

文章编号: 1000-8055(2024)10-20220195-11

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20220195

# TSHBM 法及其在干摩擦阻尼叶片 响应计算中的应用

孙 扬, 周 标, 臧朝平

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

**摘 要:** 建立了以时间谱形式的谐波平衡法为核心的新型非线性强迫振动响应高效计算方法, 并应用于含接触界面的干摩擦阻尼叶片结构响应分析。基于时间谱形式的谐波平衡法的原理和特点, 建立非线性强迫振动响应通用求解方案; 根据接触非线性特性, 提出了干摩擦力及解析雅可比矩阵计算的适应性处理方案, 形成了含接触界面的叶片结构新型非线性振动响应高效预测方法。数值仿真结果表明: 在带燕尾型榫根的叶片单扇区有限元模型中, 分别保留 1 阶和 3 阶谐波阶次时, 该方法的非线性振动响应计算时间消耗相较于传统的多谐波平衡法分别削减 37% 和 46%, 因此该方法在易用性、可推广性和计算效率方面具有独特的优势。

**关 键 词:** 响应预测; 叶片结构; 干摩擦阻尼; 多谐波平衡法; 时间谱形式的谐波平衡法

中图分类号: V231.92

文献标志码: A

## A TSHBM method and its application in response calculation of dry friction damped blades

SUN Yang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping

(College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** A novel nonlinear forced vibration response calculation method based on the time-spectral form of harmonic balance method (TSHBM) was established and applied to the response analysis of dry friction damped blades structure with contact interfaces. A general framework for the nonlinear forced response computation was established based on the TSHBM, of which the principles and characteristics were emphasized. In order to appropriately account for the contact nonlinearity, the computational schemes for dry friction force and the construction of an analytic Jacobian matrix were proposed. The novel computational method for nonlinear forced responses of blades with contact interfaces was built. The numerical simulation results showed that for the FE model of a bladed disk sector with dovetail joint, when the 1st and 3rd harmonic orders were respectively reserved, the nonlinear vibration response calculation time of this method was reduced by 37% and 46%, respectively, compared with traditional multi-harmonic balance method. So this method has unique advantages in terms of ease of use, generalizability and computational efficiency.

收稿日期: 2022-04-07

基金项目: 航空发动机及燃气轮机重点专项基础研究项目(J2019-IV-0023-0091)

作者简介: 孙扬(1997—), 男, 硕士生, 主要从事航空发动机结构动力学研究。E-mail: sunyang97@nuaa.edu.cn

通信作者: 臧朝平(1963—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事航空发动机结构动力学研究。E-mail: c.zang@nuaa.edu.cn

引用格式: 孙扬, 周标, 臧朝平. TSHBM 法及其在干摩擦阻尼叶片响应计算中的应用[J]. 航空动力学报, 2024, 39(10): 20220195. SUN Yang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping. A TSHBM method and its application in response calculation of dry friction damped blades[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(10): 20220195.

**Keywords:** response prediction; blade; dry friction damping; multi-harmonic balance method; time-spectral form of harmonic balance method

干摩擦阻尼减振技术是航空发动机中抑制叶片振动进而预防叶片高循环疲劳失效的主要技术手段之一。然而,干摩擦阻尼结构接触界面的非线性力学特征以及相对运动的不确定性给干摩擦阻尼结构的振动分析与减振设计带来了很大的难题。针对含干摩擦接触界面的叶片结构,探索研究高效准确的非线性振动响应预测方法,具有重要的现实意义。

含干摩擦接触界面的叶片结构的稳态振动响应预测最终可归结于大规模非线性动力学方程组的求解问题。目前,多家研究机构的学者均已发展建立了以多谐波平衡法(multi-harmonic balance method, MHB)为核心的叶片非线性稳态振动响应预测方法<sup>[1-6]</sup>。多谐波平衡法的本质是利用傅里叶级数展开,将时域中非线性动力学微分方程转化为频域中非线性代数方程进行求解。因此,在其应用过程中需要对主要求解变量进行大量反复的时-频域转换运算<sup>[7]</sup>,计算耗费较高。尤其当非线性动力学方程组规模较大时,其计算效率会严重降低。此外,在频域非线性代数方程的求解过程可能会遇到病态雅可比矩阵导致计算中断的问题<sup>[8]</sup>。因此,寻求传统多谐波平衡法的改进或替代计算方案是目前的主要研究方向之一。

时间谱形式的谐波平衡法(time-spectral form of harmonic balance method, TSHBM),是近年来受到持续关注的一类新型非线性动力学方程高效求解方法<sup>[9-11]</sup>。其特点是“在时域中的各子时间点上进行谐波平衡”,即选择一个振动周期内子时间点上的时域响应作为求解变量,同样利用傅里叶级数展开,将时域中的非线性动力学微分方程转换为时域中的非线性代数方程组进行求解。相较于多谐波平衡法,时间谱形式的谐波平衡法不需要对求解变量进行繁琐的时-频域转换运算,计算效率高。

目前,时间谱形式的谐波平衡法在计算流体力学领域中得到了广泛应用。Sicot 等<sup>[12]</sup>提出了针对 TSHBM 时域非线性代数方程组的分块雅可比矩阵隐式算法,实现了周期流动的高效仿真。Woodgate 等<sup>[13]</sup>利用 Krylov 子空间方法提高了 TSHBM 时域非线性代数方程组的求解效率。苏欣荣等<sup>[14]</sup>使用广义最小残差法求解隐式化的

TSHBM 时域非线性代数方程,实现了叶片高频周期性扰流仿真。Ramezani 等<sup>[15]</sup>将近似分解应用于 Krylov 子空间方法的预处理过程,大幅提高了 TSHBM 时域非线性代数方程组的求解效率。总之,在计算流体力学领域,TSHBM 方法凸显了计算效率高、易用性强等优点。在计算结构动力学领域,Labryer 等<sup>[10]</sup>首次将 TSHBM 方法应用于扑翼飞行结构的非线性振动响应预测。Salles 等<sup>[8]</sup>尝试将 TSHBM 应用于叶根微动磨损的仿真计算。TSHBM 在计算结构动力学领域的应用研究处于起步阶段,其计算潜力尚待深入挖掘。

本文进一步将时间谱形式的谐波平衡法应用于干摩擦结构的强迫振动分析,将时域中的非线性偏微分动力学方程转换为非线性代数方程进行求解,避免了传统多谐波平衡法中计算消耗高的时-频域转换运算环节,具有易用性和计算效率高的独特优势。论文的安排如下:首先,介绍时间谱形式的谐波平衡法的基本原理和特点,建立基于 TSHBM 的非线性强迫振动响应通用求解方案;其次,根据接触非线性的特点,重点研究针对干摩擦力以及解析雅可比矩阵计算的 TSHBM 适应性处理方案;最后,将上述以 TSHBM 为核心的计算方法应用于带干摩擦单元的简单梁模型以及带燕尾型榫连接的压气机叶片有限元模型的强迫振动响应仿真计算,以验证该方法的有效性和准确性。

## 1 基于时间谱形式的谐波平衡法的非线性振动响应通用求解方案

自由度数目为  $N_d$  的非线性动力学系统的通用方程描述为:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + f_{nl}(u, \dot{u}, t) = f(t) \quad (1)$$

