

文章编号: 1000-8055(2024)11-20220876-09

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20220876

纤维增强截顶圆锥壳固有特性计算及分析

许 卓^{1,3}, 许沛尧¹, 郑利胜², 李 晖^{3,4}, 李 鹤^{3,4}, 顾大卫^{4,5},
何明阳¹, 韩清凯^{3,4}, 闻邦椿^{3,4}

(1. 东北电力大学 机械工程学院, 吉林 132011;

2. 温州市工业科学研究院, 浙江 温州 325028;

3. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819;

4. 东北大学 航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 沈阳 110819;

5. 浙江工业大学 机械工程学院, 杭州 310014)

摘 要: 以理论与实践相结合的方式分析了纤维增强截顶圆锥壳的固有特性。针对纤维增强复合圆锥壳的结构特性引入半锥角系数, 考虑复合结构各向异性的影响, 基于经典层合理论对其进行了理论建模; 利用 Rayleigh-Ritz 法和正交多项式法求解了结构的固有特性。通过搭建相应的实验系统, 以 TC300/环氧树脂复合圆锥壳为研究对象进行测试, 结果表明: 该方法所获得固有频率的结果与试验测试结果间的误差在 1.4%~2.3% 之间, 进而验证了所提出模型的正确性。最后, 讨论了半锥角大小、不同约束方式和不同纤维铺层角度等参数对结构固有特性的影响规律。

关 键 词: 纤维增强复合结构; 截顶圆锥壳; 固有特性; Rayleigh-Ritz 法; 正交多项式

中图分类号: V214.3⁺3

文献标志码: A

Natural characteristics calculation and analysis of fiber reinforced truncated conical shell

XU Zhuo^{1,3}, XU Peiyao¹, ZHENG Lisheng², LI Hui^{3,4}, LI He^{3,4}, GU Dawei^{4,5},
HE Mingyang¹, HAN Qingkai^{3,4}, WEN Bangchun^{3,4}

(1. School of Mechanical Engineering, Northeast Electric Power University, Jilin 132011, China;

2. Wenzhou Institute of Industry and Science, Wenzhou Zhejiang 325028, China;

3. School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110819, China;

4. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System Ministry of Education,
Northeastern University, Shenyang 110819, China;

5. School of Mechanical Engineering,
Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: The natural characteristics of composite conical shells were calculated and verified by combining theory and experiment. Based on the classical lamination theory and considering the influence of anisotropy of composite structures, the theoretical model was established by introducing half-cone angle

收稿日期: 2022-11-16

基金项目: 东北电力大学博士科研启动基金(BSJXM-2020221); 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室研究基金(VCAME202204)

作者简介: 许卓(1986—), 男, 讲师, 博士, 主要从事复合结构减振降噪研究。E-mail: zhuo0816@163.com

通信作者: 李晖(1982—), 男, 副教授, 博士, 主要从事复合结构减振降噪研究。E-mail: lh200300206@163.com

引用格式: 许卓, 许沛尧, 郑利胜, 等. 纤维增强截顶圆锥壳固有特性计算及分析[J]. 航空动力学报, 2024, 39(11): 20220876. XU Zhuo, XU Peiyao, ZHENG Lisheng, et al. Natural characteristics calculation and analysis of fiber reinforced truncated conical shell[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(11): 20220876.

coefficients. Then, the natural characteristics of the structures were obtained by utilizing the Rayleigh-Ritz method and orthogonal polynomial method. A natural characteristic experiment system of TC300/epoxy resin composite conical shell was established and the natural characteristics were acquired. The results showed that the error between the calculated and test results was between 1.4% and 2.3%, which further verified the correctness of the proposed model. Finally, the influences of different parameters, such as the half cone angle, the boundary conditions and the fiber ply angles, on the natural characteristics of the structure were discussed.

