

旋转 FGMs 层合圆柱壳行波 模态频率分析

刘 超, 刘文光, 吕志鹏, 张宇航
(南昌航空大学 航空制造工程学院, 南昌 330063)

摘 要: 为推进功能梯度(FGMs)材料在发动机、导弹和火箭等领域的应用,旨在研究旋转 FGMs 层合圆柱壳的行波模态频率。采用 Voigt 模型和 Sigmoid 体积分数描述 FGMs 层合圆柱壳的材料属性,考虑科里奥利力、离心惯性力、环向初应力以及热内力推导了 FGMs 层合圆柱壳的能量表达式。采用切比雪夫正交多项式构造位移容许函数,建立了任意边界旋转 FGMs 层合圆柱壳的模态频率方程,并探讨了组分含量、夹层厚度、温度梯度和弹簧刚度系数等对 FGMs 层合圆柱壳模态频率的影响。结果表明:夹层厚度相比 Sigmoid 体积分数对模态频率的变化更为敏感;高旋转短薄壁圆柱壳相比长薄壁圆柱壳对边界条件和失稳现象的影响更为敏感;轴向弹簧相比其他弹簧对模态频率的影响更大。

关 键 词: FGMs 层合圆柱壳; 旋转速度; 模态频率; 任意边界; 切比雪夫多项式
中图分类号: V214.3⁺3 **文献标志码:** A

Analysis on traveling wave modal frequency of a rotating FGMs laminated cylindrical shell

LIU Chao, LIU Wenguang, LÜ Zhipeng, ZHANG Yuhang
(School of Aeronautical Manufacturing Engineering,
Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: For prompting the application of functionally graded materials (FGMs) in the fields of engines, missiles and rockets, the traveling wave modal frequencies of rotating FGMs laminated cylindrical shell were studied. The Voigt model and Sigmoid volume fraction were employed to describe the material properties of the FGMs laminated cylindrical shell. The energy expression of the rotating FGMs laminated cylindrical shell was derived with the Coriolis force, centrifugal inertial force, hoop initial tension and thermal internal force involved. The modal frequency equation of the FGMs laminated cylindrical shell with arbitrary boundary conditions was derived by using the Chebyshev orthogonal polynomial as the admissible displacement function. And the effects of material components, sandwich thickness, temperature gradient and spring stiffness coefficients on the modal frequency of the FGMs laminated cylindrical shell were discussed. Results indicate that the sandwich thickness is more sensitive to the traveling wave mode than the Sigmoid volume fraction index; the short thin-walled cylindrical shell is more sensitive

收稿日期: 2021-01-19

基金项目: 国家自然科学基金(51965042)

作者简介: 刘超(1995—),男,硕士生,主要从事功能梯度板壳振动研究。

通信作者: 刘文光(1978—),男,副教授、硕士生导师,博士,主要从事结构动力学和疲劳寿命预测研究。E-mail: liuwg14@nchu.edu.cn

引用格式: 刘超,刘文光,吕志鹏,等. 旋转 FGMs 层合圆柱壳行波模态频率分析[J]. 航空动力学报, 2022, 37(4): 721-733. LIU Chao, LIU Wenguang, LÜ Zhipeng, et al. Analysis on traveling wave modal frequency of a rotating FGMs laminated cylindrical shell [J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(4): 721-733.

to boundary conditions and instability than the long thin-walled structures at high rotation speeds; the axial spring stiffness has a greater effect on the traveling wave mode than other spring stiffness.

Key words: FGMs laminated cylindrical shell; rotating speed; modal frequency; arbitrary boundary; Chebyshev polynomials

功能梯度材料(functionally graded materials, 简称 FGMs)是一种新型复合材料,广泛应用于航空发动机、超音速飞行器、火箭和导弹等动力机械领域^[1-2]。在这些动力机械中,FGMs 通常以薄壁圆柱壳为基本单元,并以旋转运动的形式服役于高温环境。与静力环境下服役的 FGMs 薄壁圆柱壳不同的是,旋转会产生离心惯性力、环向初应力以及科里奥利力,由此改变圆柱壳的动力学特性。为进一步推进 FGMs 在航空航天领域的应用,深入理解旋转 FGMs 薄壁圆柱壳的振动特性具有重要的意义。

1890 年, Bryan^[3]首次研究了旋转薄壁圆柱壳的振动行为和行波模态特性。其后,考虑科里奥利力和离心惯性力的影响, Ditaranto 等^[4]和 Srinivasan 等^[5]分析了无限长旋转薄壁圆柱壳的自由振动, Saito 等^[6]研究了有限长旋转薄壁圆柱壳的自由振动。随着 FGMs 在动力机械领域的广泛应用,研究者开始研究 FGMs 旋转薄壁圆柱壳的振动特性。基于 Love 的薄壳理论, 项松等^[7]建立了两端简支旋转 FGMs 圆柱壳的固有频率方程, Liang 等^[8]研究了典型边界条件下旋转 FGMs 圆柱壳的自由振动特性。基于 Sander 的薄壳理论, Hosseini-Hashemi 等^[9]推出了典型边界条件下旋转 FGMs 圆柱壳自由振动的精确解, 孙述鹏等^[10]分析了两端固支旋转薄壁圆柱壳的行波振动响应。基于 1 阶剪切变形理论并引入 von Kármán 非线性, Sheng 等^[11]研究了热环境中两端简支旋转 FGMs 圆柱壳的非线性振动特性。基于二维弹性理论, Saadatfar 等^[12]分析了两端简支旋转 FGMs 压电层合圆柱壳的多场耦合致振动响应。基于三维弹性理论, Talebitooti^[13]研究了两端简支旋转内压 FGMs 圆柱壳的自由振动行为。

分析表明:研究者针对旋转 FGMs 圆柱壳的振动特性做了大量工作,主要围绕经典边界条件进行。由于旋转圆柱壳在工程应用中往往通过螺栓、铆接、焊接等方式与相邻部件相连,经典边界难以准确描述其边界特征,易导致理论计算结果“算得出”但“算不准”。因此,有研究者采用弹

簧模拟任意边界,探讨旋转圆柱壳的振动特性。采用修正傅里叶级数作为位移容许函数模拟任意边界条件,李文达等^[14]分析了旋转 FGMs 圆柱壳两端约束弹簧刚度对结构振动特性的影响; Wang 等^[15]研究了中等厚度旋转双曲壳、板的自由振动; Jin 等^[16]研究了具有一般边界 FGMs 多层薄浅壳的自由振动。尽管采用修正的傅里叶级数可消除边界条件的不连续性,但采用该位移容许函数计算量较大且收敛速度较慢,因此,采用适当的位移容许函数至关重要。Qin 等^[17]提出了三种描述任意边界圆柱壳的位移容许函数,并分析了各容许函数的收敛性和计算效率,发现采用切比雪夫正交多项式的计算效率最高且收敛速度最快。

本工作以切比雪夫正交多项式作为位移容许函数,基于 Love 薄壳理论和 Rayleigh-Ritz 法推导旋转 FGMs 层合圆柱壳的模态频率方程,探究典型边界和任意边界条件下旋转 FGMs 层合圆柱壳的行波模态频率特性。

1 FGMs 层合圆柱壳模型

1.1 层合圆柱壳几何模型

如图 1 所示,旋转 FGMs 薄壁层合圆柱壳由三层壳体组成。内外两层是金属陶瓷 FGMs,中间层是纯金属。

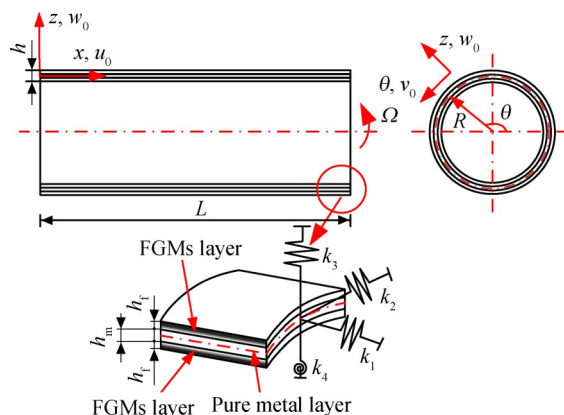


图 1 旋转 FGMs 层合圆柱壳几何模型及边界约束弹簧

Fig.1 Geometric model of rotating FGMs laminated cylindrical shell and boundary constraint springs