式中  $M$ 、 $C$ 、 $K$  分别为系统质量、阻尼和刚度矩阵,  $u$  为系统位移,  $f_{nl}$  为非线性力,  $f(t)$  为外激励力。为了便于理解和对比,在介绍时间谱形式的谐波平衡法之前,首先简要回顾经典的多谐波平衡法的基本思想。

### 1.1 经典的多谐波平衡法

大部分非线性动力学系统在周期激励下的周期性位移响应  $u$  可用截断的傅里叶级数逼近:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{U}^0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{U}^{ck} \cos(k\omega t) + \\ &\quad \mathbf{U}^{sk} \sin(k\omega t) = \mathbf{T}(\omega) \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $N_h$  为截断保留的谐波阶数,  $\omega$  为激励频率,  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^{c1}, \mathbf{U}^{s1}, \dots, \mathbf{U}^{cN_h}, \mathbf{U}^{sN_h}]^T$  是位移的傅里叶系数组成的向量。将式(2)代入式(1)并应用伽辽金投影, 得到频域中的非线性代数方程<sup>[16]</sup>:

$$\mathbf{G}(\omega, \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\omega) \mathbf{U} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}) - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{P}(\omega) = \omega \mathbf{N}_M \nabla^2 + \omega \mathbf{N}_C \nabla + \mathbf{N}_K$  为动刚度矩阵,  $\mathbf{N}_M$  是形如  $\mathbf{N}_M = \text{diag}(\mathbf{M}, \mathbf{M}, \dots)$  的块对角矩阵,  $\mathbf{N}_C$ 、 $\mathbf{N}_K$  与  $\mathbf{N}_M$  形式相同。 $\nabla$  是频域微分算子, 其形式如下:

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h}) \quad \nabla_k = k \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U})$  分别是激励力和非线性力的傅里叶系数向量。 $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U})$  可通过如下时-频转换过程获取:

$$\mathbf{U} \xrightarrow{\text{IFFT}} \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \xrightarrow{\text{FFT}} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}) \quad (5)$$

式(3)一般采用 Newton-Raphson 法进行迭代求解, 其迭代格式如下:

$$\mathbf{J}^j \cdot (\mathbf{U}^{j+1} - \mathbf{U}^j) = -\mathbf{G}(\mathbf{U}^j) \quad (6)$$

在上述求解过程中最为核心的环节是雅可比矩阵  $\mathbf{J}^j$  的计算, 其形式如下:

$$\mathbf{J}^j = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U}^j)}{\partial \mathbf{U}^j} = \mathbf{P}(\omega) + \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}^j)}{\partial \mathbf{U}^j} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{P}(\omega)$  形式简单易得, 因此雅可比矩阵的计算问题转换为非线性力的傅里叶系数向量  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}^j)$  对位移的傅里叶系数向量  $\mathbf{U}^j$  的偏导数矩阵  $\partial \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}^j) / \partial \mathbf{U}^j$  的计算。如无特殊说明, 该矩阵一般采用传统的数值差分法获取, 其计算消耗极高。若能建立时域中的偏导数矩阵 ( $\partial \mathbf{f}_{nl} / \partial \mathbf{u}$ ) 的解析表达式, 则可进一步采用如下时-频域转换过程快速构建频域中的偏导数矩阵 ( $\partial \mathbf{F}_{nl} / \partial \mathbf{U}$ )<sup>[2]</sup>, 从而大幅削减雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  的计算消耗, 实现方程 (式(3)) 的高效求解:

$$\mathbf{U} \xrightarrow{\text{IFFT}} \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{u}} \xrightarrow{\text{FFT}} \frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{J} \quad (8)$$

## 1.2 时间谱形式的谐波平衡法

时间谱形式的谐波平衡法的基本思想是在一个非线性系统稳态响应的一个运动周期内均匀选

取  $2N_h + 1$  个子时间点建立子时间层, 选择各子时间点对应的时域位移  $\mathbf{u}(t_i)$  作为求解变量, 然后通过傅里叶级数展开将时域中的非线性振动微分方程转换为时域中的非线性代数方程进行求解。一个运动周期内各子时间点的表达式如下:

$$t_i = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{i}{2N_h + 1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2N_h) \quad (9)$$

各子时间点对应的瞬时位移响应  $\mathbf{u}(t_i)$  可以用傅里叶级数逼近:

$$\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{U}^0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{U}^{ck} \cos(k\omega t_i) + \mathbf{U}^{sk} \sin(k\omega t_i) \quad (10)$$

参照式(2)中  $\mathbf{U}$  的表达式, 上式可写为:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{U} \quad \mathbf{U} = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{U}} \quad (11)$$

式中向量  $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}(t_1), \dots, \mathbf{u}(t_i), \dots, \mathbf{u}(t_{2N_h})]^T$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{E}^{-1})$  为 (逆) 离散傅里叶变换矩阵:

$$\mathbf{E} = \frac{2}{2N_h + 1} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \cos \omega t_0 & \cos \omega t_1 & \cdots & \cos \omega t_{2N_h} \\ \sin \omega t_0 & \sin \omega t_1 & \cdots & \sin \omega t_{2N_h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos N_h \omega t_0 & \cos N_h \omega t_1 & \cdots & \cos N_h \omega t_{2N_h} \\ \sin N_h \omega t_0 & \sin N_h \omega t_1 & \cdots & \sin N_h \omega t_{2N_h} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (12)$$

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega t_0 & \sin \omega t_0 & \cdots & \sin N_h \omega t_0 \\ 1 & \cos \omega t_1 & \sin \omega t_1 & \cdots & \sin N_h \omega t_1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \omega t_{2N_h} & \sin \omega t_{2N_h} & \cdots & \sin N_h \omega t_{2N_h} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (13)$$

针对激励力和非线性力也有类似的表达式:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \quad \tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}_{nl} \quad (14)$$

其中  $\tilde{\mathbf{F}}$  和  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  分别为对应子时间层的时域激励力向量和非线性力向量。

将式(10)~式(14)代入非线性系统微分方程 (式(1)) 可获得时间谱形式的谐波平衡法的平衡方程:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\omega, \tilde{\mathbf{U}}) = \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl} - \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}(\omega) \mathbf{E}$ 。上述非线性代数方程所涉及的相关变量  $\tilde{\mathbf{U}}$ 、 $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  和  $\tilde{\mathbf{F}}$  都可以通过时域计

算直接获取。因此,在该非线性代数方程的迭代求解过程中,无须进行经典谐波平衡法中繁琐的时-频域变量转换运算,这正是时间谱形式的谐波平衡法的优势之所在。

值得注意的是,时间谱形式的谐波平衡法应用于具有强非线性因素的动力学系统时可能会出现事实上并不存在的非物理解,即所谓的“失真”现象。非物理解源于非线性项  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  可能被高次谐波 ( $>N_h$ ) 分量所污染<sup>[17]</sup>,是由时间谱形式的谐波平衡法自身特点所诱发的潜在问题。为此,本文采用扩展子时间层的处理方法<sup>[17]</sup>,从根本上杜绝非物理解的出现。以常见的非线性力函数  $\mathbf{f}_{nl} = \mathbf{u}^3$  为例,只需在傅里叶转换矩阵  $\mathbf{E}$  的构造过程中将子时间层从  $2N_h + 1$  扩展至  $6N_h + 1$  或以上即可。当然,在扩展的子时间层较多时,这种失真处理方法将不可避免地会牺牲部分计算效率。

