

基于函数法的两级星型齿轮传动均载特性分析

杜进辅, 毛 弘, 张延超, 毛 锦

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

摘 要: 为获取定轴多分支功率分汇流齿轮传动的真实均载情况, 提出一种基于函数法的静力学均载特性分析方法, 综合考虑系统构成功率流闭环的特点以及误差随机性的影响, 系统地分析了两级定轴三支(星型)齿轮传动的均载特性, 并定量分析了其误差敏感性, 最后通过与现有算例的对比分析, 对上述方法的准确性进行了验证。研究表明: 制造和安装误差随机性对系统载荷分配的影响不可忽略, 尤以误差值随机性为甚; 函数法计算均载系数时可有效避免截断误差, 又因计入了误差随机性的影响, 故更接近真实情况。

关 键 词: 星型齿轮传动; 均载特性; 变形协调; 函数法; 误差

中图分类号: V233.1; TH132.4

文献标志码: A

Analysis on load sharing characteristic of two-stage star gear transmission based on function method

DU Jinfu, MAO Hong, ZHANG Yanchao, MAO Jin

(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering,
Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: In order to obtain the actual load sharing performance of fixed-axis multi-branch power-split gear transmission, a method based on function method for static load sharing characteristic analysis was proposed. Considering the power closed-loop and error randomness, the load sharing characteristics of two-stage fixed-axis three-branch (star) gear transmission were systematically analyzed, and its error sensitivity was quantitatively analyzed. Finally, the above method was verified to be correct compared with the existing examples. The results showed that the manufacturing and installation error randomness on the system load distribution cannot be ignored, especially the randomness of error values. Function method can effectively avoid truncation error when calculating the load sharing coefficient, which was closer to the actual situation when considering error randomness.

Keywords: star gear transmission; load sharing characteristics; deformation coordination; function method; error

定轴多分支功率分、汇流齿轮传动, 也称星型传动, 具有功密比大、传动效率高等诸多优点, 在航空、船舶等工业中具有重要。与行星传动类似, 其上述优异性能能否得以实现很大程度上依

赖于各分支载荷是否均配, 也即能否实现均载。

功率分、汇流齿轮传动系统的均载问题历来备受关注, 国内外学者围绕这一问题开展了大量卓有成效的研究, 对这类齿轮传动的高性能设计

收稿日期: 2022-06-16

基金项目: 国家自然科学基金(51705419); 中国博士后科学基金(2018M633540); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2022JM271); 西安市科技计划项目(22GXFW0091)

作者简介: 杜进辅(1984—), 男, 副教授、硕士生导师, 博士, 主要从事齿轮传动先进设计及制造技术研究。E-mail: dujinfu@xaut.edu.cn

通信作者: 毛弘(1998—), 男, 硕士生, 研究方向为功率分汇流齿轮系统的均载特性分析。E-mail: maohong13@126.com

引用格式: 杜进辅, 毛弘, 张延超, 等. 基于函数法的两级星型齿轮传动均载特性分析[J]. 航空动力学报, 2024, 39(11): 20220428. DU Jinfu, MAO Hong, ZHANG Yanchao, et al. Analysis on load sharing characteristic of two-stage star gear transmission based on function method[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(11): 20220428.

和制造具有重要指导作用。日高照晃等^[1]从静力学角度系统研究了行星轮系中各构件误差对均载系数的影响; Kahraman、Bodas 等^[2-4]对行星齿轮传动装置进行了静动力学分析并通过实验进行了验证; Krantz 等^[5-6]研究分析了行星轮系等功率分流齿轮传动系统的均载特性; 国内学者对于行星轮系的均载特性研究较多, 肖铁英、陆俊华、周慧琴和邵晓荣等^[7-10]围绕行星轮系的静力学均载机理展开研究, 为其他多分支功率分流传动系统的均载特性分析奠定了理论基础; 在此基础上, 袁擎宇等^[11-12]计算了星型齿轮传动系统的均载系数并分析了各构件误差与均载系数的关系。但以上工作未能考虑系统构成功率流动闭环的影响。杜进辅、孙振宇等^[13-15]考虑了传动系统功率流动闭环的特征, 推导出行星轮系和两级三支星型齿轮传动系统的变形协调条件; 董皓等^[16]和莫帅等^[17-19]基于变形协调计算了双路功率分流传动系统和星型四分支传动系统的均载特性和分流特性, 使得均载系数计算结果更接近真实情况; 李志宾等^[20]基于变形协调方程研究了齿轮制造与安装误差对同轴六分支分扭传动系统的均载特性影响; 此外, 靳广虎等^[21-22]还研究了传动轴扭转刚度和齿轮支撑刚度对系统均载特性的影响。王朝兵等^[23]和范伶松等^[24]考虑了误差随机性对齿轮副振动特性和行星齿轮系传动精度的影响, 但上述研究均未考虑误差随机性对系统均载特性的影响, 另外, 在均载系数计算中由于对所选循环周期不明确, 可能出现截断误差, 并且采用图形法进行误差敏感性分析也难以定量。

为此, 本文提出一种新的基于函数法的均载特性分析方法, 以某航空两级星型齿轮传动为研究对象, 考虑变形协调, 用函数表达式直观表征系统中各构件的误差与均载系数的关系, 定量分析系统均载系数的误差敏感性, 并基于函数式建立数学统计模型, 分析误差随机性对系统均载系数的影响, 最后通过与已有算例的对比分析, 验证了本文方法的准确性。

1 系统均载系数计算

1.1 等效计算模型

图 1 所示是两级外啮合星型齿轮系统的传动简图。输入功率经第 1 级太阳轮 Z_{s1} 分配到第 1 级各星轮 Z_{p1} 上, 又经第 2 级各星轮 Z_{p2} 汇集到第 2 级太阳轮 Z_{s2} 上并输出。

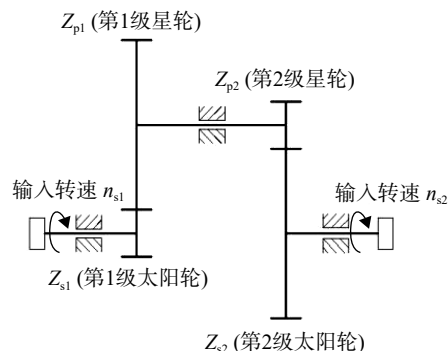


图 1 两级外啮合星型齿轮系统传动简图

Fig. 1 Kinematic diagram of two-stage external meshing star gear system

图 2 是两级三支星型齿轮系统的力学结构模型, 其中 K_{s1} 和 K_{s2} 分别表示两级太阳轮 $s1$ 和 $s2$ 的支撑刚度, K_{s1p1} 和 K_{p2s2} 分别表示第 1 级太阳轮 $s1$ 与星轮 $p1k$ 之间的等效啮合刚度和第 2 级太阳轮 $s2$ 与星轮 $p2k$ ($k=1, 2, 3$) 之间的等效啮合刚度。 n_i 为齿轮 i ($i=s1, p11, p12, p13, p21, p22, p23, s2$) 的转速。