以固定在层合圆柱壳中面的柱坐标系 (x, θ, z) 为参照,圆柱壳以角速度 Ω 旋转,壳体中面半径为 R ,长度为 L ,厚度为 h (FGMs层厚度为 h_f ,金属层厚度为 h_m),圆柱壳中面在轴向、周向和径向的位移分量分别用 u_0 、 v_0 和 w_0 表示。在圆柱壳两端分别定义四组连续分布的弹簧,右端 $x=L$ 处分布轴向拉压弹簧 k_1 、环向剪切弹簧 k_2 、径向剪切弹簧 k_3 和扭转弹簧 k_4 ,左端 $x=0$ 处分布轴向拉压弹簧 k_5 、环向剪切弹簧 k_6 、径向剪切弹簧 k_7 和扭转弹簧 k_8 。调整两端弹簧刚度系数可以得到任意边界条件。本文令弹簧刚度系数为零时假定为自由边界,弹簧刚度系数为无穷大时假定为固定边界。

1.2 FGMs层合圆柱壳材料模型

根据Voigt模型,FGMs层合圆柱壳每部分的有效材料参数表达式为^[18]

$$\begin{cases} \Gamma_{\text{eff}(i)} = \Gamma_m V_{m(i)} + \Gamma_c V_{c(i)} \\ V_{m(i)} + V_{c(i)} = 1 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, 5) \quad (1)$$

式中 Γ_m 和 Γ_c 为金属和陶瓷的材料属性, $V_{m(i)}$ 和 $V_{c(i)}$ 分别为不同区域金属和陶瓷的体积分数, $\Gamma_{\text{eff}(i)}$ 为不同区域的有效材料属性(如弹性模量 $E_{\text{eff}(i)}$ 、密度 $\rho_{\text{eff}(i)}$ 、热膨胀系数 $\alpha_{\text{eff}(i)}$ 、泊松比 $\nu_{\text{eff}(i)}$)。

不同区域的陶瓷体积分数表达式为

$$\begin{cases} V_{c1} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h_f/2} \right)^{N_1} & z \in \left[\frac{h - h_f}{2}, \frac{h}{2} \right] \\ V_{c2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_f - h/2 + z}{h_f/2} \right)^{N_1} & z \in \left[\frac{h}{2} - h_f, \frac{h - h_f}{2} \right] \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} V_{c3} = 0 & z \in \left[-\frac{h}{2} + h_f, \frac{h}{2} - h_f \right] \\ V_{c4} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_f - h/2 - z}{h_f/2} \right)^{N_2} & z \in \left[\frac{h_f - h}{2}, -\frac{h}{2} + h_f \right] \\ V_{c5} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h_f/2} \right)^{N_2} & z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h_f - h}{2} \right] \end{cases} \quad (2b)$$

式中 V_{c1} 和 V_{c2} 为层合圆柱壳最外层FGMs层的陶瓷体积分数, V_{c3} 为圆柱壳中间层的陶瓷体积分数, V_{c4} 和 V_{c5} 为层合圆柱壳最内层FGMs层的陶瓷体积分数, N_1 和 N_2 分别为外、内两层FGMs的陶瓷体积分数指数。

假设FGMs层合圆柱壳在热环境中服役,陶瓷和金属的物理属性随温度变化近似服从非线性关系^[18]

$$\Gamma_{c,m} = p_0 (1 + p_1 T + p_2 T^2 + p_3 T^3) \quad (3)$$

式中 $\Gamma_{c,m}$ 分别表示陶瓷和金属的物理属性(例如:密度 $\rho(\text{kg/m}^3)$ 、弹性模量 $E(\text{GPa})$ 、泊松比 ν 、热膨胀系数 $\alpha/(\text{K}^{-1})$), p_0, p_1, p_2, p_3 表示材料的温敏特性系数,具体取值见表1^[19]。

取 $h_f = h_m = h/3$,图2研究了FGMs层合圆柱壳在不同体积分数指数下陶瓷体积分数沿厚度方向的变化规律。结果表明:体积分数对材料组分与分布影响较为明显,不可忽视材料组分对FGMs层合圆柱壳行波模态频率的影响。

假设热环境下FGMs层合圆柱壳沿厚度方向的温升呈线性分布,壳内表面($z = -h/2$)被施加的温度为 T_{in} 、外表面($z = h/2$)被施加的温度为 T_{out} 。取环境温度 $T_0 = 300 \text{ K}$,沿厚度方向线性分布的温升 $T(z)$ 表达式为

表1 ZrO₂/Ti-6Al-4V温敏特性系数^[19]

Table 1 Temperature-dependent coefficients for ZrO₂/Ti-6Al-4V^[19]

参数	材料	p_0	p_1	p_2	p_3
ρ	Ti-6Al-4V	4 429	0	0	0
	ZrO ₂	3 000	0	0	0
E	Ti-6Al-4V	122.56	-4.586×10^{-4}	0	0
	ZrO ₂	244.27	-1.371×10^{-3}	1.214×10^{-6}	-3.681×10^{-10}
ν	Ti-6Al-4V	0.288 4	1.121×10^{-4}	0	0
	ZrO ₂	0.288 2	1.133×10^{-4}	0	0
α	Ti-6Al-4V	$7.578 8 \times 10^{-6}$	6.638×10^{-4}	-3.147×10^{-6}	0
	ZrO ₂	12.766×10^{-6}	-1.491×10^{-3}	1.006×10^{-5}	-6.778×10^{-11}

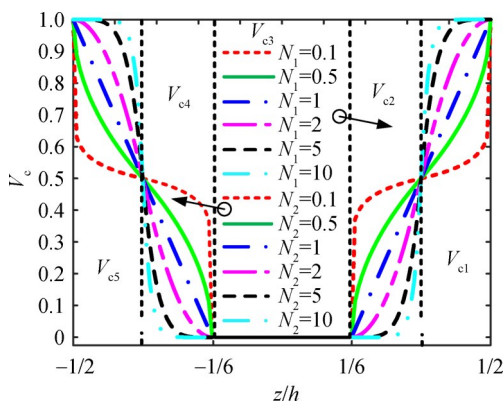


图2 陶瓷体积分数沿厚度方向的变化

Fig.2 Variation of volume fraction of the ceramic along the thickness direction

$$\begin{cases} T(z) = T_0 + T_{in} - \frac{T_{io}}{h} \left(z + \frac{h}{2} \right) \\ \Delta T = T(z) - T_0 \end{cases} \quad (4)$$

式中 $T_{io} = T_{in} - T_{out}$, T_{io} 表示 FGMs 层合圆柱壳内外表面的温差; ΔT 表示 FGMs 层合圆柱壳内任一点与环境温度的温差。

2 FGMs 层合圆柱壳的模式频率方程

2.1 层合圆柱壳的能量方程

根据 Love 薄壳理论, 圆柱壳应变分量与中面位移分量之间的关系^[20]

$$\epsilon_x = \epsilon_1 + z\epsilon_1^0, \epsilon_\theta = \epsilon_2 + z\epsilon_2^0, \epsilon_{x\theta} = \epsilon_3 + z\epsilon_3^0 \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\partial u_0}{L\partial\zeta}, \epsilon_1^0 = -\frac{\partial^2 w_0}{L^2\partial\zeta^2} \\ \epsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial\theta} + w_0 \right) \\ \epsilon_2^0 = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial\theta} \right) \\ \epsilon_3 = \frac{\partial v_0}{L\partial\zeta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial\theta}, \\ \epsilon_3^0 = -\frac{2}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{L\partial\zeta\partial\theta} - \frac{\partial v_0}{L\partial\zeta} \right) \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\epsilon_x, \epsilon_\theta$ 表示壳内任意一点沿 x, θ 方向的正应变, $\epsilon_{x\theta}$ 表示 $x\theta$ 平面内的切应变; $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 表示中面曲面应变分量, $\epsilon_1^0, \epsilon_2^0$ 和 ϵ_3^0 表示中面曲面曲率; ζ 表示沿轴向的无量纲坐标 ($\zeta = x/L$)。