### 1.3 通用求解方案

时间谱形式的谐波平衡法的平衡方程(式(15))一般可以采用 Newton-Raphson 方法或者伪时间步推进方法进行求解。

#### 1.3.1 基于 Newton-Raphson 法的求解方案

针对 TSHBM 平衡方程(式(15))应用 Newton-Raphson 法的迭代求解格式与式(6)类似,此处不再赘述。其雅可比矩阵  $\tilde{\mathbf{J}}$  的形式如下:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \partial \tilde{\mathbf{G}} / \partial \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}(\omega) + \partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl} / \partial \tilde{\mathbf{U}} \quad (16)$$

可以看出,该雅可比矩阵  $\tilde{\mathbf{J}}$  与经典谐波平衡法中式(7)的雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  形式类似。不同之处在于  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  和  $\tilde{\mathbf{U}}$  均为时域变量,故而  $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl} / \partial \tilde{\mathbf{U}}$  可直接在时域进行计算,从而避免了如式(8)所示繁琐的时-频域转换计算流程。

#### 1.3.2 基于伪时间步推进的全隐式求解方案

伪时间步推进方法(pseudo-time marching, PTM)是一种在计算流体动力学领域中广泛应用的求解方法,具有优秀的易用性和通用性<sup>[18]</sup>。如式(17)所示,该方法首先在平衡方程(式(15))的等号左端引入伪时间变量  $\tau$  的偏微分项,然后对其进行时域积分以获取  $\tilde{\mathbf{U}}$  的伪时间域历程解。在此过程中, TSHBM 平衡方程的残差亦即式(17)的右端项将逐渐收敛为零,与此同时  $\tilde{\mathbf{U}}$  最终收敛于平衡方程(式(15))的解。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tau} = \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl} - \tilde{\mathbf{F}} \quad (17)$$

为加快残差收敛速度,本文采用隐式积分方

法实现伪时间域的积分推进过程。首先,将上述偏微分方程离散为一阶形式:

$$\frac{\Delta \tilde{\mathbf{U}}}{\Delta \tau} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}) \quad (18)$$

式中  $\Delta \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^{q+1} - \tilde{\mathbf{U}}^q$  是求解变量  $\tilde{\mathbf{U}}$  在迭代步  $q$  和  $q+1$  间的增量;  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}})$  表示平衡方程的残差。在  $q+1$  步时  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}^{q+1})$  的隐式后向欧拉格式为

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}^{q+1}) = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}^q) + \tilde{\mathbf{J}}^q \Delta \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{o}(\Delta \tilde{\mathbf{U}}^2) \quad (19)$$

其中  $\tilde{\mathbf{J}}^q = \partial \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}^q) / \partial \tilde{\mathbf{U}}^q$  是第  $q$  迭代步的雅可比矩阵,其形式与式(16)相似。

结合式(18)和式(19),忽略高阶小量可以得到下面的线性代数方程:

$$\mathbf{A}_c \Delta \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}^q) \quad (20)$$

其中  $\mathbf{A}_c = (\mathbf{I} / \Delta \tau - \tilde{\mathbf{J}}^q)$  是一个非对称矩阵。式(20)是一个形如  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的大型线性方程组。考虑到  $\mathbf{A}_c$  是非对称矩阵,本文选用以稳定双共轭梯度算法(BICGSTAB)及共轭梯度平方算法(CGS)为代表的 Krylov 子空间方法<sup>[19]</sup>对该线性方程组进行高效求解,由此获得  $q+1$  步时的变量  $\tilde{\mathbf{U}}^{q+1}$ 。

上述具有代表性的 Krylov 子空间方法往往需要搭配合适的预处理方法使用,以保证其计算效率。所谓预处理就是改善系数矩阵性质的过程。经过预处理的原线性方程组将被转换为另一个同解但更易求解的方程组。不完全 LU 分解预处理(incomplete LU factorization, ILU)是一类通用预处理方法。本文选用其中的 ILUC(cront version of ILU)算法进行预处理,在计算消耗与预处理效果之间达到了较好的平衡。

## 2 时间谱形式的谐波平衡法在干摩擦结构中的应用

将上述基于时间谱形式的谐波平衡法的非线性振动响应用通用求解方案应用于干摩擦结构,还需要针对接触非线性特点,对干摩擦力的计算以及解析雅可比矩阵的构建作适应性处理。

### 2.1 干摩擦力的计算

目前国内外的研究中普遍采用如图 1 所示的三维点接触模型来描述接触界面的相对运动行为和非线性力学特性。此模型采用两个面内正交的迟滞库伦摩擦模型(滑块-弹簧单元)来模拟切向接触动力学行为,而法向弹簧则可考虑接触压力变化的情况。对该模型的具体描述见文献[2],本

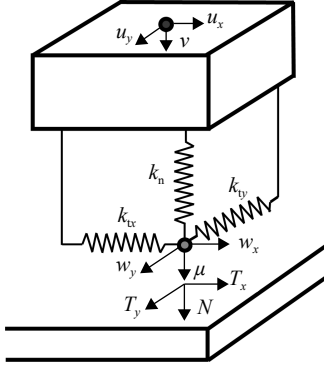


图 1 三维变压力接触模型

Fig. 1 3D contact model with variable normal load

文仅简要介绍图中变量含义, 图中  $u, v$  分别表示接触点间的切向和法向相对位移,  $k_t$  和  $k_n$  分别为切向和法向弹簧刚度,  $w$  为初始位移,  $T$  为切向干摩擦力,  $x, y$  表示切向接触平面的两个正交方向,  $n$  表示接触平面法向方向。接触节点之间的接触力与其接触状态密切相关。由于接触状态无法先验确定, 通常采用数值轨迹跟踪法, 根据接触节点切向和法向的相对位移时间历程  $u$  和  $v$  判断每一时刻的接触状态, 并确定法向接触力  $N$  及切向接触力  $T$ 。其基本流程如下:

#### 1) 切向干摩擦弹簧伸长量初值

为保证初值的唯一性, 通常将初始接触状态设置为黏滞状态, 即切向干摩擦弹簧伸长量初值为  $d_1 = u_1$ 。

#### 2) 数值轨迹跟踪及校正

令  $t_i$  时刻切向干摩擦弹簧伸长量为  $d_i$ 。首先假设  $t_i$  到  $t_{i+1}$  时刻两接触点间均处于黏滞状态, 得到  $t_{i+1}$  时刻预测切向干摩擦弹簧的初始伸长量:

$$d_{i+1}^{\text{pre}} = u(t_{i+1}) - u(t_i) + d_i \quad (21)$$

根据预测的切向干摩擦初始伸长量可以判断  $t_{i+1}$  时刻两接触点的实际接触状态:

##### ① 实际为滑移状态

若  $|k_t \cdot d_{i+1}^{\text{pre}}| \geq \mu N$ , 即  $t_{i+1}$  时刻接触点实际处于滑移状态, 此时实际切向弹簧伸长量为:

$$d_{i+1} = \text{sign}(\dot{d}_{i+1}^{\text{pre}}) \cdot \mu N / k_t \quad (22)$$

##### ② 实际为黏滞状态

若  $|k_t \cdot d_{i+1}^{\text{pre}}| < \mu N$ , 即  $t_{i+1}$  时刻接触点实际处于黏滞状态, 此时实际切向弹簧伸长量即为  $d_{i+1}^{\text{pre}}$ 。

#### 3) 循环迭代计算

通过循环执行步骤 2) 即可获得各时刻下各节点的切向干摩擦弹簧伸长量  $d$ , 并通过  $T = k_t \cdot d$

计算对应的切向干摩擦力。

在时间谱形式的谐波平衡法应用过程中, 仍可直接运用上述数值轨迹跟踪法来计算切向干摩擦力。然而, TSHBM 仅在一个稳态振动周期内创建子时间层。若在该振动周期内发生了从滑移到黏滞的接触状态转换, 则可能导致该周期内的干摩擦力计算结果出现偏差。因此, 本文提出扩展周期的处理方案, 即将一个振动周期内的接触节点相对位移时间历程扩展至多个周期并计算其干摩擦力, 最终选取最后一个振动周期内准确的干摩擦力计算结果代入 TSHBM 的平衡方程。下面以扩展至两个周期为例, 说明基于数值轨迹跟踪法的干摩擦计算适应性处理方案:

1) 将式(12)平衡方程中的时域位移解  $\tilde{U}$  扩展至两个振动周期, 即  $\tilde{U}_{\text{ext}} = [\tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2]^T$ , 其中  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = \tilde{U}$ ;

2) 应用数值轨迹跟踪法计算扩展周期内各个时刻的干摩擦力  $\tilde{F}_{\text{nl}}^{\text{ext}} = [\tilde{F}_{\text{nl}}^1 \quad \tilde{F}_{\text{nl}}^2]^T$ ;

3) 在扩展周期内进行截断处理, 即舍弃第 1 个振动周期内可能不准确的  $\tilde{F}_{\text{nl}}^1$ , 仅保留第 2 个周期内准确的  $\tilde{F}_{\text{nl}}^2$  代入 TSHBM 平衡方程, 执行后续迭代计算。

## 2.2 解析雅可比矩阵的构建

如式(16)和式(19)所示, 通过解析方法构建雅可比矩阵  $\tilde{J}$  或  $\tilde{J}^q$ , 可大幅提高 TSHBM 求解方案的计算效率, 其关键在于获取时域干摩擦力向量  $\tilde{F}_{\text{nl}}$  对时域位移向量  $\tilde{U}$  的偏导数矩阵  $\partial \tilde{F}_{\text{nl}} / \partial \tilde{U}$ 。根据图 1 所示接触模型, 该矩阵的形式如下:

$$\frac{\partial \tilde{F}_{\text{nl}}}{\partial \tilde{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{F}_{\text{nl}}^0}{\partial \tilde{U}^0} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\partial \tilde{F}_{\text{nl}}^{i-1}}{\partial \tilde{U}^{i-1}} & & \\ & & \frac{\partial \tilde{F}_{\text{nl}}^i}{\partial \tilde{U}^{i-1}} & \frac{\partial \tilde{F}_{\text{nl}}^i}{\partial \tilde{U}^i} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\partial \tilde{F}_{\text{nl}}^{2N_h}}{\partial \tilde{U}^{2N_h}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中  $\tilde{F}_{\text{nl}}^i = [\tilde{F}_{\text{nl},x}^i \quad \tilde{F}_{\text{nl},y}^i \quad \tilde{F}_{\text{nl},n}^i]^T$  为  $t_i$  时刻干摩擦力向量,  $\tilde{U}^i = [u_x^i \quad u_y^i \quad v^i]^T$  为  $t_i$  时刻位移向量。关于时域中干摩擦力对相对位移的偏导数矩阵的详细描述可参考文献 [4]。注意在数值轨迹跟踪法的

应用过程中, 由于黏滞状态下  $t_i$  时刻的切向弹簧伸长量  $d_i$  和  $t_{i-1}$  时刻的切向弹簧伸长量  $d_{i-1}$  存在耦合关系, 因此在式 (23) 中需要考虑偏导数矩阵  $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^i / \partial \tilde{\mathbf{U}}^{i-1}$ 。式 (23) 中  $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^i / \partial \tilde{\mathbf{U}}^i$  为:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^i}{\partial \tilde{\mathbf{U}}^i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,x}^i}{\partial u_x^i} & 0 & \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,x}^i}{\partial v^i} \\ 0 & \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,y}^i}{\partial u_y^i} & \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,y}^i}{\partial v^i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,n}^i}{\partial v^i} \end{bmatrix} \quad (24)$$

上述矩阵中各项元素分别为:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,k}^i}{\partial u_k^i} = \begin{cases} k_t & \text{黏滞} \\ 0 & \text{滑移, } k = x, y \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,k}^i}{\partial v^i} = \begin{cases} 0 & \text{黏滞} \\ \text{sign}(\dot{u}_k^i) \mu k_n & \text{滑移, } k = x, y \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,n}^i}{\partial v^i} = \begin{cases} k_n & \text{接触} \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \quad (27)$$

式 (23) 中  $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^i / \partial \tilde{\mathbf{U}}^{i-1}$  涉及的矩阵元素如下:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl,k}^i}{\partial u_k^{i-1}} = \begin{cases} -k_t & t_i \text{ 为状态转换时刻} \\ 0 & t_i \text{ 为其他时刻} \end{cases} \quad k = x, y \quad (28)$$

综合式 (23) ~ 式 (28), 即可获得  $\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl} / \partial \tilde{\mathbf{U}}$ , 进而建立雅可比矩阵  $\tilde{\mathbf{J}}$  的解析表达式。需要特别强调, 干摩擦力  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  历经扩展周期处理后, 相应地  $\tilde{\mathbf{J}}$  亦需进行适应性处理。仍以扩展至两个振动周期为例, 考虑到干摩擦力  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}^2$  与  $\tilde{\mathbf{U}}_1$  可能存在耦合关系, 扩展平衡方程的完整形式如下:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1(\tilde{\mathbf{U}}_1) \\ \tilde{\mathbf{G}}_2(\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{U}}_1 \\ \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^1(\tilde{\mathbf{U}}_1) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^2(\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (29)$$

在扩展周期内进行截断处理, 仅保留式 (29) 的第 2 行, 得到最终的 TSHBM 平衡方程为:

$$\tilde{\mathbf{G}}_2(\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_2) = \mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{U}}_2 + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^2(\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{U}}_2) - \tilde{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{0} \quad (30)$$

以 Newton-Raphson 求解方案为例, 该平衡方程的迭代求解表达式为:

$$\tilde{\mathbf{J}}^j \cdot (\tilde{\mathbf{U}}_2^{j+1} - \tilde{\mathbf{U}}_2^j) = -\tilde{\mathbf{G}}_2(\tilde{\mathbf{U}}_1^j, \tilde{\mathbf{U}}_2^j) \quad (31)$$