Keywords: fiber reinforced composite structures; truncated conical shell; natural characteristics; Rayleigh-Ritz; orthogonal polynomial

纤维增强复合材料由于其具有比模量、比强度高、质量轻、加工工艺性好等诸多优点,由其加工的复合梁、板、壳等结构被广泛应用于汽车化工、航空航天等高科技工业领域中^[1-3]。由于使用结构越来越复杂,工作环境越来越恶劣,因此引起的一系列振动问题(如结构的振动超标,振动疲劳破坏等)也越发严重^[4-5]。因此对于薄壁复合结构振动特性的研究,也越来越受到研究学者们的广泛关注。

固有特性的研究包括固有频率和模态振型两个部分,他们是振动特性研究的基础。目前,壳结构的广泛工程应用,引起了国内外研究人员对该结构进行研究的极大兴趣,并发展了许多研究其固有特性的方法,并取得了阶段性的成果。其中,张德众等^[6-7]基于经典层合理论,利用半有限元分析的方法,对于叠层复合薄壳进行了自由振动的分析。Tong^[8]基于 Donnell 型方程,求解了拉弯耦合的复合锥壳的固有特性。朱显明等^[9]基于 Donnell 壳体理论及幂指数求解的方法,通过在金属圆柱壳模型中引入半锥角的方法,求解了金属圆锥壳的振动特性。Liang 等^[10]基于 4 阶龙格-库塔法推导理论方程,从理论上探讨了利用传递矩阵法结合振动理论进行分析壳体固有特性的可行性。Tripathi 等^[11]基于高阶剪切变形理论,求解了不同层压方案和厚径比下简支复合圆锥壳线性自由振动响应及固有特性,并通过文献及独立的蒙特卡罗模拟加以验证。Qu 等^[12]基于 1 阶剪切变形理论,采用改进的变分原理和多段划分技术推导了具有不同几何参数和材料参数的层合圆柱壳、圆锥壳和球壳的自由振动方程,并求解了固有特性。Viola 等^[13]基于二维高阶剪切变形理论及微分求积法,对中厚层双曲壳的二维自由振动进行求解,并获得其固有特性。瞿叶高等^[14]基于傅里叶级数以及 Chebyshev 多项式对层合壳

的位移表达式进行多项式的展开,通过半解析区域分解的方法对复合圆柱壳的自由振动进行求解与分析。Xie 等^[15]基于 1 阶剪切变形理论以及 Haar 小波离散化方法,对复合圆锥壳,圆柱壳和环形板结构固有特性进行求解。Su 等^[16]基于 1 阶剪切变形理论,推导了功能梯度圆锥壳、圆柱壳和环形板的幂级数方程,并求解了相应结构的固有特性。Dey 等^[17]采用概率有限元的方法,对纤维圆锥壳在纤维取向角和材料特性随机变化下的固有频率进行了统计分析。宋旭圆^[18]基于 Rayleigh-Ritz 法,对复合薄壁圆柱壳的固有特性进行求解。周正学等^[19]利用能量法,求解了纤维增强圆柱壳的固有特性,并进行了实验验证。Zhang 等^[20]基于简化板理论(SPT)和二维改进的 Fourier-Ritz 方法,进行了环扇型板、圆扇形板、环形板的理论建模,并对结构的振动特性进行了分析。Safarpour 等^[21]基于弹性理论,利用微分求积法和状态空间技术,提出了一种求解功能梯度圆柱壳、圆锥壳和圆环板振动特性的半解析方法。Sobhani 等^[22]通过 1 阶剪切变形理论和哈密尔顿原理,利用等效计算的方法对碳纳米管表层与石墨烯芯层的三明治结构的固有特性进行了分析。Niu 等^[23]通过 1 阶剪切变形理论(FSDT)结合 Chebyshev-Ritz 方法,研究了石墨烯板(GPL)增强复合材料锥形板和圆柱板在横向激励下的线性和非线性振动,并求解了固有特性。田宏业等^[24]基于 1 阶剪切变形理论构建了理论分析模型,并以不同类型弹簧模拟圆锥板结构的边界和连续性条件,分析了功能梯度锥型板的自由振动特性。夏鑫^[25]基于 Viot-Reuss 原理和传递矩阵法对硬涂层阻尼薄壁截锥壳的固有特性进行研究,并通过有限元和文献比较的方法进行了验证。

从所掌握的文献研究内容可发现,目前对于壳类结构固有特性的研究,主要集中在各向同性

材料以及功能梯度三明治所制成的圆柱壳上,而对于各向异性的纤维增强截顶圆锥壳结构固有特性的研究内容相对较少,且大都没有进行实验研究。纤维增强截顶圆锥壳所用材料存在各向异性的特点,同时由于半锥角的存在,使得其本构关系更加复杂,这使得准确预测其固有特性更加的困难。因此,本文以纤维增强截顶圆锥壳为研究对象,基于经典层合理论,考虑铺层角度和半锥角的影响建立了理论模型,并利用正交多项式法求解;通过搭建相应的实验系统和有限元仿真,对所提出方法进行了验证;最后,对不同结构参数对其固有特性的影响进行了讨论。此外,该方法具有原理清晰、适用性广、计算速度快等优点,可为工程实践中相应结构的固有特性预测提供指导和参考。