根据胡克定律, FGMs 层合圆柱壳的应力-应

变本构关系表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(i)} & Q_{12}^{(i)} & 0 \\ Q_{12}^{(i)} & Q_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{\text{eff}(i)} \\ \alpha_{\text{eff}(i)} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (7)$$

式中 σ_x, σ_θ 表示壳内任意一点沿 x, θ 方向的正应力, $\sigma_{x\theta}$ 表示 $x\theta$ 平面内的切应力; $Q(i)jk$ ($i=1, \dots, 5; j, k=1, 2, 6$) 为简化刚度元素, 定义为

$$\begin{cases} Q_{11}^{(i)} = Q_{22}^{(i)} = \frac{E_{\text{eff}(i)}}{1 - \nu_{\text{eff}(i)}^2} \\ Q_{12}^{(i)} = \frac{\nu_{\text{eff}(i)} E_{\text{eff}(i)}}{1 - \nu_{\text{eff}(i)}^2} \\ Q_{66}^{(i)} = \frac{E_{\text{eff}}}{2(1 + \nu_{\text{eff}(i)})} \end{cases} \quad (8)$$

旋转 FGMs 层合圆柱壳内任意一点的速度矢量可表示为

$$\mathbf{V} = \frac{\partial u_0}{\partial t} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \Omega w_0 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} - \Omega v_0 \right) \mathbf{k} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别表示 x, θ, z 三个方向的单位矢量。根据式 (9), 旋转 FGMs 层合圆柱壳的动能 T 表示为

$$\begin{aligned} T = & \frac{LR}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_t (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) \cdot d\zeta d\theta dz = \\ & \frac{LR}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_t [\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 + \\ & 2\Omega(w_0 \dot{v}_0 - v_0 \dot{w}_0) + \Omega^2(v_0^2 + w_0^2)] d\zeta d\theta dz \end{aligned} \quad (10)$$

式中 ρ_t 表示 FGMs 层合圆柱壳的质量密度; 变量上方的点表示对时间的偏导; 中括号内前三项分别表示 x, θ, z 三个方向因变形速度产生的能量, 第四项为科里奥利力产生的效果, 第五项为离心力产生的效果。其中 ρ_t 定义为

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_t dz = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_{\text{eff}(1)} dz + \int_{\frac{h}{2}-h_t}^{\frac{h}{2}} \rho_{\text{eff}(2)} dz + \\ & \int_{-\frac{h}{2}+h_t}^{\frac{h}{2}-h_t} \rho_{\text{eff}(3)} dz + \int_{\frac{h_t-h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_t} \rho_{\text{eff}(4)} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h_t-h}{2}} \rho_{\text{eff}(5)} dz \end{aligned} \quad (11)$$

旋转 FGMs 层合圆柱壳的应变能 U_s 表示为

$$\left\{ \begin{aligned} U_s &= \frac{L}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_{x\theta} \epsilon_{x\theta}) R d\zeta d\theta dz = \\ &\frac{L}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [\bar{\epsilon} I \bar{\epsilon}^T - \bar{\epsilon} (N^t)^T] R d\zeta d\theta \\ N^t &= \{N_x^t \quad N_\theta^t \quad 0 \quad M_x^t \quad M_\theta^t \quad 0\} \end{aligned} \right. \quad \left\{ A_{jk}, B_{jk}, D_{jk} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{jk}^{(i)}(1, z, z^2) dz \quad (j, k = 1, 2, 6; i = 1, \dots, 5) \quad (14)$$

式中 I 为简化刚度矩阵, $\bar{\epsilon}$ 为中曲面应变向量; $I\bar{\epsilon}^T$ 表示 FGMs 层合圆柱壳的内力、弯矩和转矩产生项, 可表示为

$$I\bar{\epsilon}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2^0 \\ \epsilon_3^0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中 $A_{jk}, B_{jk}, D_{jk} (j, k = 1, 2, 6)$ 分别表示拉伸刚度、耦合刚度以及弯曲刚度

N^t 表示由温度产生的热内力项, 可表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \{N_x^t, M_x^t\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}^{(i)} + Q_{12}^{(i)}) \alpha_{\text{eff}(i)} \Delta T \{1, z\} dz \\ \{N_\theta^t, M_\theta^t\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{12}^{(i)} + Q_{22}^{(i)}) \alpha_{\text{eff}(i)} \Delta T \{1, z\} dz \end{aligned} \right. \quad (15)$$

旋转 FGMs 层合圆柱壳的初应变能 U_h 表示为

$$U_h = \frac{L}{2} \Omega^2 R^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_i \left\{ \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + v_0 \right) \right)^2 \right\} d\zeta d\theta dz \quad (16)$$

旋转 FGMs 层合圆柱壳两端边界弹簧存储的弹性应变能 U_e 表示为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_1 u_0^2 + k_2 v_0^2 + k_3 w_0^2 + k_4 \left(\frac{\partial w_0}{L \partial \zeta} \right)^2 \right]_{\zeta=0} R d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_1^0 u_0^2 + k_2^0 v_0^2 + k_3^0 w_0^2 + k_4^0 \left(\frac{\partial w_0}{L \partial \zeta} \right)^2 \right]_{\zeta=1} R d\theta \quad (17)$$

考虑轴向温度内力 N_x^t 对 FGMs 层合圆柱壳做功的影响, 则 W_t 可表示为

$$W_t = \frac{L}{2} N_x^t \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial v_0}{L \partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{L \partial \zeta} \right)^2 \right) R d\zeta d\theta \quad (18)$$

2.2 位移容许函数

假设旋转 FGMs 层合圆柱壳的轴向波数为 1 且环向波数为 n 时, 其自由振动行波模态对应的位移容许函数为

$$\left\{ \begin{aligned} u_0(\zeta, \theta, t) &= U_n(\zeta) \cos(n\theta + \omega t) \\ v_0(\zeta, \theta, t) &= V_n(\zeta) \sin(n\theta + \omega t) \\ w_0(\zeta, \theta, t) &= W_n(\zeta) \cos(n\theta + \omega t) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

式中 $U_n(\zeta), V_n(\zeta), W_n(\zeta)$ 表示圆柱壳环向波数为 n 时的振型函数; ω 为层合圆柱壳的角频率。

为使用边界约束弹簧模拟旋转 FGMs 层合圆柱壳的任意边界, 圆柱壳三个方向的振型函数采用切比雪夫多项式表示为^[17]

$$\left\{ \begin{aligned} U_n(\zeta) &= \sum_{a=0}^A U_a T_a(2\zeta - 1) \\ V_n(\zeta) &= \sum_{a=0}^A V_a T_a(2\zeta - 1) \\ W_n(\zeta) &= \sum_{a=0}^A W_a T_a(2\zeta - 1) \end{aligned} \right. \quad (20)$$

式中 U_a, V_a, W_a 为待定系数, $T_a(\cdot)$ 为第一类切比雪夫多项式, 该多项式的项数可表示为

$$\left\{ \begin{aligned} T_0(2\zeta - 1) &= 1, T_1(2\zeta - 1) = 2\zeta - 1 \\ T_{a+1}(2\zeta - 1) &= 2(2\zeta - 1) \cdot T_a(2\zeta - 1) - T_{a-1}(2\zeta - 1), a \geq 2 \end{aligned} \right. \quad (21)$$

2.3 模态频率方程

通过上述方程, 并利用 Rayleigh-Ritz 法得到

拉格朗日能量函数 L

$$L = T^{(\max)} - (U_s^{(\max)} + U_h^{(\max)} + U_e^{(\max)}) + W_t^{(\max)} \quad (22)$$

式中 $T^{(\max)}$ 、 $U_s^{(\max)}$ 、 $U_h^{(\max)}$ 、 $U_e^{(\max)}$ 和 $W_t^{(\max)}$ 分别为最大动能、最大应变能、最大初应变能、最大弹性应变能以及最大外力做功。

