14(a))呈现出绕齿宽方向的扭转趋势较为明显;而本文基于迭代思想建立测量坐标系,并采用合理的误差补偿方法获得的齿面与真实齿面的趋势较为一致,这一结果表明,测量坐标系建立得准确与否,会直接影响测量结果的可靠性。

针对文中第 3.1 节中讨论的无约束优化模型对测量齿面与理论齿面进行位置匹配,根据表 1、表 2 数据,该补偿方法测量结果的绝对误差平方和虽小于本文方法测量数据的绝对误差平方和,但是其与齿轮测量中心所得的测量结果之间的相对偏差平方和要大于本文方法与齿轮测量中心结果之间的相对偏差平方和,从而验证了无约束优

化模型得到的解在数学上虽为最优(即齿面误差数值上最小),但是不一定能反映齿面的真实情况。

5 结 论

1) 提出了一种考虑齿坯端面和外圆公差来确定测量坐标系原点和 Z 轴、以待测网格中心为基准迭代确定 X 轴的测量坐标系建立方法,相比于常规的测量方法,该方法能有效地减小测量坐标系的位置误差。

2) 根据测量坐标系建立的原理,通过约束测量坐标系与设计坐标系之间关系的数学模型来补偿测量坐标系误差;利用实测点的位置信息,构造优化模型,寻找与待测点相匹配的实际齿面点的方式补偿加工误差带来的测量误差,获得的测量结果更接近真实齿面。

参考文献:

[1] LEWICKI D G, HANDSCHUH R F, HEATH G F, et al. Evaluation of carburized and ground face gears[J]. Journal of

- the American Helicopter Society, 2000, 45(2):118-124.
- [2] LITVIN F L, FUENTES A, HOWKINS M. Design generation and TCA of new type of asymmetric face-gear drive with modified geometry[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(43/44):5837-5865.
- [3] 贾振元, 王永青, 王福吉, 等. 高性能复杂曲面零件测量-再设计-数字加工一体化加工方法[J]. 机械工程学报, 2013, 49(19):126-132.
- JIA Zhenyuan, WANG Yongqing, WANG Fuji, et al. Research on measure-redesign-machining integration manufacturing method for complicated surface parts with high performance[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(19):126-132. (in Chinese)
- [4] SHI Xianlin, ZHOU Yuansheng, TANG Jinyuan, et al. An innovative generated approach to dressing the worm for grinding spur face gears[J]. Manufacturing Letters, 2020, 25:26-29.
- [5] TANG Jinyuan, YIN Feng, CHEN Xingming. The principle of profile modified face-gear grinding based on disk wheel[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70(2):1-15.
- [6] BAGCI E. Reverse engineering applications for recovery of broken or worn parts and re-manufacturing: three case studies[J]. Advances in Engineering Software, 2009, 40(6):407-418.
- [7] GONZALEZ P I, FUENTES A. Tooth contact analysis of cylindrical gears reconstructed from point clouds[M]. Berlin, Germany: Springer, 2020:219-237.
- [8] GUO Xiaozhong, SHI Zhaoyao, YU Bo, et al. 3D measurement of gears based on a line structured light sensor[J]. Precision Engineering, 2020, 61:26-29.
- [9] LU Chunxia, WANG Jianhua, YIN Peili, et al. Error identification of measurement software based on digital twin of gear measuring center[J]. Measurement, 2020, 173: 108666.1 - 108666.9.
- [10] LIN Hu, KELLER F, MARTIN S. Influence and compensation of CMM geometric errors on 3D gear measurements[J]. Measurement, 2020, 151:107110.1-107110.9.
- [11] 石照耀, 韦志会. 精密测头技术的演变与发展趋势[J]. 工具技术, 2007, 41(2):3-8.
- SHI Zhaoyao, WEI Zhihui. Evolution and some trends in precision probe technology[J]. Tool Engineering, 2007, 41(2):3-8. (in Chinese)
- [12] TAKEDA R, FANG Suping, LIU Yongsheng, et al. Precision compensation method for tooth flank measurement error of hypoid gear[J]. Measurement, 2016, 89:305-311.
- [13] FEI Lan, DANTAN J, BAUDOUIN C, et al. Calibration and uncertainty estimation of non-contact coordinate measurement systems based on Kriging models[J]. Precision Engineering, 2019, 57:16-29.
- [14] 石照耀, 张华, 汤洁. 论曲面测量各向异性[J]. 机械工程学报, 2014, 50(18):1-6.
- SHI Zhaoyao, ZHANG Hua, TANG Jie. On the anisotropy of surface measurement[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(18):1-6. (in Chinese)
- [15] LIU Yongsheng, FANG Suping, WANG Huiyi, et al. Compensation method for the alignment angle error in pitch deviation measurement[J]. Measurement Science and Technology, 2016, 27(5):055008.1-055008.8.
- [16] FANG Suping, LIU Yongsheng, WANG Huiyi, et al. Compensation method for the alignment angle error of a gear axis in profile deviation measurement[J]. Measurement Science and Technology, 2013, 24(5):55-58.
- [17] SHI Yipei, YOU C H. On-machine quasi-3D scanning measurement of bevel gears on a five-axis CNC machine[J]. Journal of Engineering, 2017, 40(3):207-218.
- [18] LI Gang, WANG Zhonghou, KUBO A. Error-sensitivity analysis for hypoid gears using a real tooth surface contact model[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2015, 231(3):507-521.
- [19] ZHANG Yanshun, GUO Yajing, LI Kui, et al. Error compensation method for inclination measurement under the influence of the dynamic interference[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(3):734-741.
- [20] LIN Chao, CAO Xijun, FAN Yu, et al. Pitch deviation measurement and analysis of curve-face gear pair-science direct[J]. Measurement, 2016, 81:95-101.
- [21] ZHAO Ning, HOU Shengwen, GUO Hui, et al. The correction of face gear tooth flank deviation[J]. Advanced Materials Research, 2012, 503/504:1120-1124.
- [22] 王延忠, 王庆颖, 吴灿辉, 等. 正交面齿轮齿面偏差的坐标测量[J]. 机械传动, 2010, 34(7):1-4.
- WANG Yanzhong, WANG Qingying, WU Canhui, et al. Deviation of face gear real tooth surface determined by coordinate measurements[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(7):1-4. (in Chinese)
- [23] 王延忠, 钟扬, 侯良威, 等. 航空面齿轮磨削碟形砂轮修整方法及误差分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(1):120-129.
- WANG Yanzhong, ZHONG Yang, HOU Liangwei, et al. Dressing method and dressing error analysis of aviation face gear grinding wheel[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(1):120-129. (in Chinese)
- [24] HEATH G, FILLER R, TAN Jie. Development of face gear technology for industrial and aerospace power transmission[R]. NASA/CR-2002-211320, 2002.
- [25] 王志, 石照耀. CMM测量正交面齿轮的误差理论分析[J]. 北京工业大学学报, 2012, 38(5):663-667.
- WANG Zhi, SHI Zhaoyao. Theory analysis of error in orthogonal face gear measurement by CMM[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2012, 38(5):663-667. (in Chinese)
- [26] 唐进元, 李武俊, 张燕, 等. 基于齿距偏差曲面的面齿轮齿距偏差测量[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2015, 46(2):459-464.
- TANG Jinyuan, LI Wujun, ZHANG Yan, et al. Measuring and calculating method of face gear pitch deviation based on tooth deviation surface[J]. Journal of Central South University