1 纤维增强截顶圆锥壳固有特性的理论求解

本节中,以纤维增强截顶圆锥壳为研究对象,基于经典层合理论并考虑铺层角度和半锥角的影响建立了理论模型,最后利用正交多项式法进行求解。求解过程中,通过改变半锥角的大小和正交多项式系数,可以快速求解圆柱壳、圆锥壳和圆环板在悬臂、固支和简支边界条件下的固有特性。

1.1 理论建模

本文所研究的纤维增强截顶圆锥壳由 N 层正交各向异性复合材料交替铺设而成,通过半锥角变换原理建立理论模型图 1 所示。图中,以其中面为参考平面,截顶圆锥壳大径端为 R_1 ,小径端为 R_2 ,母线长为 L ,壳体厚为 h ,每一层位于 z 轴较

低平面 h_{k-1} 与 h_k 之间,厚度均匀。1 代表平行纤维方向,2 代表垂直纤维方向。设 1-2 平面内的剪切弹性模量为 G_{12} ,1 方向的弹性模量为 E_1 ,2 方向的弹性模量为 E_2 ,1 方向所引起的 1-2 平面的应变泊松比为 μ_1 ,2 方向所引起的 1-2 平面的应变泊松比为 μ_2 。

根据经典壳体理论,将复合材料截顶圆锥壳面位移分量方程写成如下形式^[1-2]:

$$\begin{cases} u(x, \theta, t) = \sin(\omega t) \cos(n\theta) U(x) \\ v(x, \theta, t) = \sin(\omega t) \sin(n\theta) V(x) \\ w(x, \theta, t) = \sin(\omega t) \cos(n\theta) W(x) \end{cases} \quad (1)$$

式中 u 、 v 、 w 代表截顶圆锥壳任意一点的位移; n 为截顶圆锥壳的周向波数, ω 为复合材料截顶圆锥壳的固有频率, U 为 x 方向上的振型函数, V 为 θ 方向的振型函数, W 为 z 方向上的振型函数。

对于正交各向异性材料,其应力应变的关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2} & Q_{12} &= \frac{\mu_1 E_2}{1-\mu_1\mu_2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2} & Q_{66} &= G_{12} & \mu_2 &= \mu_1 \frac{E_2}{E_1} \end{aligned}$$

当材料与主轴方向有一定的夹角时,第 k 层平面的应力应变关系在其夹角 β 下的关系为^[1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