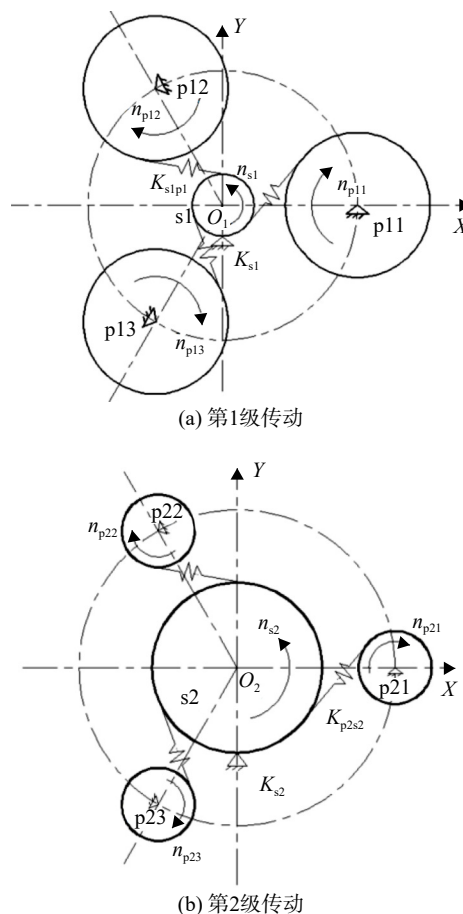


图 2 两级外啮合星型齿轮系统等效计算模型

Fig. 2 Equivalent calculation model of two-stage external meshing star gear system

1.2 啮合传动误差的分析

影响星型齿轮传动系统载荷分配的误差主要包含两大类: 一类源于各构件的制造、安装偏心; 一类源于各构件的浮动。

1) 由制造、安装偏心误差引起的累计啮合误差用

E 、 β 表示制造偏心误差的误差值和相位角, A 、 γ 表示安装偏心误差的误差值和相位角; “+”表示顺时针旋转; 下标 $s1$ 、 $s2$ 、 $p1k$ 、 $p2k$ 、 b 分别代表第 1 级太阳轮、第 2 级太阳轮、第 1 级第 k 个星轮、第 2 级第 k 个星轮和轴承 ($k=1, 2, 3$); ω_{si} 、 ω_{pi} 分别代表第 i 级 ($i=1, 2$) 太阳轮和星轮的角速度; $\alpha_{\omega 1}$ 、 $\alpha_{\omega 2}$ 分别表示两级外啮合的啮合角; $\varphi_k=2\pi(k-1)/n$ 为各级第 k 个星轮相对于第 1 个星轮的位置角; θ_{ppk} 为双联星轴同时啮合线误差, 它是指第 1 级星轮开始进入啮合时, 其工作面与第 2 级星轮相应轮齿实际工作面相对于星轮中心的角位移; t 为时间。各误差引起的第 k 分支 ($k=1,$

2, 3) 的当量啮合误差可以表示为

$$\begin{cases} e_{Es1k} = -E_{s1} \sin(\omega_{s1}t + \beta_{s1} + \alpha_{\omega 1} - \varphi_k) \\ e_{As1k} = -A_{s1} \sin(\gamma_{s1} + \alpha_{\omega 1} - \varphi_k) \\ e_{Ep1k} = E_{p1k} \sin(-\omega_{p1}t + \beta_{p1i} + \alpha_{\omega 1}) \\ e_{Ap1k} = A_{p1k} \sin(\gamma_{p1i} + \alpha_{\omega 1}) \\ e_{Ebs1k} = -E_{bs1} \sin(\omega_{s1}t + \alpha_{\omega 1} - \varphi_k) \\ e_{Ebp1k} = E_{bp1k} \sin(-\omega_{p1}t + \alpha_{\omega 1}) \\ e_{Es2k} = E_{s2} \sin(\omega_{s2}t + \beta_{s2} - \alpha_{\omega 2} - \varphi_k) \\ e_{As2k} = A_{s2} \sin(\gamma_{s2} - \alpha_{\omega 2} - \varphi_k) \\ e_{Ep2k} = E_{p2k} \sin(-\omega_{p2}t + \beta_{p2i} - \alpha_n) \\ e_{Ap2k} = A_{p2k} \sin(\gamma_{p2i} - \alpha_n) \\ e_{Ebs2k} = -E_{bs2} \sin(\omega_{s2}t - \alpha_{\omega 2} - \varphi_k) \\ e_{Ebp2k} = E_{bp2k} \sin(-\omega_{p2}t - \alpha_{\omega 2}) \\ e_{\theta_{ppk}} = -r_{bp2}\theta_{ppk} \end{cases} \quad (1)$$

将上述中各当量误差叠加, 即得第 1 级和第 2 级各传动分支的累积啮合误差

$$\begin{cases} e_{s1p1k} = e_{Es1k} + e_{As1k} + e_{Ep1k} + e_{Ap1k} + e_{Ebs1k} + e_{Ebp1k} + e_{s1} + e_{p1k} \\ e_{p2ks2} = e_{Es2k} + e_{As2k} + e_{Ep2k} + e_{Ap2k} + e_{Ebs2k} + e_{Ebp2k} + e_{s2} + e_{p2k} + e_{\theta_{ppk}} \end{cases} \quad (2)$$

2) 由基本构件浮动引起的误差

本文暂取两太阳轮为基本浮动构件, 设两太阳轮的侧隙改变量为 Δ_{s1} 、 Δ_{s2} , 在 X 、 Y 方向上的位移量为分别 x_{s1} 、 y_{s1} 、 x_{s2} 、 y_{s2} , 则有

$$\begin{cases} \Delta_{s1k} = -(x_{s1} \cos A_k + y_{s1} \sin A_k) \\ \Delta_{s2k} = -(x_{s2} \cos B_k + y_{s2} \sin B_k) \end{cases} \quad (3)$$

式中 A_k 为第 1 级太阳轮与第 k 个星轮啮合线的方位角, $A_k = \frac{\pi}{2} - \alpha_{\omega 1} + \varphi_k$ 。 B_k 为第 2 级太阳轮与第 k 个星轮啮合线的方位角, $B_k = -\frac{\pi}{2} + \alpha_{\omega 2} + \varphi_k$ 。由此可得星型齿轮传动系统两级啮合线上的综合啮合误差如下:

$$\begin{cases} \Delta_{1i} = e_{s1p1k} + \Delta_{s1k} \\ \Delta_{2i} = e_{p2ks2} + \Delta_{s2k} \end{cases} \quad (4)$$

1.3 变形协调条件

功率分汇流齿轮传动系统必然构成功率流动闭环, 闭环中构件各类误差及浮动会相互叠加或抵消, 这种联系不可忽略, 以更贴近真实情况。本文中, 两级星型齿轮传动系统满足如下关系式:

$$\begin{cases} \theta_{s1p1k} = \theta_{s1} - \frac{r_{bp1}}{r_{bs1}} \theta_{p1k} \\ \theta_{p2ks2} = \theta_{p2k} - \frac{r_{bs2}}{r_{bp2}} \theta_{s2} \end{cases} \quad (5)$$