其中雅可比矩阵  $\tilde{\mathbf{J}}^j$  为:

$$\tilde{\mathbf{J}}^j = \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_2(\tilde{\mathbf{U}}_1^j, \tilde{\mathbf{U}}_2^j)}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_1^j} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_1^j}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_2^j} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_2(\tilde{\mathbf{U}}_1^j, \tilde{\mathbf{U}}_2^j)}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_2^j} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^2(\tilde{\mathbf{U}}_1^j, \tilde{\mathbf{U}}_2^j)}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_1^j} + \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^2(\tilde{\mathbf{U}}_1^j, \tilde{\mathbf{U}}_2^j)}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_2^j} \quad (32)$$

式中的偏导数矩阵可参照式 (23) 获取。基于伪时间步推进方法的求解方案中式 (19) 所需雅可比矩阵的解析表达式与之类似, 不再赘述。

### 3 算例

本节通过 3 个算例, 对基于 TSHBM 的非线性结构振动响应预测方法进行验证: ①带干摩擦单元的悬臂梁模型; ②杜芬振子; ③带燕尾型榫根的压气机叶片-轮盘单扇区有限元模型。

#### 3.1 带干摩擦单元的悬臂梁模型

带干摩擦单元的悬臂梁模型<sup>[17]</sup> 见图 2。

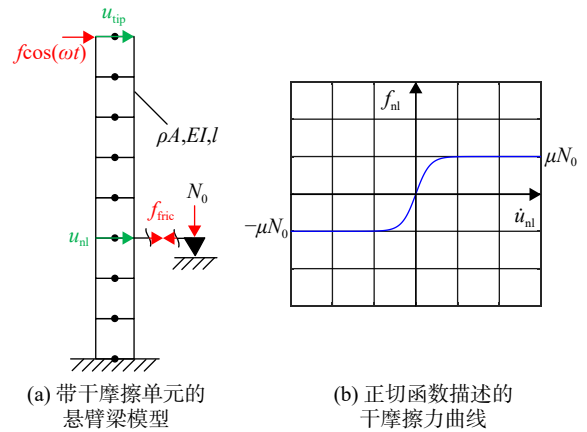


图 2 带干摩擦单元的悬臂梁模型及正切函数描述的干摩擦力曲线

Fig. 2 Cantilever beam with dry friction element and dry friction force curve described by tangent function

模型由 8 个欧拉-伯努利梁单元组成。局部干摩擦单元的库伦摩擦力采用正切函数近似表达为

$$f_{fric}(u_{nl}, \dot{u}_{nl}) = \mu N_0 \tanh \frac{\dot{u}_{nl}}{\varepsilon} \quad (33)$$

式中  $u_{nl}$  表示非线性节点的横向挠度。其函数曲线如图 2(b) 所示。(无量纲) 模型参数为:

$$l = 2, \quad \rho A = 235, \quad EI = 4.6 \times 10^6, \quad \mu N_0 = 1.5, \quad f = 0.2, \quad C = 8 \times 10^{-5} K, \quad \varepsilon = 6.2 \times 10^{-7} \quad (34)$$

##### 3.1.1 计算过程

在该算例中, 考虑计算精度和计算量的平衡, 经过试算后选定  $N_h = 3$ , 采用 TSHBM 方法分别配合不同的求解方案计算悬臂梁的强迫振动响应。

考虑到文中第 1.3.1 节中基于 Newton-Raphson 法的求解方案与文中第 1.1 节中传统多谐波平衡法的求解方法基本一致, 本文仅针对基于伪时间步推进方法的求解方案计算过程进行简单说明。悬臂梁端部节点  $u_{\text{tip}}$  对应的 TSHBM 位移变量  $\tilde{U}_{\text{tip}}$  的伪时间域历程曲线如图 3 所示。随着伪时间步的推进, 图 3 中变量  $\tilde{U}_{\text{tip}}$  中各个元素仅需 5 个伪时间步即达成稳定状态, 与此同时式 (17) 右边项所代表的计算残差迅速收敛于零, 由此获得平衡方程 (式 (15)) 的解  $\tilde{U}$ 。

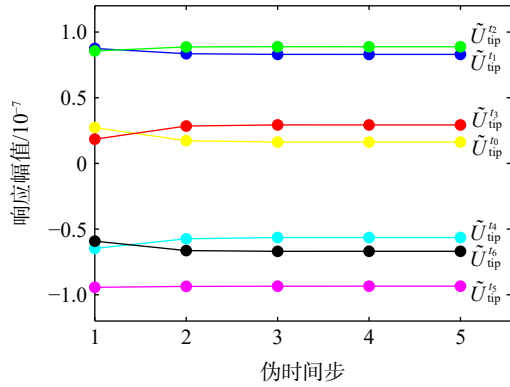


图 3  $\tilde{U}_{\text{tip}}$  的伪时间域历程曲线

Fig. 3 Pseudo-time history of  $\tilde{U}_{\text{tip}}$

### 3.1.2 “失真”现象及处理结果

在文中第 1.2 节已经述及, 时间谱形式的谐波平衡法直接应用于具有强非线性因素的动力学系统时, 若不进行任何处理, 可能会产生事实上并不存在的非物理解, 即所谓的“失真”现象。图 4 反映了“失真”处理前后的悬臂梁端部节点的强迫振动响应的幅频曲线。可以看出, 不采取失真处理措施在峰值频率附近的幅频曲线出现了剧烈的异常波动, 意味着 TSHBM 方法并没有给出正确的数值解。这种典型失真现象的根本原因在于在

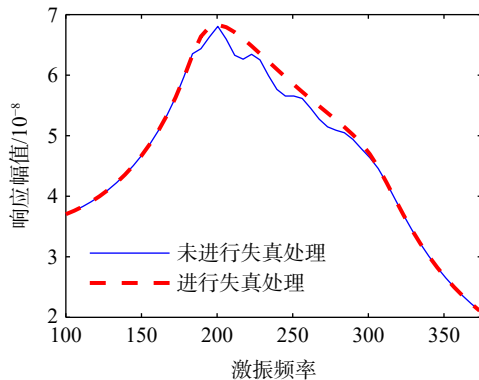


图 4 失真现象

Fig. 4 Aliasing phenomenon

构建 TSHBM 平衡方程过程中非线性项  $\tilde{F}_{\text{nl}}$  被高次谐波 ( $>N_h$ ) 分量所污染。

为此, 采用扩展子时间层的失真处理方法, 在构造傅里叶转换矩阵  $E$  时将子时间层从  $2N_h + 1$  扩展至  $6N_h + 1$ , 即可很好地解决失真问题。图 4 中的红色光滑平顺的虚线, 反映了失真处理后通过 TSHBM 方法计算得到的强迫振动幅频曲线。因此, 本文在后续算例中均采用了扩展子时间层的处理方法以有效消除 TSHBM 所独有的“失真”现象, 保证其计算结果的有效性。

### 3.1.3 准确性验证

为了验证 TSHBM 方法计算结果的准确性, 本文同时采用传统的多谐波平衡法 (保留相同谐波阶次  $N_h = 3$ ), 采用自然延拓法, 在峰值频率附近  $[100, 373.5]$  的频率区间范围内取 50 个均匀分布的频率点, 计算悬臂梁端部节点的强迫振动响应幅频曲线, 结果对比如图 5 所示。