由最小势能原理,取拉格朗日能量函数关于待定系数的极小值

$$\frac{\partial L}{\partial U_a} = 0, \frac{\partial L}{\partial V_a} = 0, \frac{\partial L}{\partial W_a} = 0 \quad (23)$$

通过式 (22) 和式 (23) 可推出模态频率方程

$$\left[(\omega^2 - n^2 \Omega^2) M_1 + 2(\Omega \omega - n \Omega^2) M_2 - K \right] \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \\ \tilde{W} \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

式中 M_1 、 M_2 和 K 分别表示质量阵和刚度阵, $\tilde{U}$ 、 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$ 均为待定系数组成的向量。通过求解式 (24) 得到旋转 FGMs 层合圆柱壳的特征频率和模态振型。系数向量 $\tilde{U}$ 、 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$ 的具体表达式为

$$\begin{cases} \tilde{U} = \{U_0, U_1, \dots, U_A\}^T, \tilde{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_A\}^T \\ \tilde{W} = \{W_0, W_1, \dots, W_A\}^T \end{cases} \quad (25)$$

求解方程 (24) 可分析 FGMs 层合圆柱壳的行波特性。但需指出,由于科里奥利力的存在会令圆柱壳的频率发生分叉,产生频率不同的前后行波。其中,前行波与旋转方向一致且小于零,后行波与旋转方向相反且大于零,文中只取前后行波频率绝对值最小的值,即只关注弯曲变形为主的频率。假设圆柱壳的弹性模量为 $E_m = 1.078 \times 10^5$ MPa,泊松比为 $\nu_m = 0.3$,质量密度为 $\rho_m = 4.5 \times$

10^3 kg/m³。定义无量纲旋转角速度 Ω_1 和无量纲角频率 $\omega_{b,f}$:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \Omega R \sqrt{\rho_m (1 - \nu_m^2) / E_m} \\ \omega_{b,f} = \omega_{b,f} R \sqrt{\rho_m (1 - \nu_m^2) / E_m} \end{cases} \quad (26)$$

式中 ω_f 和 ω_b 分别代表圆柱壳无量纲前后行波模态频率。

假设圆柱壳几何尺寸: $h = 0.002$ m, $R = 1$ m, $L = 20$ m, 且 $h_t = h_m = h/3$ 。简支-简支 (S-S) 边界的弹簧刚度系数设为: $k_1 = k_4 = k_5 = k_8 = 0$, $k_2 = k_3 = k_6 = k_7 = 10^{12}$; 固支-固支 (C-C) 边界的弹簧刚度系数设为 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = 10^{12}$ 。忽略温度的影响,即 $T_{io} = 0$ K。

表 2 研究了 C-C 边界下 Ω_1 分别等于 0.003 和 0.006 时旋转层合均质圆柱壳的自由振动行波模态频率。表 3 研究了简支-简支 (S-S) 边界下 Ω_1 等于 0.001 95 时旋转 FGMs 层合圆柱壳的自由振动行波模态频率。结果表明:在不同边界条件和不同旋转角速度下,本文的计算结果与文献[8, 21] 的结果基本吻合,证明切比雪夫多项式可用于分析任意边界旋转 FGMs 层合圆柱壳的振动特性。

由于采用切比雪夫多项式描述旋转 FGMs 层合圆柱壳的振型函数,计算过程中需要对振型函数的展开项数进行有限项截断,以提高计算效率。表 4 分析了 S-S 旋转 FGMs 层合圆柱壳的行波模态计算的收敛性。结果表明,当展开项数达到 6 时,模态频率计算结果已经收敛,说明采用切比雪夫多项式具有很好的收敛性。本文后续研究采用的截取项数为 10。

表 2 C-C 边界条件旋转层合圆柱壳无量纲频率对比

Table 2 Comparison of non-dimensional frequency for a rotating laminated cylindrical shell with C-C boundary condition

Ω_1	n	文献[21]		本文	
		ω_f	ω_b	ω_f	ω_b
0.003	1	0.030 5	0.036 4	0.030 3	0.036 3
	2	0.009 9	0.014 7	0.009 8	0.014 6
	3	0.008 3	0.011 9	0.008 3	0.011 9
	4	0.012 5	0.015 3	0.012 5	0.015 3
0.006	1	0.027 7	0.039 6	0.027 3	0.039 2
	2	0.009 4	0.019 0	0.008 9	0.018 5
	3	0.013 2	0.020 4	0.012 4	0.019 7
	4	0.020 2	0.025 8	0.020 2	0.025 8

表 3 S-S 边界条件旋转 FGMs 层合圆柱壳无量纲频率对比

Table 3 Comparison of non-dimensional frequency for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with S-S boundary condition

N	n	文献[8]		本文	
		ω_f	ω_b	ω_f	ω_b
1	1	0.002 5	0.002 9	0.002 4	0.003 0
	2	0.000 8	0.001 2	0.000 8	0.001 2
	3	0.001 0	0.001 3	0.001 0	0.001 3
	4	0.001 7	0.001 9	0.001 7	0.002 0
5	1	0.002 6	0.002 8	0.002 6	0.002 8
	2	0.002 6	0.003 1	0.002 5	0.003 1
	3	0.000 8	0.001 2	0.000 8	0.001 3
	4	0.001 0	0.001 3	0.001 0	0.001 3

表 4 S-S 旋转 FGMs 层合圆柱壳行波模态收敛性分析

($L/R=20, h/R=0.005, h_f=0.002, R=1\text{ m}, \Omega_1=0.001, N_1=1, N_2=1, T_{i0}=100\text{ K}$)

Table 4 Convergence analysis of traveling wave mode for a S-S rotating FGMs laminated cylindrical shell ($L/R=20, h/R=0.005, h_f=0.002, R=1\text{ m}, \Omega_1=0.001, N_1=1, N_2=1, T_{i0}=100\text{ K}$)

n	行波 模态	截断项数 A				
		4	6	8	10	12
1	ω_f	0.018 1	0.017 0	0.017 0	0.017 0	0.017 0
	ω_b	0.020 1	0.019 0	0.019 0	0.019 0	0.019 0
2	ω_f	0.005 4	0.004 8	0.004 8	0.004 8	0.004 8
	ω_b	0.007 0	0.006 4	0.006 4	0.006 4	0.006 4
3	ω_f	0.012 5	0.012 4	0.012 4	0.012 4	0.012 4
	ω_b	0.013 7	0.013 6	0.013 6	0.013 6	0.013 6
4	ω_f	0.024 9	0.024 4	0.024 4	0.024 4	0.024 4
	ω_b	0.025 8	0.025 4	0.025 4	0.025 4	0.025 4

3 结果与讨论

如无特殊说明,下面选用 $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ 作为 FGMs 层合圆柱壳的组分材料。圆柱壳的几何参数取: $R=1\text{ m}$ 、 $L=10\text{ m}$ 、 $h=0.005\text{ m}$ 和 $h_f=0.002\text{ m}$ 。圆柱壳内外表面的温差 $T_{i0}=100\text{ K}$, 壳的旋转速度 $\Omega_1=0.005$ 。

图 3 研究了不同边界条件下环向波数对行波模态的影响。两端边界条件分别为固支-固支(C-C)、简支-简支(S-S)、固支-自由(C-F)和固支-简支(C-S)四种情况。结果表明: n 等于 2 或 3 时, FGMs 层合圆柱壳的前后行波模态均为较小值。为避免圆柱壳在低阶模态发生共振,文中主要对

$n=2$ 时结构的行波模态进行分析。下面分别讨论经典边界和任意边界条件下旋转 FGMs 层合圆柱壳行波模态频率。

3.1 经典边界 FGMs 层合圆柱壳的模态频率

3.1.1 体积分数指数对模态频率的影响

图 4 给出了旋转速度 Ω_1 分别取 0.001 和 0.005 时,四种经典边界条件下,FGMs 层的体积分数指数对 FGMs 层合圆柱壳前后行波模态的影响。结果表明:后行波模态总是大于前行波模态,且随着旋转速度的增大,前后行波模态的分叉特性越来越严重;前后行波模态受体积分数指数 N_1 、 N_2 变化而变化的影响非常小,说明采用 Sigmoid 型体积分数,FGMs 层合圆柱壳的整体