式中 θ_i 表示齿轮 i 的转角, θ_{ij} 表示齿轮 i 相对于齿

轮 j 的转角。

由于星轮轴的扭转刚度往往较大, 故暂不考虑其扭转角, 则有 $\theta_{p1k} = \theta_{p2k}$ 。

将第 k ($k=1, 2, 3$) 路啮合传动误差等效至第 1 级太阳轮上, 则有

$$\theta_k = \theta_{s1p1k} + \frac{r_{bp1}}{r_{bs1}} \theta_{p2ks2} \quad (6)$$

综上可得系统的变形协调条件

$$\begin{cases} \theta_{s1p11} + \frac{r_{bp1}}{r_{bs1}} \theta_{p21s2} = \theta_{s1p12} + \frac{r_{bp1}}{r_{bs1}} \theta_{p22s2} \\ \theta_{s1p11} + \frac{r_{bp1}}{r_{bs1}} \theta_{p21s2} = \theta_{s1p13} + \frac{r_{bp1}}{r_{bs1}} \theta_{p23s2} \end{cases} \quad (7)$$

1.4 均载函数的推导

两级星轮的受力可根据下式计算:

$$\begin{cases} F_{s1p1k} = K_{s1p1} (r_{bs1} \theta_{s1p1k} - \Delta_{1k}) \\ F_{p2ks2} = K_{p2s2} (r_{bp2} \theta_{p2ks2} - \Delta_{2k}) \end{cases} \quad (8)$$

第 1 级太阳轮静力平衡

$$T = r_{bs1} \sum_{k=1}^3 F_{s1p1k} \quad (9)$$

星轮联接轴静力平衡

$$F_{s1p1k} r_{bp1} = F_{p2ks2} r_{bp2} \quad (10)$$

两级太阳轮浮动方程

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 F_{s1p1k} \cos A_i + K_{s1} x_{s1} = 0 \\ \sum_{k=1}^3 F_{s1p1k} \sin A_i + K_{s1} y_{s1} = 0 \\ \sum_{k=1}^3 F_{p2ks2} \cos B_i + K_{s2} x_{s2} = 0 \\ \sum_{k=1}^3 F_{p2ks2} \sin B_i + K_{s2} y_{s2} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

联立式(1)~式(11)计算可得各星轮所受的载荷 F_{s1p1k} 、 F_{p2ks2} ($k=1, 2, 3$), 两级各星轮理论上所承受的载荷为

$$\begin{cases} \bar{F}_{s1p1k} = \frac{T}{nr_{bs1}} \\ \bar{F}_{p2ks2} = \bar{F}_{s1p1k} \frac{r_{bp1}}{r_{bp2}} \end{cases} \quad (12)$$

则两级传动的均载系数可分别表示为

$$\begin{cases} \Omega_{1k} = \frac{F_{s1p1k}}{\bar{F}_{s1p1k}} \\ \Omega_{2k} = \frac{F_{p2ks2}}{\bar{F}_{p2ks2}} \end{cases} \quad (13)$$

当系统各基本参数和刚度已知, 在力矩平衡方程和变形协调条件的基础上运用函数法, 推导出系统各分支的均载系数关于所有误差参数 E 、 β 、 A 、 γ 及时间 t 的函数表达式 Ω_{1k} 、 Ω_{2k} , 即

$$\begin{cases} \Omega_{1k} = F_{1k}(E, A, \beta, \gamma, t) \\ \Omega_{2k} = F_{2k}(E, A, \beta, \gamma, t) \end{cases} \quad (14)$$

在不考虑星轮连接轴扭转的情况下, 有

$$\Omega_{1k} = \Omega_{2k} = F_k(E, A, \beta, \gamma) \quad (15)$$

确定各误差项的误差值和初始相位角 E 、 β 、 A 、 γ 并代入各路均载计算函数 F_k 中, 即可得到各分支均载系数关于时间的一元一次周期函数 $\Omega_k(t)$ 。

计算均载函数的周期, 取 $\Omega_k(t)$ 在均载函数周期内的最大值, 即得系统各路的均载系数最大值,

$$\begin{bmatrix} F_{11}(E, A, \beta, \gamma) & F_{12}(E, A, \beta, \gamma) & \cdots & F_{1n}(E, A, \beta, \gamma) \\ F_{21}(E, A, \beta, \gamma) & F_{22}(E, A, \beta, \gamma) & \cdots & F_{2n}(E, A, \beta, \gamma) \\ F_{31}(E, A, \beta, \gamma) & F_{32}(E, A, \beta, \gamma) & \cdots & F_{3n}(E, A, \beta, \gamma) \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中 $n=T_1/d$; T_1 为时间范围; d 为时间步长。

矩阵中第 k ($k=1, 2, 3$) 行元素代表第 k 分支的均载系数在 $t=id$ ($i=0, 1, 2, \cdots, n$) 时刻关于各误差项的计算函数, 每一列元素代表同一时刻各分支

需要说明的是, 由于均载系数时变, 均载函数周期最小应包含各分支一个完整的载荷循环。定义各分支均载系数的最大值为 $\Omega_k = \max\{\Omega_k(t)\}$ ($k=1, 2, 3$), 则系统的均载系数为 $\Omega = \max\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k\}$ 。

2 误差敏感性的分析

在均载函数的基础上可定量分析系统均载系数对各误差项的敏感性。

提取式(15)中各函数 $F_k(E, A, \beta, \gamma, t)$ 的各误差项系数进行比较。对于各构件的安装偏心误差项, 其误差项系数都是常数; 而对于各构件的制造偏心误差项, 其误差项系数是若干个(i 个)关于时间 t 的三角函数, 即

$$K_{Ei}(t) = \sum a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

取 $K_{Ei}(t)$ 在均载函数周期 T 内模的最大值作为各制造偏心误差项的系数, 即

$$K_{Ei} = \max \left[\left| \sum a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \right| \right]$$

它表示了制造偏心误差项在给定时间范围内对系统均载系数的最大影响程度。

均载函数表达式中的各误差项系数值及其正负反映了各误差使系统偏离完全均载状态($\Omega=1$)的程度和方向。当系数绝对值较大的误差项单独作用时, 系统的均载系数偏离均载状态的程度更大。

由各误差项系数模的大小, 可精确计算各误差项作为因变量在均载计算函数中的权重, 定量分析系统相对于该误差项的敏感程度。

3 误差随机性对系统均载系数的影响

3.1 均载系数函数矩阵

对式(15)中的 3 路均载计算函数 $F_k(E, A, \beta, \gamma, t)$ ($k=1, 2, 3$), 在均载函数周期内按照取定的时间步长对时间变量 t 进行赋值, 将均载系数结果离散化, 得到一个 3 行 n 列矩阵。