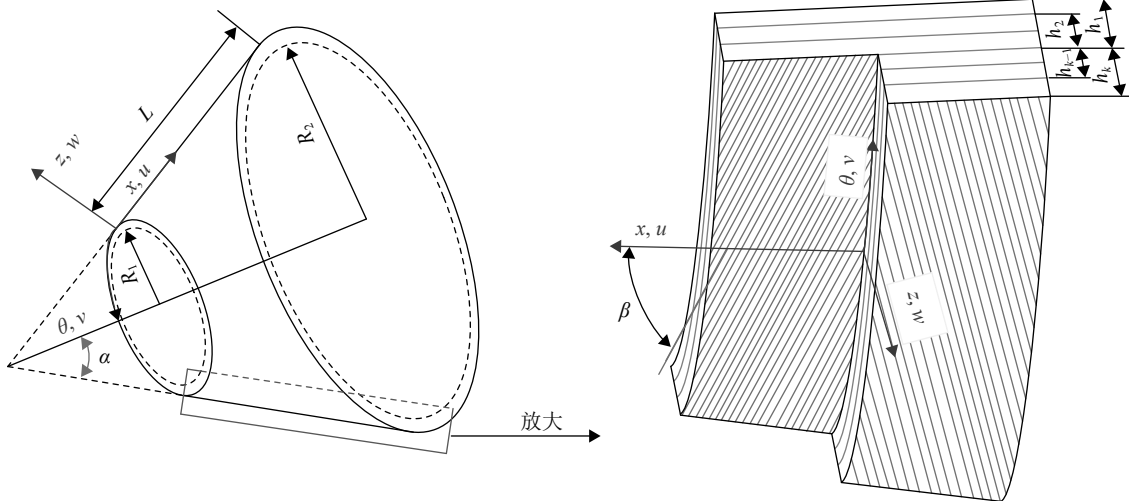


图 1 纤维增强截顶圆锥壳理论模型

Fig. 1 Theoretical model of fiber reinforced truncated conical shell

其中

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\beta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\beta_k\cos^2\beta_k + Q_{22}\sin^4\beta_k; \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\beta_k\cos^2\beta_k + Q_{12}(\sin^4\beta_k + \cos^4\beta_k); \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\beta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\beta_k\cos^2\beta_k + Q_{22}\cos^4\beta_k; \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\beta_k\cos^3\beta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\beta_k\cos\beta_k; \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\beta_k\cos\beta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\beta_k\cos^3\beta_k; \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\beta_k\cos^2\beta_k + Q_{66}(\sin^4\beta_k + \cos^4\beta_k)。\end{aligned}$$

根据 love 壳体理论, 以及圆柱壳的半锥角变换原理, 得到应力应变公式^[6]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{x \cdot \sin \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \alpha - w \cos \alpha \right);$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x} + \frac{1}{x \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (4)$$

$$k_\theta = -\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{x^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2};$$

$$k_{x\theta} = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right);$$

其中 α 为截顶圆锥壳半锥角。通过调整半锥角的数值, 可将圆锥壳转化为圆柱壳 ($\alpha=0^\circ$) 和圆环板 ($\alpha=90^\circ$)。

应用动能公式时应采用薄壳动能公式:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta dx \quad (5)$$

弹性体在力的作用下会发生变形, 从而内部产生应力以及应变, 会有一定的变形势能, 根据板壳振动理论假设, 截顶圆锥壳的应变能公式为^[1]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon} R d\theta \times d\theta \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变向量, 其表达形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{x\theta}, k_x, k_\theta, k_{x\theta}] \quad (7)$$

对于复合材料截顶圆锥壳结构, 薄膜刚度矩阵 $\mathbf{S}$ 定义如下^[1,3]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k - h_{k+1}) \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^2 - h_{k+1}^2) \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^3 - h_{k+1}^3) \end{cases}$$

式中复合材料截顶圆锥壳上下参考表面距离为 h_k 以及 h_{k+1} 。

最后, 将位移分量方程式(1)以及应力应变公式(式(3))带入薄壳动能公式(式(5))和应变能公式(式(6))中, 可以得到复合材料截顶圆锥壳的动能表达式以及应变能表达式。

1.2 Rayleigh-Ritz 法求解

本文采用 Rayleigh-Ritz 方法进行求解。其中, 中面位移可以表现为如下形式^[3]:

$$\begin{cases} U(x) = \sum_{M=1}^{N_T} a_M \psi^u \left(\frac{x}{R} \right) \\ V(x) = \sum_{M=1}^{N_T} b_M \psi^v \left(\frac{x}{R} \right) \\ W(x) = \sum_{M=1}^{N_T} c_M \psi^w \left(\frac{x}{R} \right) \end{cases} \quad (9)$$

其中 a_M 、 b_M 、 c_M 代表系数; ψ^u 、 ψ^v 和 ψ^w 是满足边界条件与力学边界条件正交函数, N_T 为通过 Ritz 方法的截断系数, 圆锥等效半径 $R=(R_1+R_2)/2$ 。

在本文中, 对边界条件多项式进行正交化处理, 从而获得一系列正交多项式为^[3]

$$\begin{aligned}\psi_1^p(\xi) &= \phi(\xi) \\ \psi_2^p(\xi) &= (\xi - B_2) \psi_1^p(\xi) \\ \psi_k^p(\xi) &= (\xi - B_k) \psi_{k-1}^p(\xi) - C_k \psi_{k-2}^p(\xi) \\ p &= u, v, w \quad k > 2\end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\phi(\xi) = \xi^p (1-\xi)^q$, p 、 q 分别代表 $R=R_1$ 、 $R=R_2$ 处边界状态参数, p 、 q 取值在自由、简支和固定时分别取 0, 1, 2^[26]。

取 $\xi=x/L$, 系数函数 B_k 和 C_k 表达式为

$$B_k = \frac{\int_0^1 [\psi_{k-1}^p(\xi)]^2 \xi d\xi}{\int_0^1 [\psi_{k-1}^p(\xi)]^2 d\xi} \quad (11)$$
$$C_k = \frac{\int_0^1 \psi_{k-1}^p(\xi) \psi_{k-2}^p(\xi) \xi d\xi}{\int_0^1 [\psi_{k-2}^p(\xi)]^2 d\xi}$$