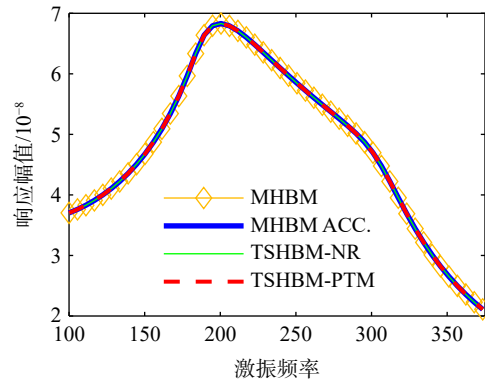


图 5 不同方法计算的带干摩擦单元的悬臂梁模型的幅频曲线

Fig. 5 Amplitude-frequency curve of cantilever beam with dry friction element by different methods

其中“MHBM”为采用常规多谐波平衡法的响应计算结果; “MHBM ACC.”表示采用多谐波平衡法并结合解析雅可比矩阵进行加速计算的结果; “TSHBM-NR”表示采用时间谱形式的谐波平衡法并配合使用基于 Newton-Raphson 方法的求解方案获得的计算结果; 最后“TSHBM-PTM”代表采用时间谱形式的谐波平衡法并配合使用伪时间步推进求解方案的计算结果。

通过图 5 可以看出, 通过上述 4 种不同方法和求解方案所获取的计算结果高度吻合。以 MHBM 的响应计算结果为基准, MHBM ACC.、TSHBM-NR 及 TSHBM-PTM 的计算结果相对于 MHBM 的计算结果的平均相对误差分别为  $3.018 \times 10^{-15}$ 、

$1.629 \times 10^{-6}$  以及  $1.629 \times 10^{-6}$ , 由此证明了本文所建立的基于时间谱形式的谐波平衡法的非线性结构强迫振动响应预测方法的准确性。

### 3.1.4 计算效率对比

为了验证时间谱形式的谐波平衡法在预测非线性结构强迫振动响应过程中的计算效率优势, 本文将上述 4 种不同的计算方法和求解方案(谐波阶次  $N_h$  变化)所消耗的 CPU 计算时间进行汇总, 如表 1 所示。为了方便对比, 表格中计算时间以  $N_h = 1$  时常规多谐波平衡法(MHBM)所消耗的计算时间为基准进行了归一化处理。

表 1 带干摩擦单元的悬臂梁模型的幅频曲线的  
归一化计算时间

Table 1 Normalized computational time of amplitude-frequency curve of cantilever beam with dry friction element

| 计算方法      | 保留谐波阶次    |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           | $N_h = 1$ | $N_h = 3$ | $N_h = 5$ | $N_h = 7$ |
| MHBM      | 1.000     | 4.247     | 15.493    | 66.795    |
| MHBM ACC. | 0.139     | 0.371     | 0.746     | 1.559     |
| TSHBM-NR  | 0.038     | 0.082     | 0.171     | 0.309     |
| TSHBM-PTM | 0.043     | 0.085     | 0.184     | 0.361     |

从表 1 可以看出, 随着谐波阶次  $N_h$  的增加, 常规多谐波平衡法(MHBM)的计算消耗时间呈非线性趋势迅速增加。其根本原因在于随着其平衡方程规模的线性增长, 在时-频域变量转换运算上的计算消耗却呈几何级数趋势上升。而解析雅可比矩阵技术的使用能够对多谐波平衡法的计算进行有效加速(MHBM ACC.)。

相较于 MHBM ACC., TSHBM 可以在时域中直接计算非线性项, 避免了大量繁复的时-频域变量转换运算, 普遍展现出了更为高效的计算能力。特别指出, 随着谐波阶次  $N_h$  的增加, TSHBM 方法的计算时间呈线性增长趋势。以  $N_h = 7$  为例, TSHBM 的计算效率相较于 MHBM ACC. 达到了接近 4 倍的提升幅度。在两种不同的 TSHBM 求解方案之间, 采用 Newton-Raphson 方法进行求解的计算方案(TSHBM-NR)的表现略优。这是因为在伪时间步推进求解方案(TSHBM-PTM)中由于 ILUC 预处理步骤带来了额外计算消耗影响了其计算效率。

## 3.2 杜芬振子

文中第 3.1 节通过带干摩擦单元的悬臂梁模

型算例这一弱非线性系统验证了 TSHBM 的准确性和高效性, 并对 TSHBM 的“失真”现象及其处理作了说明。本节将通过杜芬振子系统对 TSHBM 应用于强非线性系统的准确性和效率做进一步验证。

杜芬振子系统的控制方程如下:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \alpha x^3 = f \cos(\omega t) \quad (35)$$

为使系统呈现强非线性, 取系统参数如下:

$$m = 1, k = 1, c = 0.2, \alpha = 1, f = 0.8 \quad (36)$$

### 3.2.1 准确性验证

考虑到系统呈现强非线性, 为准确地捕捉幅频曲线的多值现象, 采用 MHBM 和 TSHBM 计算响应时将结合弧长延拓法进行计算, 计算中各种方法采用的弧长延拓法的相关参数一致, 并在 TSHBM 计算过程中采用失真处理方法。计算结果对比如图 6 所示( $N_h = 7$ )。

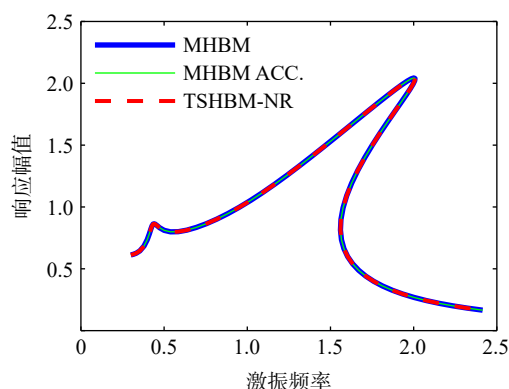


图 6 不同方法结合弧长延拓法计算的杜芬振子的幅频曲线  
Fig. 6 Amplitude-frequency curve of duffing oscillator by different methods with arc-length continuation

其中“MHBM”、“MHBM ACC.”及“TSHBM-NR”分别表示为采用常规多谐波平衡法、采用多谐波平衡法并结合解析雅可比矩阵进行加速计算以及采用时间谱形式的谐波平衡法并配合使用基于 Newton-Raphson 方法的求解方案获得的计算结果。可以看出, 3 种计算方法的响应计算结果高度重合。这说明本文建立的非线性结构强迫振动响应计算方法也可应用到强非线性系统的响应计算。

### 3.2.2 计算效率对比

表 2 进一步给出了在取不同的谐波阶次  $N_h$  的情况下, 上述 3 种计算方案所消耗的归一化计算时间对比结果。其中, 归一化处理基准为  $N_h = 1$