的均载系数关于各误差项的计算函数。

3.2 随机变量的概率分布

将制造偏心误差和加工偏心误差及其各自初始相位角看作相互独立的随机变量。其中误差值

(E, A)服从正态分布, 初始相位角(β, γ)服从均匀分布^[10], 即 $E, A \sim N(\mu, \sigma)$, $\beta, \gamma \sim U(0, 2\pi)$ 。设误差值极限偏差为 $\pm F$, 根据 3σ 原则, 取 $\mu=0, \sigma=F/3$ 。

3.3 系统均载系数统计分析

根据蒙特卡洛法^[25], 对随机变量 E, A, β, γ 进行抽样并代入式(16)的矩阵中并求最大值, 即得该次抽样下系统均载系数的估计值。对随机变量进行大量抽样并导入均载系数计算模型进行计算, 统计获得系统均载系数的数值结果。需要说明的是, 合理选取时间步长可以提高抽样模拟速度和精度。

通过对误差值和误差初始相位角单独进行随机抽样模拟和分析, 可获得误差随机性对均载系数的影响规律。

4 算例分析

按照上述方法分析某两级星型齿轮系统的均载特性, 系统基本参数如表 1^[6] 所示。

表 1 星型齿轮系统参数

Table 1 Parameters of star gear system

构件	齿数	模数	输入功率/ kW	输入轴转速/ (r/min)
第 1 级太阳轮	15	1.5	100	40 000
第 1 级星轮	54	1.5		
第 2 级太阳轮	15	1.5		
第 2 级星轮	54	1.5		

第 1 级和第 2 级的等效啮合刚度为 $K_{s1p1}=K_{p2s2}=10^7$ N/m; 第 1 级和第 2 级太阳轮支撑刚度分别为 $K_{s1}=4 \times 10^7$ N/m, $K_{s2}=8 \times 10^7$ N/m; 第 1 级和第 2 级的星轮支承刚度分别为 $K_{p1}=4 \times 10^7$ N/m; $K_{p2}=8 \times 10^7$ N/m。不考虑误差随机性时, 取各项误差的误差值均为 $6 \mu\text{m}$, 误差初始相位角均为 0° 。考虑误差随机性时, 初始相位角服从均匀分布,

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & 120.44A_{p12} - 217.6A_{p11} + 97.15A_{p13} + 783.2A_{p21} - 433.4A_{p22} - 349.7A_{p23} + 381.7A_{s1} + 975.6A_{s2} + \\ & [284.0\sin(3.84 - 4189t) + 636.1\sin(4189t + 0.3491) + 352.0\sin(1.745 - 4189t)]E_{s1} + \\ & [636.1E_{p11} - 352E_{p12} - 284E_{p13}]\sin(1164t - 0.3491) + [2290.0\sin(0.3491 - 323.2t) - \\ & 1023.0\sin(4.538 - 323.2t) - 1267.0\sin(2.443 - 323.2t)]E_{s2} + [2290E_{p21} - 1267E_{p22} - \\ & 1023E_{p23}]\sin(1164t + 0.3491) + [636.1\sin(4189t + 0.3491) + 352.0\sin(0.3491 - 323.2t) + \\ & 284.0\sin(3.84 - 4189t)]E_{bs1} + [636.1E_{bp11} - 352E_{bp12} - 284E_{bp13}]\sin(1164t - 0.3491) + \\ & [2290.0\sin(0.3491 - 323.2t) - 1267.0\sin(2.443 - 323.2t) - 1023.0\sin(4.538 - 323.2t)]E_{bs2} + \\ & [2290E_{bp21} - 1267E_{bp22} - 1023E_{bp23}]\sin(1164t + 0.3491) - 636.1\epsilon_{p11} + 352.0\epsilon_{p12} + 284.0\epsilon_{p13} + 2290.0\epsilon_{p21} + \\ & 1267.0\epsilon_{p22} + 1023.0\epsilon_{p23} + 24.21e_{\theta_{pp1}} - 13.4e_{\theta_{pp2}} - 10.81e_{\theta_{pp3}} + 1.0 \end{aligned}$$

误差值服从正态分布^[9]。

4.1 系统均载系数的计算

由于系统各分支均载函数具有时变性, 在均载系数变化规律未知的情况下, 难以确定各分支均载系数在何时取得最大值, 进而系统的均载系数也具有未知性。

例如, 针对实例对象, 根据系统基本参数及式(1)~式(11)求解系统均载函数, 系统各分支的均载系数随时间的变化情况如图 3 所示。

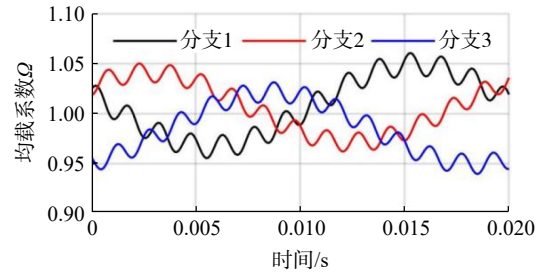


图 3 各分支均载系数曲线

Fig. 3 Load sharing coefficient curve of each branch

若取时间范围在 $[0, 0.01 \text{ s}]$ 内, 则在该时间范围内各分支均载系数的最大值为 $\Omega_1=1.0281$, $\Omega_2=1.0503$, $\Omega_3=1.0018$, 此时系统的均载函数为 $\Omega=1.0503$ 。由图 3 可知, 这显然不是系统均载系数所能取到的最大值, 若以该时段内各分支均载系数最大值作为系统的均载系数, 显然不准确, 也即时间范围的选择可能会导致截断误差的出现。

为确定可以取得各分支均载系数最大值的时间范围, 即均载函数周期, 在上述计算的基础上, 再根据式(14)和式(15), 令所有误差的初始相位角都为 0° , 求得各分支关于时间 t 和各误差项误差值的均载函数如下:

$$\begin{aligned}\Omega_2 = & 93.88A_{p11} - 183.6A_{p12} + 89.68A_{p13} - 338.0A_{p21} + 660.8A_{p22} - 322.8A_{p23} + 790.9A_{s1} + 1\,834.0A_{s2} + \\ & [262.2\sin(3.84 - 4\,189t) + 274.5\sin(4\,189t + 0.349\,1) + 536.7\sin(1.745 - 4\,189t)]E_{s1} + \\ & [274.5E_{p11} - 536.7E_{p12} + 262.2E_{p13}]\sin(0.349\,1 - 1\,164t) + \\ & [943.9\sin(323.2t - 4.538) + 1\,932\sin(323.2t - 2.443) + 988.1\sin(323.2t - 0.349\,1)]E_{s2} + \\ & [1\,932.0E_{p22} - 988.1E_{p21} + 943.9E_{p23}]\sin(1\,164t + 0.349\,1) + \\ & [262.2\sin(3.84 - 4\,189t) - 274.5\sin(4\,189t + 0.349\,1) - 536.7\sin(1.745 - 4\,189t)]E_{bs1} + \\ & [536.7E_{bp12} - 274.5E_{bp11} + 262.2E_{bp13}]\sin(0.349\,1 - 1\,164t) + \\ & [943.9\sin(323.2t - 4.538) + 988.1\sin(323.2t - 0.349\,1) + 1\,932\sin(323.2t - 2.443)]E_{bs2} + \\ & [1\,932E_{bp22} - 988.1E_{bp21} - 943.9E_{bp23}]\sin(1\,164t + 0.349\,1) + \\ & 274.5\varepsilon_{p11} - 536.7\varepsilon_{p12} + 262.2\varepsilon_{p13} + 988.1\varepsilon_{p21} - 1\,932.0\varepsilon_{p22} + 943.9\varepsilon_{p23} - 10.45e_{\theta_{pp1}} + 20.42e_{\theta_{pp2}} - 9.979e_{\theta_{pp3}} + 1.0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_3 = & 123.7A_{p11} + 63.15A_{p12} - 186.8A_{p13} - 445.2A_{p21} - 227.4A_{p22} + 672.6A_{p23} + 409.3A_{s1} - 2\,809.0A_{s2} + \\ & [546.2\sin(3.84 - 4\,189t) - 361.6\sin(4\,189t + 0.349\,1) + 184.7\sin(1.745 - 4\,189t)]E_{s1} + \\ & [361.6E_{p11} - 184.7E_{p12} + 546.2E_{p13}]\sin(1\,164t - 0.349\,1) + \\ & [1\,966\sin(323.2t - 4.538) + 664.7\sin(323.2t - 2.443) + 1\,302E_{bs2}\sin(323.2t - 2.443)]E_{s2} + \\ & [1\,966E_{p23} - 664.7E_{p22} - 1\,302.0E_{p21}]\sin(1\,164t + 0.349\,1) + \\ & [361.6\sin(4\,189t + 0.349\,1) + 184.7\sin(1.745 - 4\,189t) - 546.2\sin(3.84 - 4\,189t)]E_{bs1} + \\ & [184.7E_{bp12} - 361.6E_{bp11} + 546.2E_{bp13}]\sin(0.349\,1 - 1\,164.0t) + \\ & [1\,966.0\sin(4.538 - 323.2t) - 664.7\sin(2.443 - 323.2t) - 1\,302.0\sin(0.349\,1 - 323.2t)]E_{bs2} + \\ & [1\,966E_{bp23} - 1\,302E_{bp21} - 664.7E_{bp22}]\sin(1\,164t + 0.349\,1) + \\ & 361.6\varepsilon_{p11} + 184.7\varepsilon_{p12} - 546.2\varepsilon_{p13} + 1\,302.0\varepsilon_{p21} + 664.7\varepsilon_{p22} - 1\,966.0\varepsilon_{p23} - 13.76e_{\theta_{pp1}} - 7.027e_{\theta_{pp2}} + 20.79e_{\theta_{pp3}} + 1.0\end{aligned}$$

由上述各分支均载系数的函数表达式可知各分支均载函数的变化规律。当各误差项的误差值与初始相位确定时,各分支均载函数是由 3 个频率不同的关于时间 t 的正弦函数与若干常数项叠加而成的函数,由此就可以确定各分支均载函数的周期 T ,各分支均载函数在 T 内取得的均载系数最大值不存在截断误差,是各分支均载系数所能取到的最大值。

在上述各分支均载函数中,有 3 种不同频率的正弦函数,其频率分别为

$$|\omega_1| = 323.3 \quad |\omega_2| = 1\,164.0 \quad |\omega_3| = 4\,189.0$$

由此可求得 3 种正弦函数周期的最小公倍数

为 $T_0=0.54\text{ s}$, T_0 即为各分支完整的载荷循环周期,只要使取定的时间范围 $T_1 \geq T_0$, 带入各项误差值即可最终获得各分支均载系数的最大值为 $\Omega_1=1.060\,9$, $\Omega_2=1.050\,5$, $\Omega_3=1.031\,4$ 此时系统均载系数 $\Omega=1.060\,9$ 。该结果与文献 [6] 中的计算结果 $\Omega=1.061\,9$ 比较,误差为 0.09%。

4.2 误差敏感性分析

针对各构件的制造误差和安装误差,用图示法进行敏感性分析。由于齿轮制造偏心误差的方向随着齿轮的转动而变化,因此当制造误差单独作用时,各分支的均载系数也随之变化,如图 4 所示。而齿轮安装偏心误差的方向不随齿轮转动而改变,所以在齿轮转动过程中,各安装误差单独

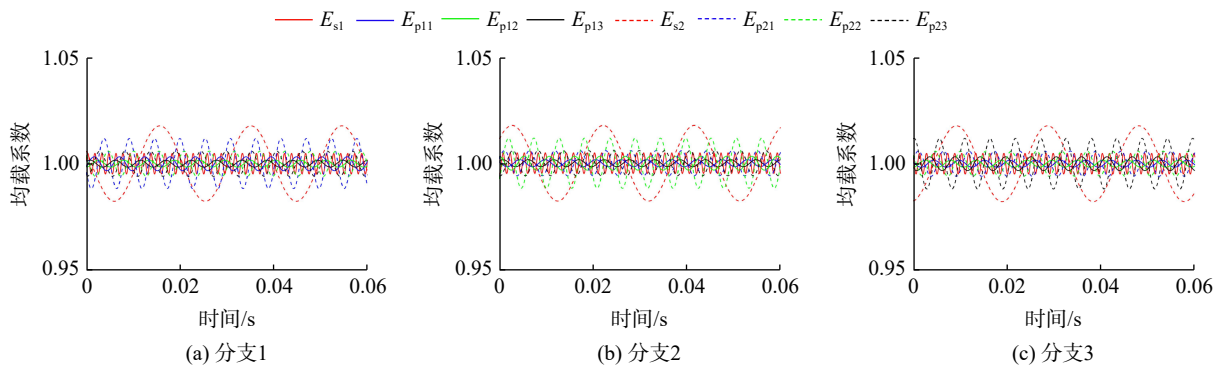


图 4 各制造误差单独作用时各分支均载系数曲线

Fig. 4 Load sharing coefficient curve of each branch when each manufacturing error occurs alone

作用时各分支的均载系数不变, 如图 5 所示。

由图 4、图 5 可知, 对于同一类误差(制造误差或安装误差), 误差值相同时, 第 2 级传动中各构件误差的单独作用对系统均载系数的影响比第 1 级中对应构件的误差单独作用影响更大。

当各齿轮制造误差单独变化时, 各分支均载系数的变化情况如图 6 所示。当各齿轮安装误差单独变化时, 各分支均载系数的变化情况如图 7 所示。

由图 6、图 7 可知, 对于同一类误差(制造误差或安装误差), 第 2 级传动中各构件误差的单独变化对系统均载系数的影响比第 1 级传动中对应构件的误差单独变化影响更大。双联两星轮的安装误差分别单独作用时, 同一分支偏离完全均载状态($\Omega=1$)的方向相反。