将式(11)带入式(10)后, 带入能量函数表达式 L 进行运算

$$L = T^{\max} - U^{\max} \quad (12)$$

在求解截顶圆锥壳固有频率问题时, 要求解使所有的能量函数求解最小值的待定参数

$$\frac{\partial L}{\partial a_M} = \frac{\partial L}{\partial b_M} = \frac{\partial L}{\partial c_M} = 0 \quad (13)$$

将式(11)带入式(12)之后, 可以得到下列的求解特征值问题, 公式如下:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (14)$$

其中 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为结构系统的刚度矩阵和质量矩阵, 特征向量 $\mathbf{q} = [a_M \ b_M \ c_M]^T$ 。

为了保证方程有解, 令系数行列式为 0

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (15)$$

综上所述, 可以通过求解公式(14)的特征值来获得模态的固有频率值, 重复以上的步骤可以依次获得各阶模态的频率值。

2 实验验证

为了验证所提出模型的正确性, 本节以 TC300 碳纤维/环氧树脂基复合截锥壳为研究对象, 对其进行实验测试, 实验件参数如下: $R_1=0.15 \text{ m}$, $R_2=0.3 \text{ m}$, $L/\sin \alpha=0.3 \text{ m}$, $h=0.03 \text{ m}$, $E_1=120 \text{ GPa}$, $E_2=7.9 \text{ GPa}$, $G_{12}=3.36 \text{ GPa}$, $\mu_1=\mu_2=0.3$, $\rho=1570 \text{ kg/m}^3$, 铺设方式为对称正交铺设, 即 $[+45^\circ/-45^\circ]_s$, 共有 24 层, 固定方式为大半径端固定, 并且每一层具有相同的厚度和纤维体积分数。

搭建的测试系统如图 2 所示的测试系统, 实

验采用单点激励单点响应的方式, 为了验证测试结果, 在间隔 90° 位置设置两个加速度传感器进行信号采集, 两传感器以及测试点位置均在图 2 中标出。测试前, 设置频率分辨率为 0.39 Hz , 加窗方式为 Hanning 窗。

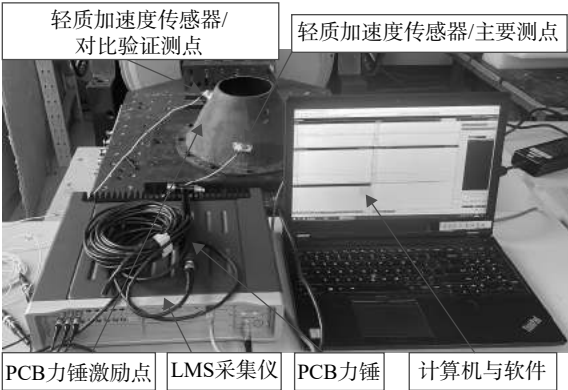


图 2 薄壳的固有特性测试系统

Fig. 2 Test system for inherent properties of thin shells

测试时, 使用 PCB086C01 模态力锤在激励点进行 3 次有效激励, 同时使用 LMS 16 通道声-振分析仪对信号进行采集, 最后通过安装有 LMS Test.lab 14A 分析软件的计算机进行存储和分析, 即可获得结构的前 3 阶固有频率-振幅变化曲线如图 3 所示。所获得的测试固有频率结果 A 如表 1 所示, 为方便比较, 将通过 Matlab 计算的频

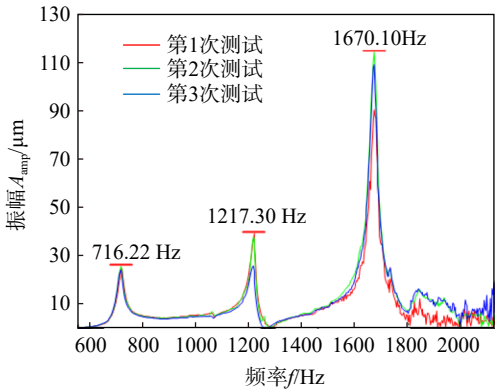


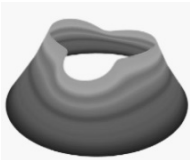
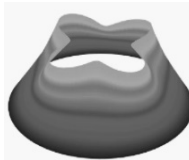
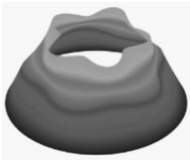
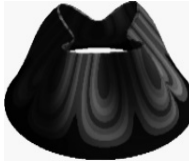
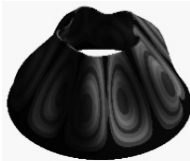
图 3 频率-振幅关系曲线