表 2 杜芬振子系统的幅频曲线的归一化计算时间  
Table 2 Normalized computational time of amplitude-frequency curve of duffing oscillator

| 计算方法      | 保留谐波阶次    |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           | $N_h = 1$ | $N_h = 3$ | $N_h = 5$ | $N_h = 7$ |
| MHBM      | 1.000     | 1.713     | 2.631     | 4.233     |
| MHBM ACC. | 0.719     | 0.984     | 1.161     | 1.454     |
| TSHBM-NR  | 0.539     | 0.650     | 0.681     | 0.779     |

时多谐波平衡法(MHBM)计算方案所消耗的 CPU 计算时间。

需要说明的是, 3 种方法在计算频率范围内的计算总频率点数量保持一致。在采用弧长延拓法的情况下, 相较于 MHBM ACC., TSHBM 依然展现出了更为高效的计算能力。以  $N_h = 7$  为例, TSHBM 的计算效率相较于 MHBM ACC. 达到了接近 1 倍的提升幅度。这是因为 MHBM 每一个迭代计算步均需进行时-频转换计算, 而 TSHBM 只需在时域中直接计算非线性项, 并且由于采用弧长延拓法带来的迭代计算  $\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{P}(\omega) \mathbf{E}$  项(动态刚度矩阵与傅里叶矩阵相乘)增加的计算量几乎可以忽略不计。对比表 1 和表 2 可以看出, 在杜芬振子算例中, TSHBM 的效率提升幅度没有在带干摩擦单元的悬臂梁模型算例中大, 这是因为杜芬振子系统自由度数目过小, 且计算中采用的 MHBM 和 TSHBM 的底层迭代方法均是 Newton-Raphson 方法。但综合来看, 在强非线性系统中 TSHBM 相较于 MHBM 在计算效率上仍有显著优势。

3.3 带燕尾型榫根的叶片单扇区有限元模型

本节进一步将时间谱形式的谐波平衡法应用于图 7 所示的带燕尾型榫根接触面的叶盘结构单扇区有限元模型中。该单扇区模型以带燕尾榫槽的简单圆盘来模拟实际轮盘结构。为简化计算, 本文仅在轮盘扇区边界面上施加固定约束, 必要时可根据实际情况添加循环对称条件。沿叶盘周向的激励力作用于叶片根部某节点。响应监测节点位于叶尖部位。施加转速以得到离心载荷。在激励力的作用下, 叶片和轮盘在榫根连接接触界面发生相对运动, 从而产生干摩擦效应。为描述接触界面的微滑移运动, 在接触界面布有 134 对三维变压力点对点接触单元, 接触对节点示意图如图 7 所示。

该模型的主要参数如表 3 所示。

为减小计算规模, 本文采用 Craig-Bampton 模

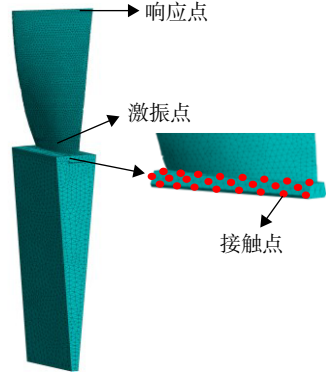


图 7 带燕尾型榫根的叶片单扇区有限元模型

Fig. 7 FE model of a bladed disk sector with dovetail joint

表 3 主要模型参数  
Table 3 Model parameters

| 参数                                 | 数值    |
|------------------------------------|-------|
| 弹性模量 $E/10^{11}$ Pa                | 2.1   |
| 泊松比 $\mu_e$                        | 0.3   |
| 材料密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$ | 7 980 |
| $\beta$ -阻尼系数/ $10^{-5}$           | 1     |
| 切向接触刚度 $k_t/10^5$ (N/m)            | 1     |
| 法向接触刚度 $k_n/10^5$ (N/m)            | 1     |
| 摩擦因数 $\mu$                         | 0.3   |

态综合法对该有限元模型进行动力学减缩<sup>[2]</sup>。减缩模型的自由度数等于非线性自由度数加上截取的线性模态阶次数(30 阶), 模型自由度从 29 937 降低至 870。

3.3.1 准确性验证

给定激振力幅值水平为 5 N, 保留谐波阶次  $N_h = 3$ , 采用时间谱形式的谐波平衡法并综合运用文中第 2 节针对干摩擦非线性的适应性处理措施, 计算叶片的非线性强迫振动响应。在叶片一弯模态频率附近叶尖部位响应监测节点的幅频曲线如图 8 所示。

考虑到减缩模型的规模仍然相对较大, 本算例中仅给出了采用解析雅可比矩阵加速技术的传统多谐波平衡法(MHBM ACC.)的计算结果作为比较基准。可以看出, 分别采用两种不同求解方案的 TSHBM 的响应计算结果与 MHBM ACC. 高度重合。

3.3.2 计算效率对比

表 4 进一步给出了在取不同的谐波阶次  $N_h$  的情况下, 上述 3 种计算方案所消耗的归一化计算时间对比结果。其中, 归一化处理基准为  $N_h = 1$  时多谐波平衡法(MHBM ACC.)计算方案所消耗

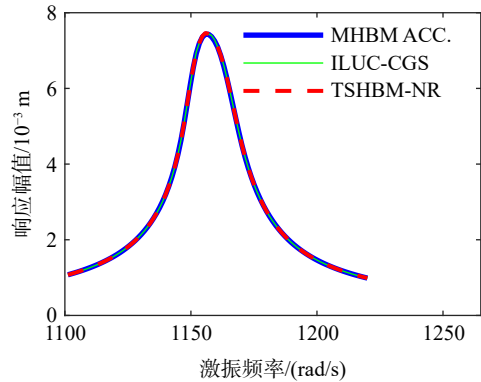


图 8 不同方法计算的带燕尾型榫根的叶片单扇区模型的幅频曲线

Fig. 8 Amplitude-frequency curve of bladed disk sector with dovetail joint by different methods

表 4 带燕尾型榫根的叶片单扇区模型的幅频曲线的归一化计算时间

Table 4 Normalized computational time of amplitude-frequency curve of bladed disk sector with dovetail joint

| 计算方法      | 保留谐波阶次    |           |
|-----------|-----------|-----------|
|           | $N_h = 1$ | $N_h = 3$ |
| MHBM ACC. | 1.000     | 6.085     |
| TSHBM-NR  | 0.926     | 5.404     |
| TSHBM-PTM | 0.628     | 3.304     |

的 CPU 计算时间。

总的来说,相较于传统多谐波平衡法(MHBM ACC.), TSHBM 方法都展示出更高的计算效率。然而,对比观察文中第 3.1 节表 1 中的数据可发现,本算例中 TSHBM 方法相较于 MHBM ACC. 方案的计算效率提升幅度相对有限。这是因为 TSHBM 方法需要配合采用扩展子时间层的处理方法来避免可能发生的“失真”现象。而随着模型规模的增长,由于扩展子时间层带来的额外计算消耗变得愈发突出,故而降低了以 TSHBM 为核心的计算方案的整体效率。