再用函数法进行误差敏感性分析。提取各分支均载函数中制造误差项的系数最大值和安装误差项系数进行比较, 结果如图 8 所示。

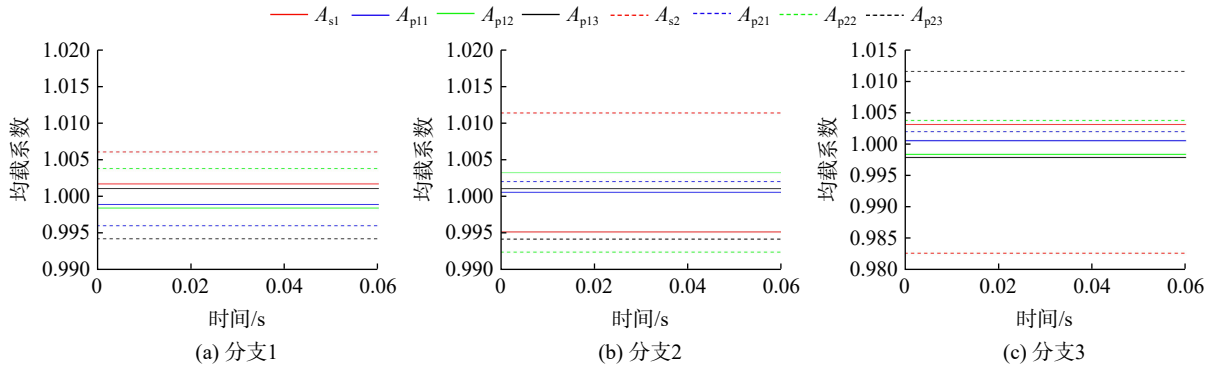


图 5 各安装误差单独作用时各分支均载系数曲线

Fig. 5 Load sharing coefficient curve of each branch when each installation error occurs alone

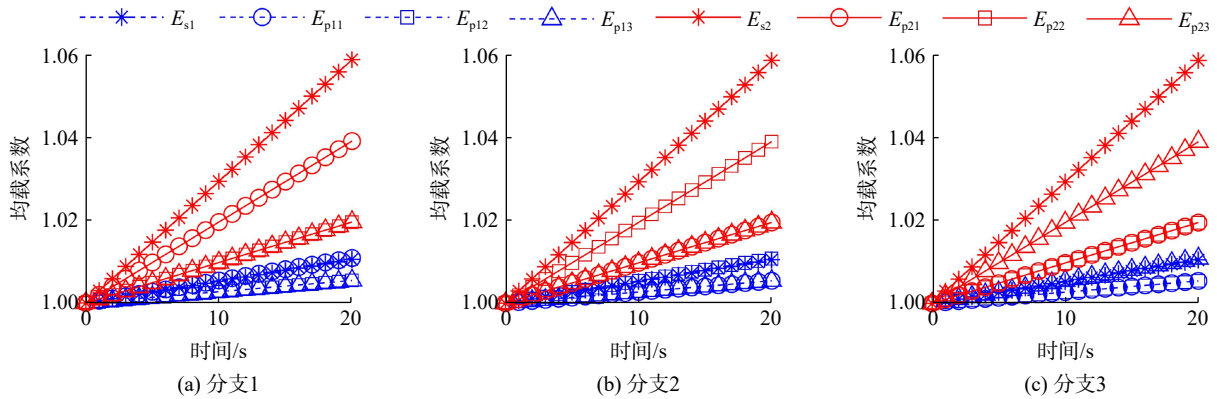


图 6 各制造误差单独变化时各分支均载系数变化

Fig. 6 Load sharing coefficient variation of each branch when each manufacturing error changes alone

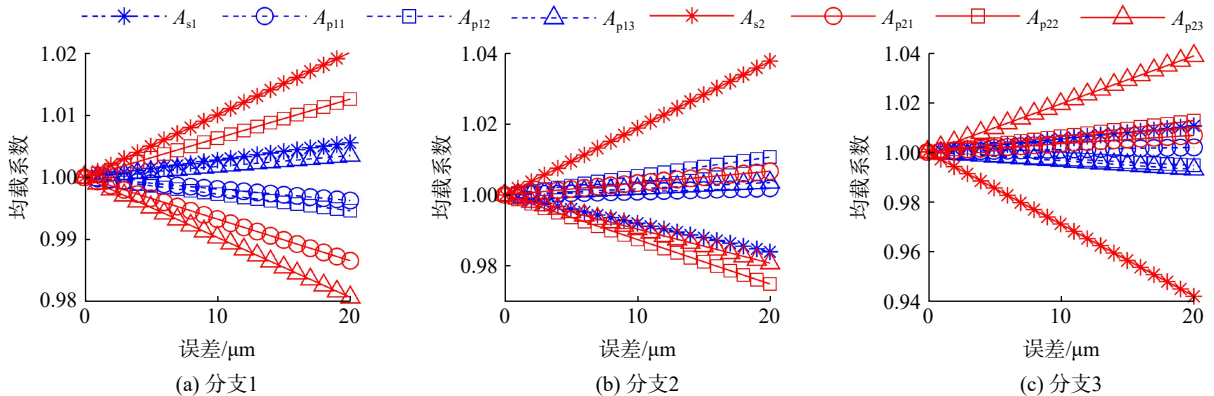


图 7 各安装误差单独变化时各分支均载系数变化

Fig. 7 Load sharing coefficient variation of each branch when each installation error changes alone

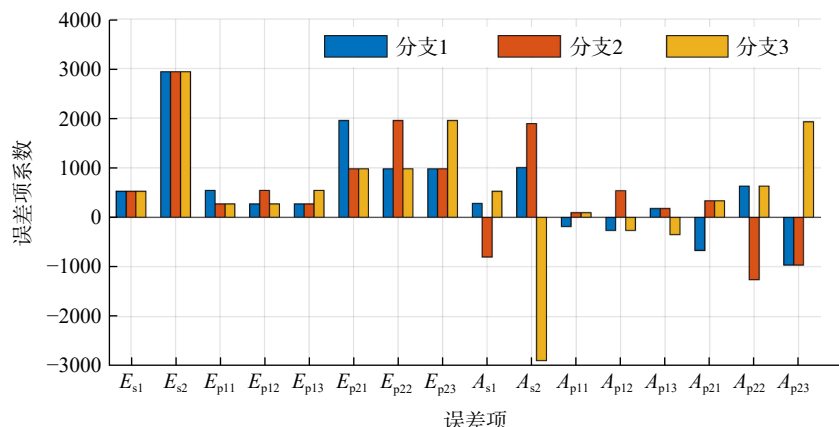


图 8 各分支均载函数误差项系数

Fig. 8 Error factors in the load sharing function of each branch

由图 8 可知各误差项对同一分支均载系数影响程度,其结论与图 4、图 5、图 6、图 7 的图形法结论一致,且由图 8 还可以观察同一误差项对不同分支均载的影响程度,综合可知整个系统的均载系数的误差敏感性,其内容信息较图形法更加全面且更简洁直观。