Fig. 3 Frequency-amplitude curve

表 1 计算和测试获得的纤维增强截顶圆锥壳的前 3 阶固有频率和模态振型

Table 1 Calculation and testing of the first seventh-order intrinsic frequencies and modal shapes of thin fiber-metal composite shells obtained

参数		模态阶次		
		1	2	3
频率/Hz	实验频率 A	716.22	1 217.30	1 670.10
	Matlab 计算频率 B	705.23	1 246.16	1 645.50
	Ansys 计算频率 C	726.28	1 157.70	1 756.90

续表				
参数		模态阶次		
		1	2	3
误差/%	$ A-B /B$	1.5	2.3	1.4
	$ A-C /C$	1.3	5.1	4.9
	$ B-C /B$	2.9	7.1	6.7
振型图	Matlab			
	Ansys			

率 B 及 Ansys 软件计算的频率 C 和振型以及计算误差一并列入表 1 中。

通过对计算与实验结果的对比可知, 本文所提出纤维增强截顶圆锥壳前 3 阶固有频率的计算结果与实验获得结果间的误差为 1.4%~2.3%, 属于误差允许范围内, 且 Matlab 和 Ansys 模态振型的振动形态及其变化趋势也完全一致, 进而验证了理论分析方法的正确性。

3 不同参数对结构固有特性的影响

本节中, 为了研究不同参数对结构固有特性的影响规律, 分别讨论了半锥角、约束位置和铺层方式对结构固有特性的影响。本节中模型所使用的材料参数与文中第 2.1 节实验测试参数相同。此外为了对比验证, 将 Matlab 计算结果用 $A_i(i=1, 2, 3, 4)$ 来表示, Ansys 计算结果

用 $B_i(i=1, 2, 3, 4)$ 来表示, 并计算了两种计算方法间的误差。

3.1 半锥角对固有特性的影响

如图 4 所示, 当截顶圆锥壳的半锥角 α 为 0° 和 90° 时, 结构可变化为圆柱壳和圆环板, 因此本节将分别讨论结构在半锥角分别为 0° 、 30° 、 60° 和 90° 时结构固有特性的变化规律, 其中, 固定方式为大半径端固定, 计算获得的固有频率计算结果如表 2 所示。

从表 2 可以看出, 随着半锥角的增大, 结构的固有频率在逐渐降低, 这是由于当小半径 R_1 和母线 L 的大小不变时, 随着半锥角的增大, 结构的质量逐渐减小而引起的。此外, 从表 2 中还可以发现, 各阶固有频率在变化时, 会阶段性地出现相邻两阶固有频率计算差较小的现象, 这是由于结构的对称性引起的。

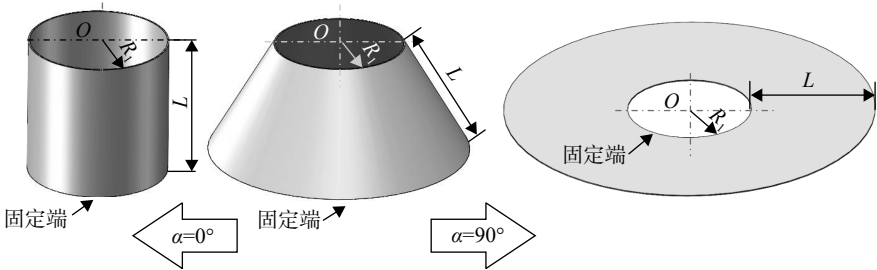


图 4 半锥角演化示意图
Fig. 4 Schematic diagram of semi-conical angle evolution

3.2 约束边界对固有特性的影响

如图 5 所示, 本节中分别讨论了小径端固定、大径端固定、两端固定以及两端自由 4 种边界约束方式对结构固有频率的影响。结构的铺层方式

为 $[+45^\circ/-45^\circ]_s$, 半锥角为 30° 。计算获得的固有频率计算结果如表 3 所示。

从表 3 可以看出, 随着约束边界长度的增加, 结构的固有频率也逐渐升高, 这是由于随着约

表 2 不同半锥角下的纤维增强截顶圆锥壳固有频率

Table 2 Natural frequencies of fiber reinforced truncated conical shell with different semi-conical angle