- ty (Science and Technology), 2015, 46(2):459-464. (in Chinese)
- [27] 林超, 曹喜军, 王瑶, 等. 正交变传动比面齿轮齿面法向偏差测量及分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2015, 36(11):1658-1662.
- LIN Chao, CAO Xijun, WANG Yao, et al. Normal error of tooth surface measurement and analysis of orthogonal fluctuating gear ratio face gear[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2015, 36(11):1658-1662. (in Chinese)
- [28] ZHOU Yuansheng, WU Yuanhang, WANG Liming, et al. A new closed-form calculation of envelope surface for modeling face gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 137:211-226.
- [29] WANG Shenghui, ZHOU Yuansheng, TANG Jinyuan, et al. Digital tooth contact analysis of face gear drives with an accurate measurement model of face gear tooth surface inspected by CMMs[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 167:104498.1-104498.20.
- [30] SHAO Wen, DING Han, TANG Jinyuan. Data-driven operation and compensation approaches to tooth flank form error measurement for spiral bevel and hypoid gears[J]. Measurement, 2018, 122:347-357.
- [31] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied theory[M]. 2nd. ed. New York: Cambridge University Press, 2008: 97-99.
- [32] 孙玉文, 郭东明, 贾振元. 复杂曲面的测量加工一体化[J]. 科学通报, 2015, 60(9):781-791.
- SUN Yuwen, GUO Dongming, JIA Zhenyuan. Integrated measurement and machining technology of complex surfaces[J]. Chinese Science Bulletin, 2015, 60(9):781-791. (in Chinese)
- [33] 王军, 王小椿, 姜虹, 等. 螺旋锥齿轮齿面的三坐标测量[J]. 机械工程学报, 2003, 39(6):151-154.
- WANG Jun, WANG Xiaochun, JIANG Hong, et al. Three-coordinate measurement of spiral bevel gear tooth surface[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(6):151-154. (in Chinese)

(编辑: 陈越)