根据文中第 4.1 节的计算已知分支 1 的均载系数最大值即为系统均载系数,则分支 1 的均载系数误差敏感性可以作为整个系统的均载系数误差敏感性,由图 8 可知各误差项对系统均载系数的影响大小顺序为 $E_{s2} > E_{p2} > A_{p2} > A_{s2} > E_{p1} > A_{p1} > E_{s1} > A_{s1}$ 。

4.3 考虑误差随机性的均载系数计算

根据文中第 4.1 节计算得到的系统均载函数周期 $T_0 = 5 \times 10^{-3}$ s,取时间步长 $d = 0.001$ s。将各分支随时间连续变化的均载系数离散化,根据式(16)可知,将得到一个 3×540 的矩阵作为统计分析数学模型。 $\beta, \gamma \sim U(0, 2\pi)$,取极限误差值 $F = \pm 6 \mu\text{m}$,根据 3σ 原则,取 $\mu = 0, \sigma = F/3 = 2 \mu\text{m}$,则 $E, A \sim N(0, 2)$ 。对 E, A, β, γ 随机抽样 50 000 次,并对计算获得的均载系数的估计值进行统计,结果如图 9 所示。

由图 9 可知,系统均载系数的数学期望值为 1.022 3,最小值为 1.004 6,最大值为 1.067 6,置信区间 $[1.022 2, 1.022 4]$,置信度为 99.73%。运用蒙特卡洛法得到的系统均载系数的数学期望比取极限偏差时系统的均载系数要小 0.037 6,这是因为各项误差的误差值在极限偏差内随机产生时,各项误差值全部取得极限偏差值的概率极低,且各误差初始相位的随机性会使得误差之间相互耦合进而产生叠加或抵消的关系,从而使得期望值要小于极限工况时系统的均载系数。

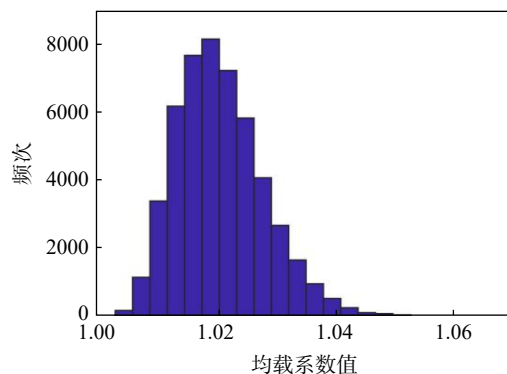


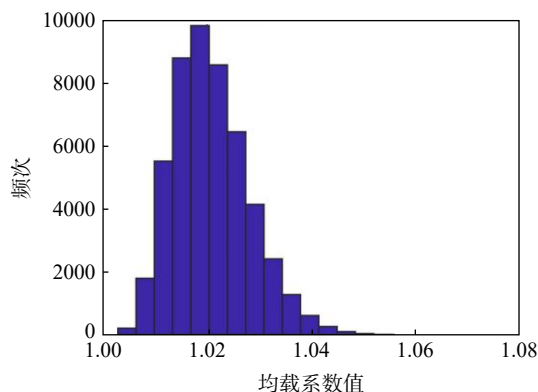
图 9 考虑随机误差性时系统均载系数分布

Fig. 9 Load sharing coefficient distribution when considering error randomness

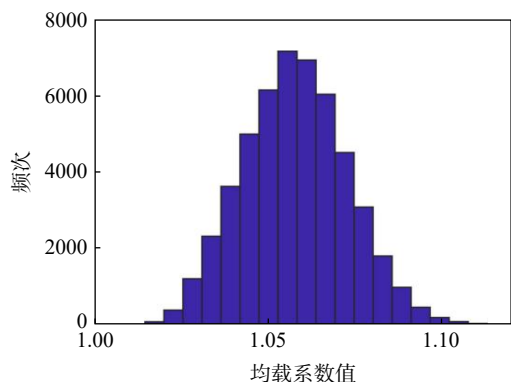
分别分析误差值和误差初始相位的随机性对系统均载系数的影响。令各项误差的误差值服从正态分布,其初始相位角取定且都为零,对 E, A 随机抽样 50 000 次,系统均载系数统计结果如图 10(a)所示;令各项误差的误差值取最大极限偏差,其初始相位角服从均匀分布,对 β, γ 随机抽样 50 000 次,结果如图 10(b)所示。

图 10(a)中,系统均载系数的数学期望值为 1.020 8,最小值为 1.002 9,最大值为 1.072 8,置信区间为 $[1.020 7, 1.020 9]$,置信度为 99.73%;图 10(b)中,系统均载系数的数学期望值为 1.057 5,最小值为 1.010 5,最大值为 1.120 4,置信区间为 $[1.057 3, 1.057 7]$,置信率为 99.73%。

对比图 9 和图 10(a),当误差值随机时,初始相位随机与初始相位给定相比系统均载系数期望值大 0.001 3;对比图 9 和图 10(b),当初始相位随机时,误差值随机与误差值取极限偏差相比系统的均载系数期望值要小 0.035 6。这表明,误差值的随机性对系统均载系数的影响比误差初始相位



(a) 误差值服从正态分布, 初始相位角全部为零



(b) 初始相位服从均匀分布, 误差值取极限偏差

图 10 单独考虑误差值和初始相位的随机性时系统均载系数分布

Fig. 10 Load sharing coefficient distribution when considering the random effects of error value and initial phase separately

的随机性影响更大。

5 结 论

1) 考虑系统功率流动闭环特征, 提出基于函数法的静力学均载特性分析方法, 解决了传统方法计算均载系数可能存在截断误差的问题, 计算结果更接近实际情况;

2) 采用同一算例与图形法进行对比分析, 验证了函数法的正确性, 且兼具简洁直观、信息全面的优势;

3) 基于函数法分析误差随机性对系统均载特性的影响, 发现这一影响不可忽略, 且误差值的随机性对系统均载的影响较初始相位的随机性更大;

4) 本方法可推广应用于其他功率分、汇流齿轮传动系统的均载特性分析。

参考文献:

[1] 日高照晃, 山本信行, 石田武. 行星齿轮装置均载机构中的各种误差和载荷分配的关系[C]//日本机械学会论文集. 东京:

日本机械学会, 1986: 2200-2206.

HIDAKA T, SUGIMOTO N, ISHIDA T. Effects of errors of elements on load distribution in planetary gears with various load equalizing mechanisms[C]// Japanese Mechanical Academic Society Collection. Tokyo: The Japanese Society of Mechanical Engineers, 1986: 2200-2206. (in Japanese)

[2] KAHRAMAN A. Load sharing characteristics of planetary transmissions[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(8): 1151-1165.

[3] KAHRAMAN A. Static load sharing characteristics of transmission planetary gear sets: model and experiment: SAE Paper 1999-01-1050[R]. Detroit: Society of Automotive Engineers, 1999.