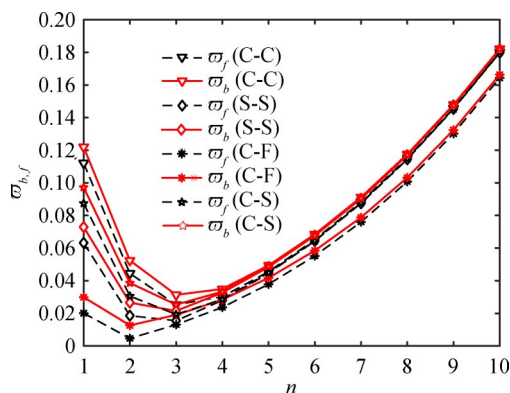


图3 旋转FGMs层合圆柱壳行波模态随环向波数 n 的变化($N_1=N_2=1$)

Fig.3 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to circumferential wave number n ($N_1=N_2=1$)

刚度对体积分数指数敏感性很弱。因此,采用 Sigmoid 型体积分数,在不改变结构刚度的情况

下可通过调配结构组分含量指数 N 以达到工程设计所需强度。后续研究主要基于 $N_1=N_2=1$ 进行讨论。

3.1.2 长径比对模态频率的影响

图5给出了长径比 L/R 分别取5、10和20时,旋转速度对FGMs层合圆柱壳行波模态的影响。结果表明:长径比 L/R 逐渐增大至20,不同边界条件对FGMs层合圆柱壳前行波模态的影响越来越微弱,特别在高旋转速度下,更加削弱了边界条件对行波模态的敏感性;在不同的 L/R 下,后行波模态总是随着转速的增大而单调递增;而当 $L/R=5$ 时,短薄壁FGMs层合圆柱壳前行波模态随转速呈现单调递减,且在边界条件为C-F时,增大旋转速度,结构前行波将出现零频率,达到临界转速即失稳现象,进而观察得到圆柱壳在两端C-F时最容易出现临界转速,两端C-C时最不容易出现临界转速,而两端S-S时出

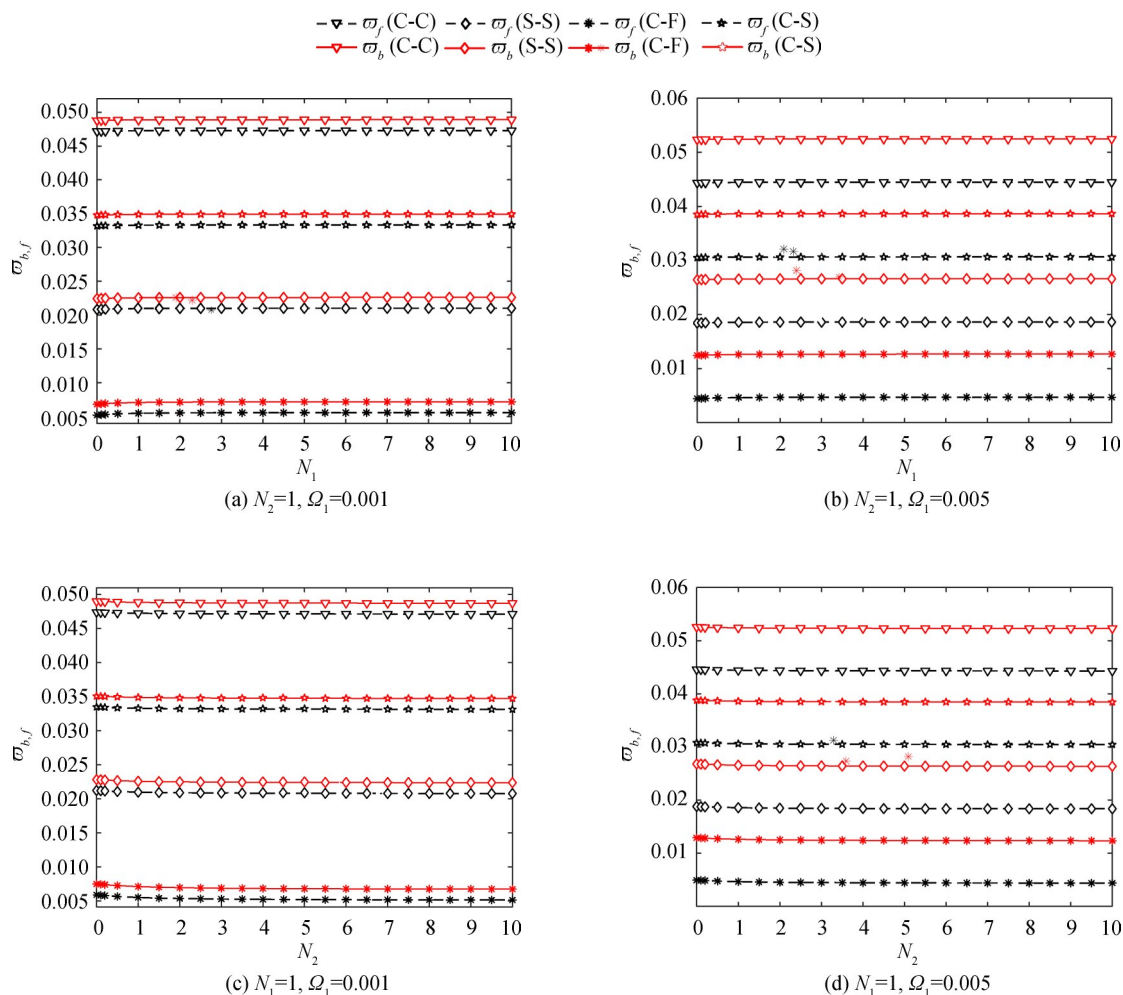


图4 旋转FGMs层合圆柱壳行波模态随体积分数指数 N 和旋转速度 Ω_1 的变化

Fig.4 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to volume fraction index N and rotating speed Ω_1

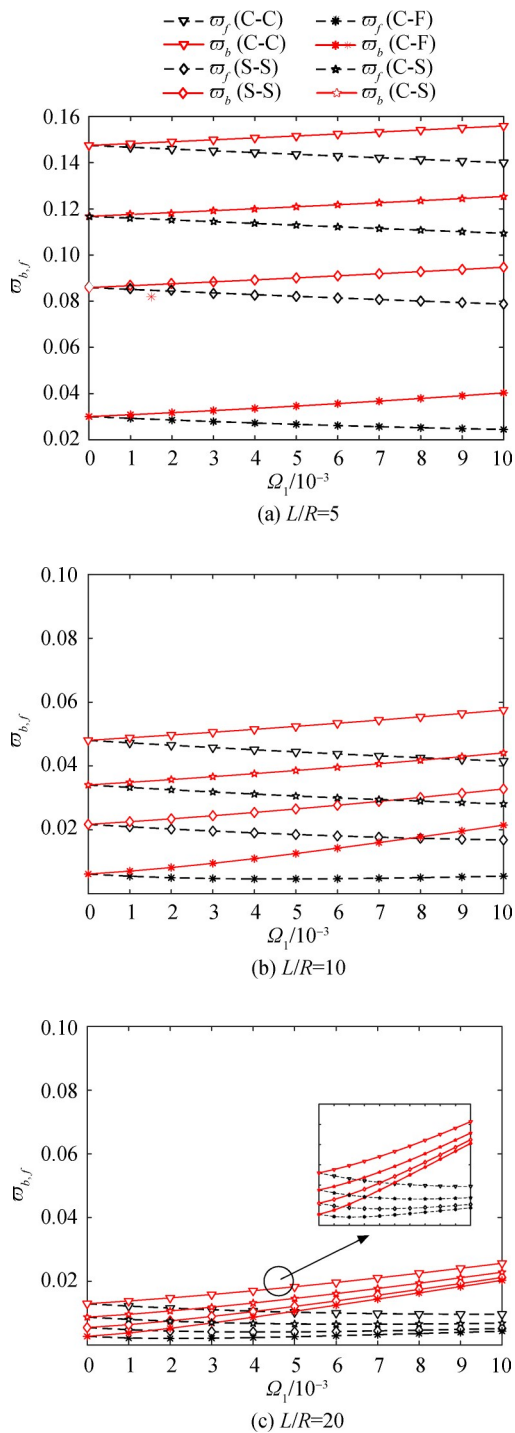


图5 旋转FGMs层合圆柱壳行波模式随长径比 L/R 和旋转速度 Ω_1 的变化

Fig.5 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to length-to-radius L/R and rotating speed Ω_1