具体到两种不同的 TSHBM 求解方案,在本算例中,采用 Newton-Raphson 方法进行求解的计算方案(TSHBM-NR)的计算速度略优于传统多谐波平衡法(MHBM ACC.), 计算时间削减不超过 12%。而伪时间步推进求解方案(TSHBM-PTM)的计算效率最高。在  $N_h = 1$  时,其计算时间消耗相较于 MHBM ACC. 减少约 37%; 在  $N_h = 3$  时,其计算时间削减幅度进一步提升至近 46% 的水平。从表 2 和表 4 中可以看出, TSHBM-NR 与 TSHBM-

PTM 在两种不同规模模型中的计算效率提升效果并不一致。在文中第 3.1 节小规模悬臂梁模型中, TSHBM-NR 方法所采用的 Newton-Raphson 求解方案更具比较优势。而在本节算例中随着模型自由度数目的增加, TSHBM-PTM 方法中 ILUC 预处理步骤计算消耗相对占比更小,故而在总体计算效率上表现更好。这说明在大规模非线性动力学模型中,伪时间步推进求解方案能够更好地发挥时间谱形式的谐波平衡法的计算效率优势。

3.3.3 激振力对响应特性的影响分析

叶片干摩擦结构的运动力学行为具有非线性特征,其激振力的大小对叶片的振动响应特性具有重要的影响。取激振力幅值范围为 0.1~15 N, 保留谐波阶次  $N_h = 3$ , 采用时间谱形式的谐波平衡法进行叶片的非线性强迫振动响应分析。叶片一弯模态频率附近叶尖部位响应监测节点在不同激励幅值下的幅频曲线如图 9 所示。

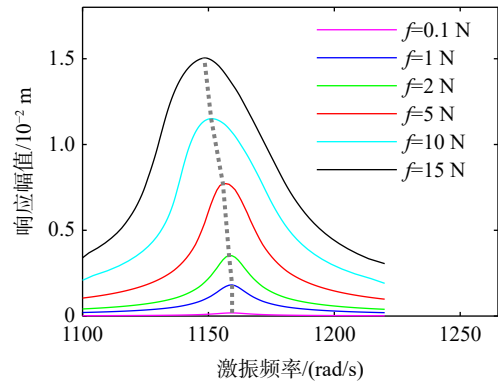


图 9 幅频曲线随激振力的变化

Fig. 9 Amplitude-frequency curve with varying exciting force

从图 9 可以看出,在低激励幅值下,接触界面间各接触对基本处于近完全黏滞状态,接触界面间的相对滑移现象不明显,干摩擦阻尼效应较弱,使得叶片振动幅值呈现近线性增长趋势,一弯共振幅值偏移较小;随着激振力幅值的增加,接触界面各接触对逐渐由黏滞状态转换到黏滞-滑移状态,由此产生的接触界面的干摩擦效应逐渐加强,使得叶片结构的一弯共振频率明显左移,且显著影响叶片振动幅值,导致叶片振动响应曲线呈现明显的非线性特性。

4 结 论

本文以时间谱形式的谐波平衡法为核心,建立了含接触界面结构的非线性强迫振动响应高效

计算方法,重点针对接触非线性特点提出了干摩擦力计算和解析雅可比矩阵计算的适应性处理以及求解方案。

时间谱形式的谐波平衡法将时域中的非线性偏微分动力学方程转换为时域中的非线性代数方程进行求解,避免了传统多谐波平衡法中计算消耗高的时-频域变量转换运算环节,在易用性、可推广性和计算效率方面具有独特的优势。数值仿真结果表明,在大规模的含接触界面的叶片非线性动力学模型中,时间谱形式的谐波平衡法结合伪时间步推进求解方案,能够更好地发挥其计算效率优势,有望为各种类型的叶片干摩擦阻尼结构的振动分析和优化设计提供工具支持。

需要说明的是,本文建立的通用求解方案并不局限于干摩擦阻尼叶片的响应计算,可以方便地推广到其他包含非线性因素的航空发动机系统(如轴承-转子系统及碰磨转子系统等)的非线性响应计算中。

## 参考文献:

- [1] 李琳,高钱,吴亚光,等.考虑参数关联的缘板阻尼器减振性能分析[J].航空动力学报,2021,36(8):1657-1668.  
LI Lin, GAO Qian, WU Yaguang, et al. On the vibration reduction performance of underplatform dampers considering parameter correlation[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(8): 1657-1668. (in Chinese)
- [2] 阳刚,周标,臧朝平.含接触界面的叶盘结构强迫振动响应快速预测方法[J].航空动力学报,2019,34(9):1953-1961.  
YANG Gang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping. Fast response prediction method for bladed disks with contact interfaces[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(9): 1953-1961. (in Chinese)
- [3] ZUCCA S, EPUREANU B I. Bi-linear reduced-order models of structures with friction intermittent contacts[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(3): 1055-1067.
- [4] SIEWERT C, PANNING L, WALLASCHEK J, et al. Multiharmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2010, 132(8): 082501.
- [5] LAXALDE D, THOUVEREZ F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: application to turbomachinery bladings with friction interfaces[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 322(4/5): 1009-1025.
- [6] PETROV E P, EWINS D J. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2003, 125(2): 364-371.
- [7] PETROV E P. Method for sensitivity analysis of resonance forced response of bladed disks with nonlinear contact interfaces[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, 131(2): 022510.
- [8] SALLES L, BLANC L, THOUVEREZ F, et al. Dual time stepping algorithms with the high order harmonic balance method for contact interfaces with fretting-wear[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2012, 134(3): 1.
- [9] HALL K C, THOMAS J P, CLARK W S. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique[J]. *AIAA Journal*, 2002, 40: 879-886.
- [10] LABRYER A, ATTAR P J. A harmonic balance approach for large-scale problems in nonlinear structural dynamics[J]. *Computers & Structures*, 2010, 88(17/18): 1002-1014.
- [11] MUNDIS N L, MAVRIPLIS D J. An efficient flexible GMRES solver for the fully-coupled time-spectral aeroelastic system: AIAA 2014-1427 [R]. Reston, US: AIAA, 2014.
- [12] SICOT F, PUIGT G, MONTAGNAC M. Block-jacobi implicit algorithms for the time spectral method[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(12): 3080-3089.
- [13] WOODGATE M A, BADCOCK K J. Implicit harmonic balance solver for transonic flow with forced motions[J]. *AIAA Journal*, 2009, 47(4): 893-901.
- [14] SU X, YUAN X. Implicit solution of time spectral method for periodic unsteady flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 63(7): 860-876.
- [15] RAMEZANIAN D, MAVRIPLIS D, AHRABI B R. An order N log N parallel solver for time-spectral problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, 411: 109319.
- [16] KRACK M, GROSS J. Harmonic balance for nonlinear vibration problems[M]. Cham: Springer International Publishing, 2019.
- [17] 刘南,白俊强,华俊,等.高阶谐波平衡方法中非物理解来源分析及改进方法研究[J].力学学报,2016,48(4):897-906.  
LIU Nan, BAI Junqiang, HUA Jun, et al. Investigation of the source and improvement of non-physical solutions in high-order harmonic balance[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 897-906. (in Chinese)
- [18] LI Hang, EKICI K. Improved one-shot approach for modeling viscous transonic limit cycle oscillations[J]. *AIAA Journal*, 2018, 56(8): 3138-3152.
- [19] SAAD Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. Second Edition. Philadelphia,US: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

(编辑:张 雪)