[4] BODAS A, KAHRAMAN A. Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behavior of planetary gear sets[J]. *JSME International Journal Series C*, 2004, 47(3): 908-915.

[5] KRANTZ T. A method to analyze and optimize the load sharing of split path transmissions: NASA TM-107201 [R]. Cleveland: NASA Lewis Research Center, 1996.

[6] KRANTZ T, DELGADO I. Experimental study of split-path transmission load sharing NASA TM-107212 [R]. Cleveland: NASA Lewis Research Center, 1996.

[7] 肖铁英, 袁盛治, 陆卫杰. 行星齿轮机构均载系数的计算方法[J]. 东北重型机械学院学报, 1992, 16(4): 290-295.

XIAO Tiejing, YUAN Shengzhi, LU Weijie. Calculative method of load balance coefficient in planetary gear[J]. *Journal of Northeast Heavy Machinery Institute*, 1992, 16(4): 290-295. (in Chinese)

[8] 陆俊华, 李斌, 朱如鹏. 行星齿轮传动静力学均载分析[J]. *机械科学与技术*, 2005, 24(6): 702-704, 709.

LU Junhua, LI Bin, ZHU Rupeng. Analysis of static load sharing in planetary gearing[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2005, 24(6): 702-704, 709. (in Chinese)

[9] 周惠琴, 李素有, 吴立言. 行星齿轮传动系统均载分析[J]. *机械科学与技术*, 2008, 27(9): 1239-1242.

ZHOU Huiqin, LI Suyou, WU Liyan. Analysis of static load sharing in a planetary gearing[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2008, 27(9): 1239-1242. (in Chinese)

[10] 邵晓荣. 齿轮制造及安装误差对行星齿轮均载系数的影响[J]. 东北重型机械学院学报, 1994, 18(4): 306-309.

SHAO Xiaorong. Influence of gear manufacturing and installation errors on load sharing coefficient of planetary gears[J]. *Journal of Northeast Heavy Machinery Institute*, 1994, 18(4): 306-309. (in Chinese)

[11] 袁擎宇, 朱如鹏, 朱自冰, 等. 两级星型齿轮传动静力学均载分析[J]. *机械科学与技术*, 2004, 23(7): 789-792.

YUAN Qingyu, ZHU Rupeng, ZHU Zibing, et al. Analysis of static load sharing in a 2-stage star gearing system[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2004, 23(7): 789-792. (in Chinese)

[12] 袁擎宇. 星型齿轮传动系统均载分析方法的研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2004.

YUAN Qingyu. Research on the load sharing analysis method of star gear transmission system[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2004. (in Chinese)

[13] 杜进辅, 方宗德, 王宝宾, 等. 基于变形协调的行星轮系均载特性研究[J]. 航空动力学报, 2012, 27(5): 1166-1171.

DU Jinfu, FANG Zongde, WANG Baobin, et al. Study on load sharing behavior of planetary gear train based on deformation compatibility[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(5): 1166-1171. (in Chinese)

- [14] DU Jinfu, MAO Jin, LIU Kai, et al. Load-sharing analysis of two-stage three-branch star gearing based on deformation compatibility[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2018, 10(12): 168781401881954.
- [15] 孙振宇, 冯金, 杜进辅. 基于变形协调的恒星式减速器功率分流特性[J]. *机械传动*, 2016, 40(4): 48-51, 57.
SUN Zhenyu, FENG Jin, DU Jinfu. Power splitting characteristic of star gearing based on deformation compatibility[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2016, 40(4): 48-51, 57. (in Chinese)
- [16] 董皓, 方宗德, 王宝宾, 等. 基于变形协调和间隙浮动的双路功率分流系统均载特性分析[J]. *航空动力学报*, 2013, 28(4): 872-877.
DONG Hao, FANG Zongde, WANG Baobin, et al. Load sharing characteristics analysis of power split system based on deflection compatibility and clearance floating[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(4): 872-877. (in Chinese)
- [17] MO Shuai, MA Shuai, JIN Guoguang, et al. Research on multiple-split load sharing characteristics of 2-stage external meshing star gear system in consideration of displacement compatibility[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017(1): 1037479.
- [18] MO Shuai, ZHANG Yidu, WU Qiong. Research on multiple-split load sharing of two-stage star gearing system in consideration of displacement compatibility[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 88: 1-15.
- [19] 莫帅, 张以都, 吴琼, 等. 考虑齿轮位移协调的 2 级星形传动多分流均载研究[J]. *四川大学学报 (工程科学版)*, 2015, 47(4): 175-180.
MO Shuai, ZHANG Yidu, WU Qiong, et al. Study on multiple-split load sharing of 2-stage star gearing system based on gears displacement compatibility[J]. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2015, 47(4): 175-180. (in Chinese)
- [20] 李志宾, 王三民, 李飞, 等. 误差对同轴六分支分扭人字齿轮传动系统静均载性能影响[J]. *航空动力学报*, 2021, 36(8): 1765-1775.
LI Zhibin, WANG Sanmin, LI Fei, et al. Influence of error on static load-sharing performance of coaxial six-branch twist herringbone gear transmission system[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(8): 1765-1775. (in Chinese)
- [21] 靳广虎, 任薇, 朱如鹏. 扭转刚度对功率分流传动系统均载特性的影响[J]. *航空动力学报*, 2019, 34(11): 2478-2489.
JIN Guanghu, REN Wei, ZHU Rupeng. Influence of torsional stiffness on load sharing characteristics of power split transmission system[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(11): 2478-2489. (in Chinese)
- [22] 靳广虎, 高鹏, 周镇宇, 等. 两次载荷分流齿轮传动构型的静力学均载特性[J]. *航空动力学报*, 2020, 35(10): 2104-2114.
JIN Guanghu, GAO Peng, ZHOU Zhenyu, et al. Static load sharing characteristic of twice load split gear transmission configuration[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2020, 35(10): 2104-2114. (in Chinese)
- [23] 王朝兵, 陈小安, 陈宏, 等. 误差随机性对行星齿轮系传动精度的影响特性[J]. *重庆大学学报*, 2012, 35(9): 41-47.
WANG Chaobing, CHEN Xiaolan, CHEN Hong, et al. Influence of error's randomness on transmission accuracy of planetary gear[J]. *Journal of Chongqing University*, 2012, 35(9): 41-47. (in Chinese)
- [24] 范伶松, 任爱华, 孙章栋, 等. 考虑随机制造误差的差减速器齿轮副振动特性分析[J]. *机械传动*, 2021, 45(11): 134-138, 171.
FAN Lingsong, REN Aihua, SUN Zhangdong, et al. Vibration characteristic analysis of differential reducer gear pair considering random manufacturing error[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(11): 134-138, 171. (in Chinese)
- [25] 朱陆陆. 蒙特卡洛方法及应用[D]. 武汉: 华中师范大学, 2014.
ZHU Lulu. The Monte Carlo method and application[D]. Wuhan: Central China Normal University, 2014. (in Chinese)

(编辑: 张 雪)