现临界转速的能力小于C-F但却高于C-S。当 $L/R \geq 10$ 时,长薄壁FGMs层合圆柱壳前行波模式出现随转速先减小后增大的趋势。总的来说,长薄壁高旋转FGMs层合圆柱壳对边界条件的

敏感性弱,短薄壁高旋转FGMs层合圆柱壳更容易出现失稳现象,且随边界约束变强而更难发生。

3.1.3 厚径比对模式频率的影响

图6给出了不同厚-径比 h/R 下,夹层厚度 $2h_t/h$ 对FGMs层合圆柱壳行波模式的影响规律。分析发现,大厚-径比旋转FGMs层合圆柱壳的行波模式比小厚-径比的行波模式大,且行波模式随着内外FGMs层厚度的增大而逐渐变大;结构行波模式增长率相对夹层厚度的敏感性较体积分数的敏感性更强;进一步发现,随着夹层厚度 $2h_t/h$ 的增大,行波模式增长率与边界条件的约束强弱有关,C-F边界下模式增长率最低,C-C边界下模式增长率最大。

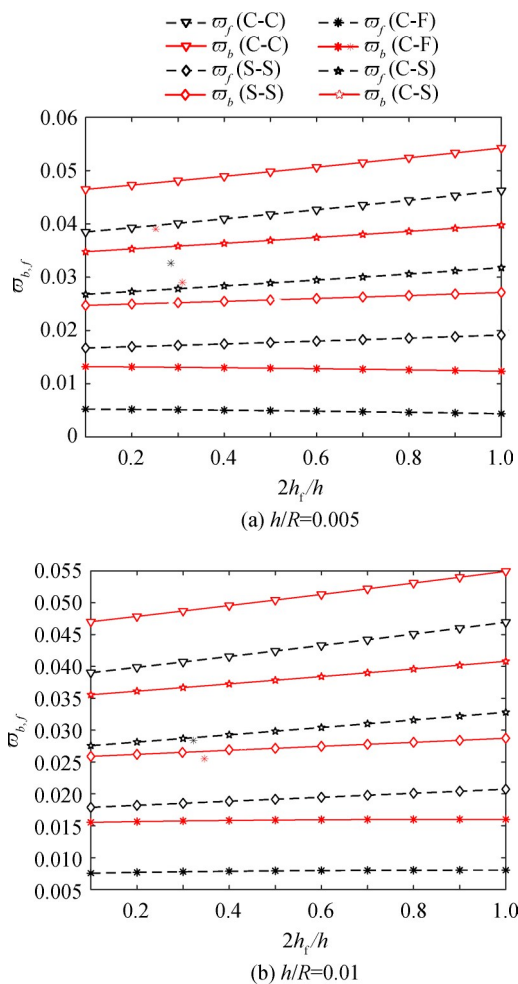


图6 旋转FGMs层合圆柱壳行波模式随夹层厚度 $2h_t/h$ 和厚径比 h/R 的变化

Fig.6 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to the thickness of interlayer $2h_t/h$ and thickness-to-radius h/R

3.1.4 温度梯度对行波模式的影响

图 7 给出了旋转速度 Ω_1 分别等于 0.02、0.05 和 0.1 下, 温度梯度 T_{10} 对 FGMs 层合圆柱壳行波

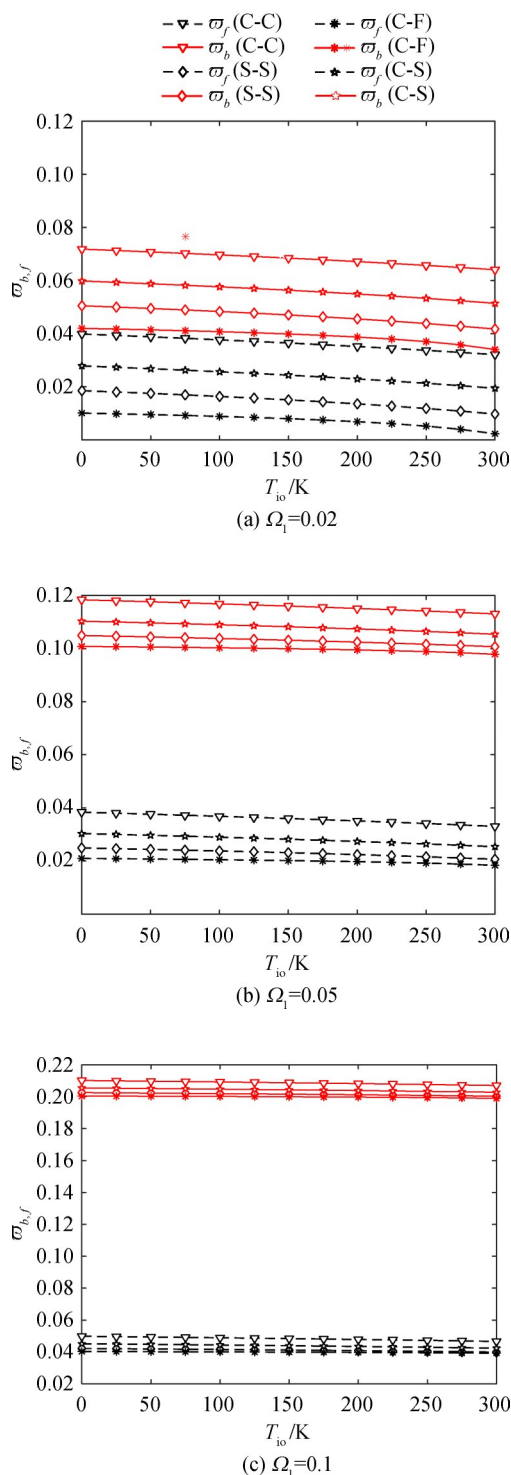


图 7 旋转 FGMs 层合圆柱壳行波模式随温度梯度 T_{10} 和旋转速度 Ω_1 的变化

Fig.7 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to temperature gradient T_{10} and rotating speed Ω_1

模式的影响。结果表明:FGMs 层合圆柱壳前后行波模式频率随温度梯度 T_{10} 的增大逐渐减小;且随着转速的增大,温度梯度 T_{10} 对 FGMs 层合圆柱壳前后行波模式下降率的影响越来越小,特别是当转速 Ω_1 等于 0.1 时,温度梯度几乎对前后行波模式无影响,同时,边界条件对行波模式的影响也越来越弱,这从侧面说明转速的改变影响 FGMs 层合圆柱壳行波模式频率随温度梯度以及边界条件变化的总体趋势。

3.2 任意边界 FGMs 层合圆柱壳的模式频率

通过弹簧可模拟任意边界条件,并分析室温下边界弹簧刚度系数对模式频率的影响。图 8 给出了两端轴向(k_1, k_5)和旋转边界弹簧(k_4, k_8)等于零时,由 F-F 边界条件到 S-S 边界条件 FGMs 层

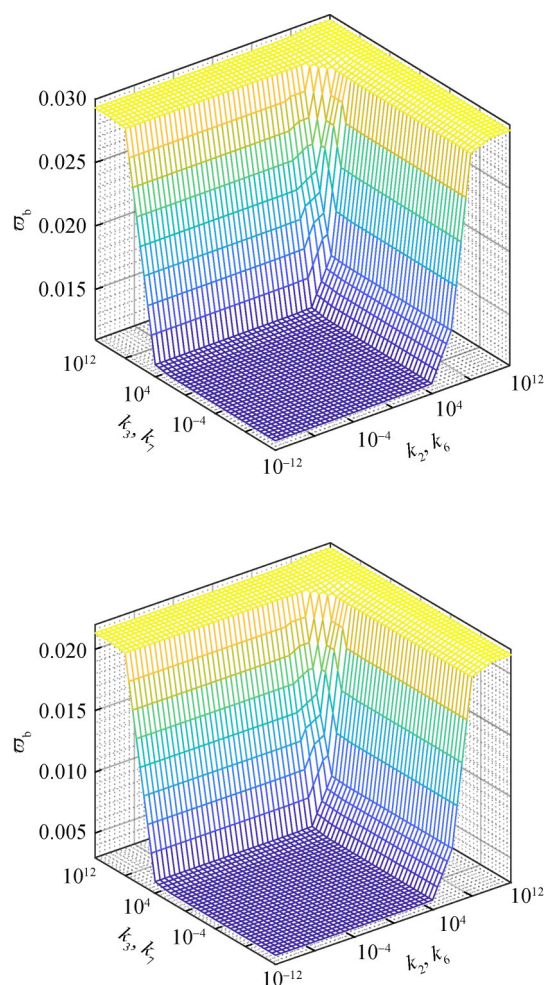


图 8 旋转 FGMs 层合圆柱壳行波模式随边界弹簧刚度系数的变化 ($k_1=k_4=k_5=k_8=0$)

Fig.8 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to the stiffness coefficient of boundary spring ($k_1=k_4=k_5=k_8=0$)

合圆柱壳行波模态的变化趋势。

结果表明:环向边界弹簧(k_2, k_6)和径向边界弹簧(k_3, k_7)对旋转FGMs层合圆柱壳的行波模态特性影响大小基本一致,当刚度系数取值在0到 10^4 时,其对行波模态基本无影响,而在 10^4 以上时,增大刚度系数,行波模态快速递增并最终在取值 10^{10} 时收敛。

图9给出了两端环向(k_2, k_6)和环向边界弹簧(k_3, k_7)等于无穷大 10^{12} 时,由S-S边界条件到C-C边界条件FGMs层合圆柱壳行波模态的变化趋势。结果发现,当刚度系数取值在0到 10^4 时,对行波模态基本无影响,而在 10^4 以上时,行波模态随轴向弹簧刚度系数(k_1, k_5)相对旋转弹簧刚度系数(k_4, k_8)的变化更为明显,这说明轴向弹簧刚度

系数相对旋转弹簧刚度系数对旋转FGMs层合圆柱壳行波振动特性的影响更大。

对比图8、图9,FGMs层合圆柱壳前后行波模态随弹簧刚度系数变化的趋势基本一致,下面主要分析结构后行波模态随转速和刚度系数的变化规律。图10给出了转速在0.001~0.013范围时,每种边界弹簧刚度对FGMs层合圆柱壳行波模态的影响。

结果表明,在同一转速下,增大环向边界弹簧的刚度系数对FGMs层合圆柱壳后行波模态的影响最小;径向边界弹簧和旋转边界弹簧的变化趋势相似,当刚度系数增大至 10^4 以上,后行波模态开始逐渐递增并最终趋于平稳;当轴向弹簧刚度系数增大至 10^4 以上,后行波模态开始快速递增并最终趋于平稳。进一步分析发现,FGMs层合圆柱壳后行波模态频率受转速影响相对环向、径向以及旋转弹簧刚度系数变化的影响大很多,而轴

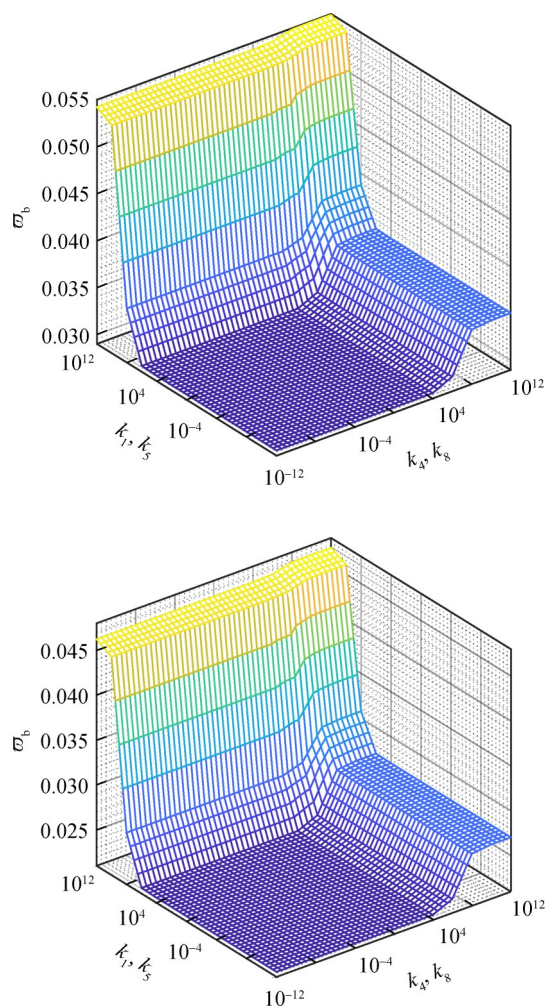
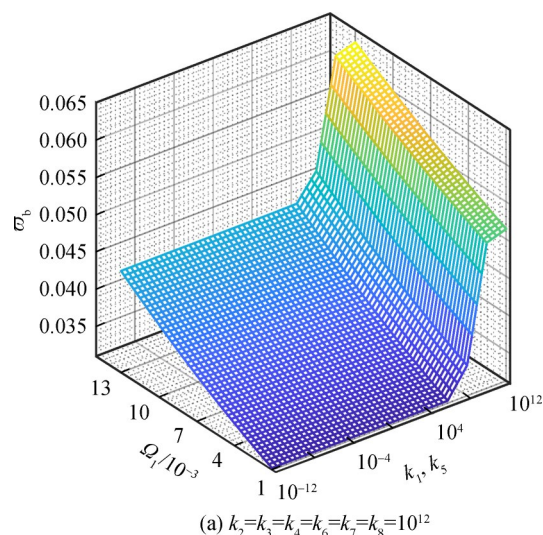
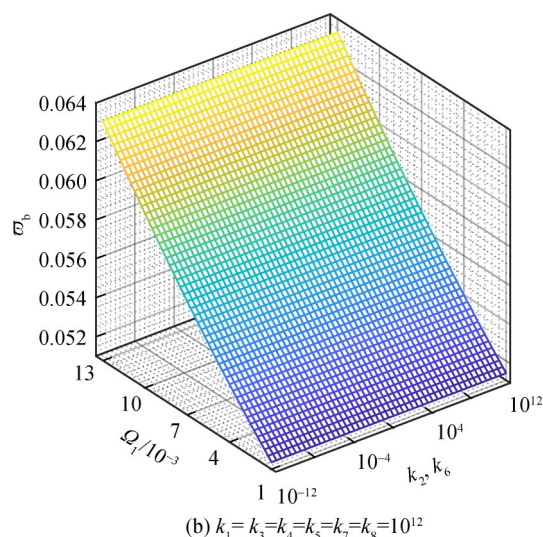


图9 旋转FGMs层合圆柱壳行波模态随边界弹簧刚度系数的变化($k_2=k_3=k_6=k_7=10^{12}$)

Fig.9 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to the stiffness coefficient of boundary spring ($k_2=k_3=k_6=k_7=10^{12}$)



(a) $k_2=k_3=k_4=k_6=k_7=k_8=10^{12}$



(b) $k_1=k_3=k_4=k_5=k_7=k_8=10^{12}$

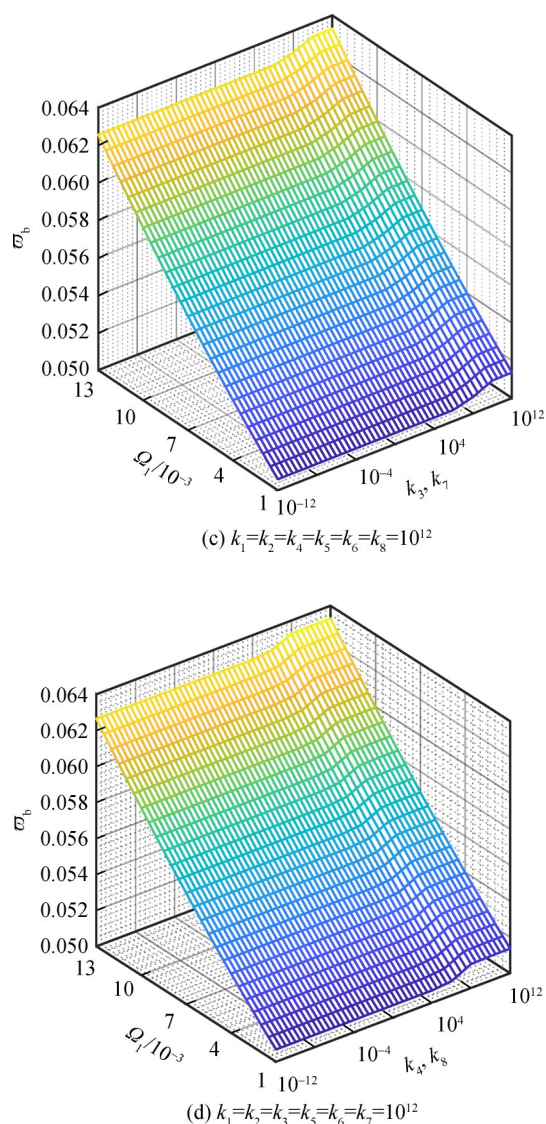


图 10 FGMs 层合圆柱壳行波模态随边界弹簧刚度系数和转速的变化

Fig.10 Variation of traveling wave mode for a rotating FGMs laminated cylindrical shell with respect to the stiffness coefficient of boundary spring and rotating speed

向弹簧刚度系数相对转速的影响更大。

4 结 论

考虑科里奥利力、离心惯性力、环向初应力以及热内力的影响,采用切比雪夫正交多项式和 Rayleigh-Ritz 法对典型边界和任意边界条件下旋转 FGMs 层合圆柱壳的行波模态进行了研究。主要结论如下:

1) 采用 Sigmoid 型体积分数,旋转 FGMs 层合圆柱壳的整体刚度对体积分数指数的敏感性很弱,且夹层厚度相对 Sigmoid 型体积分数指数对

旋转圆柱壳的行波模态频率增长率的敏感性更强,增大 FGMs 层厚度有利于提高旋转圆柱壳的行波模态频率。

2) 长薄壁高旋转 FGMs 层合圆柱壳对边界条件的敏感性弱,短薄壁高旋转 FGMs 层合圆柱壳更容易出现失稳现象,且随边界约束变强而更难发生,其出现临界转速值的大小随边界条件变化范围,而且旋转速度的改变会影响 FGMs 层合圆柱壳的行波模态频率随温度梯度以及边界条件变化的总体趋势。

3) 由两端固支边界过渡到两端简支边界,环向弹簧刚度和径向弹簧刚度对旋转圆柱壳行波模态的影响趋势基本一致;由两端简支边界过渡到两端固支边界,轴向弹簧刚度相对旋转弹簧刚度对模态频率的影响更大,在保证单一边界弹簧变量下,旋转 FGMs 层合圆柱壳后行波模态频率受转速变化相对环向、径向以及旋转弹簧刚度变化的影响大很多,而轴向弹簧刚度相对转速的影响更大。

参考文献:

- [1] 李凯伦,张家忠,王赵波.超声速流动中功能梯度曲壁板的热气动弹性颤振机理[J].航空动力学报,2018,33(8):1905-1915.
LI Kailun, ZHANG Jiazhong, WANG Zhaobo. Aerothermoelastic flutter mechanisms of functionally graded curved panel in supersonic flows[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(8):1905-1915. (in Chinese)
- [2] 刘超,刘文光.金属陶瓷功能梯度板的模态频率分析[J].航空材料学报,2020,40(5):88-95.
LIU Chao, LIU Wenguang. Modal frequency analysis of metallic-ceramic functionally graded plates[J]. Journal of Aeronautical Materials, 2020, 40(5):88-95. (in Chinese)
- [3] BRYAN G H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell[J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1890, 7:101-111.
- [4] DITARANTO R A, LESSEN M. Coriolis acceleration effect on the vibration of a rotating thin-walled circular cylinder[J]. Journal of Applied Mechanics, 1964, 31(4):700-701.
- [5] SRINIVASAN A V, LAUTERBACH G F. Traveling waves in rotating cylindrical shells[J]. Journal of Engineering for Industry, 1971, 93(4):1229-1232.
- [6] SAITO T, ENDO M. Vibration of finite length, rotating cylindrical shells[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 107(1):17-28.
- [7] 项松,李广超,张魏,等.旋转功能梯度圆柱壳的固有频率计算[J].应用数学和力学,2012,33(3):332-341.
XIANG Song, LI Guangchao, ZHANG Wei, et al. Natural frequency of rotating functionally graded cylindrical shells[J].

- Applied Mathematics and Mechanics, 2012, 33(3):332-341. (in Chinese)
- [8] LIANG B, XIANG S, LI R, et al. Study of effective factors for the vibration of rotating functionally graded cylindrical shells[J]. Journal of Ship Mechanics, 2013, 17(12): 1460-1472.
- [9] HOSSEINI-HASHEMI S, ILKHANI M R, FADAEI M. Accurate natural frequencies and critical speeds of a rotating functionally graded moderately thick cylindrical shell[J]. International Journal of Mechanical sciences, 2013, 76(1/2):9-20.
- [10] 孙述鹏, 曹登庆, 初世明. 转动薄壁圆柱壳行波振动响应分析[J]. 振动工程学报, 2013, 26(3):161-168.
SUN Shupeng, CAO Dengqing, CHU Shiming. Analysis of travelling wave vibration response for thin rotating cylindrical shell[J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(3): 161-168. (in Chinese)
- [11] SHENG G G, WANG X. The nonlinear vibrations of rotating functionally graded cylindrical shells[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(2):1095-1109.
- [12] SAADATFAR M, AGHAIE K M. Thermoelastic analysis of a rotating functionally graded cylindrical shell with functionally graded sensor and actuator layers on an elastic foundation placed in a constant magnetic field[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2016, 27(4):512-527.
- [13] TALEBITOOTI M. Three-dimensional free vibration analysis and critical speed of pressurized rotating functionally graded cylindrical shells[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 2019, 43(2): 113-126.
- [14] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 等. 基于改进傅里叶级数方法的旋转功能梯度圆柱壳振动特性分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 37(3):388-393.
LI Wenda, DU Jingtao, YANG Tiejun, et al. Vibration characteristics analysis of the rotating functionally graded cylindrical shell structure using an improved Fourier series method[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2016, 37(3): 388-393. (in Chinese)
- [15] WANG Q S, SHI D Y, LIANG Q, et al. Free vibration of four-parameter functionally graded moderately thick doubly-curved panels and shells of revolution with general boundary conditions[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 42: 705-734.
- [16] JIN G Y, SHI S X, SU Z, et al. A modified Fourier - Ritz approach for free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with general boundary conditions[J]. International Journal of Mechanical sciences, 2015, 93:256-269.
- [17] QIN Z Y, CHU F L, ZU J. Free vibrations of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions: a comparison study [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 133: 91-99.
- [18] HEYDARPOUR Y, MALEKZADEH P, GOLBAHAR HAGHIGHI M R, et al. Thermoelastic analysis of rotating laminated functionally graded cylindrical shells using layer-wise differential quadrature method[J]. Acta Mechanica, 2012, 223(1):81-93.
- [19] SHEN H S. Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium[J]. Composite Structures, 2012, 94(3):1144-1154.
- [20] LOY C T, LAM K Y, REDDY J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. International Journal of Mechanical sciences, 1999, 41(3):309-324.
- [21] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 等. 边界条件对旋转薄壁圆柱壳结构自由振动行波特性的影响分析[J]. 振动工程学报, 2016, 29(3):452-464.
LI Wenda, DU Jingtao, YANG Tiejun, et al. Influence of boundary conditions on traveling wave characteristics of thin rotating cylindrical shell structure for free vibration[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(3):452-464. (in Chinese)

(编辑:张雪)