$\alpha/(^{\circ})$	频率相关参数	模态阶次					
		1	2	3	4	5	6
0	频率/Hz	A_1 (Matlab)	977.92	1 637.82	1 953.57	2 284.71	2 796.62
		B_1 (Ansys)	923.48	1 583.40	1 884.50	2 312.70	2 845.30
	误差/%	$ A_1-B_1 /A_1$	5.5	3.3	3.5	1.2	1.7
30	频率/Hz	A_2 (Matlab)	705.23	1 246.16	1 645.50	1 934.49	2 450.27
		B_2 (Ansys)	726.28	1 157.70	1 756.90	1 987.60	2 412.20
	误差/%	$ A_2-B_2 /A_2$	2.9	7.1	6.7	2.7	1.6
60	频率/Hz	A_3 (Matlab)	436.22	954.84	1 361.34	1 799.95	2 116.60
		B_3 (Ansys)	414.51	1 002.70	1 271.30	1 844.80	2 199.10
	误差/%	$ A_3-B_3 /A_3$	5.0	5.0	6.6	2.5	3.9
90	频率/Hz	A_4 (Matlab)	143.65	642.99	1 049.54	1 381.93	1 867.34
		B_4 (Ansys)	138.94	611.34	992.77	1 422.30	1 912.60
	误差/%	$ A_4-B_4 /A_4$	3.3	4.9	5.4	3.1	2.4

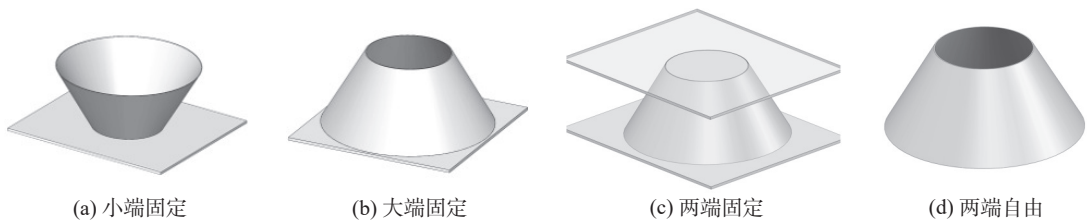


图 5 纤维增强截顶圆锥壳不同固定端示意图

Fig. 5 Schematic diagram of fiber reinforced truncated conical shell under different constraint boundary conditions

束边界长度的增加, 结构的刚度也会增加而引起的。

3.3 纤维铺层角度对固有特性的影响

如图 6 所示, 本节中分别讨论了 $[0^{\circ}/90^{\circ}]_s$ 、

$[+45^{\circ}/-45^{\circ}]_s$ 和 $[90^{\circ}/90^{\circ}]_s$ 铺层对结构固有频率的影响规律。结构的半锥角为 30° , 计算获得的固有频率计算结果以及计算误差如表 4 所示。

从表 4 可以发现, 当铺层方式为 $[0^{\circ}/90^{\circ}]_s$ 时

表 3 不同固定端下纤维增强截顶圆锥壳的固有频率

Table 3 Natural frequencies of fiber reinforced truncated conical shell under different boundary conditions

固定方式	频率相关参数	模态阶次					
		1	2	3	4	5	6
小端固定	频率/Hz	A_1 (Matlab)	366.42	595.88	994.26	1 290.31	1 455.60
		B_1 (Ansys)	348.33	618.74	1 022.20	1 272.10	1 489.60
	误差/%	$ A_1-B_1 /A_1$	4.9	3.8	2.8	1.4	2.3
大端固定	频率/Hz	A_2 (Matlab)	705.23	1 246.16	1 645.50	1 934.49	2 450.27
		B_2 (Ansys)	726.28	1 157.70	1 756.90	1 987.60	2 412.20
	误差/%	$ A_2-B_2 /A_2$	2.9	7.1	6.7	2.7	1.6
两端固定	频率/Hz	A_3 (Matlab)	1 012.72	1 368.45	1 746.77	2 106.82	2 341.16
		B_3 (Ansys)	998.54	1 390.50	1 774.50	2 081.90	2 323.70
	误差/%	$ A_3-B_3 /A_3$	1.4	1.6	1.6	1.2	0.7
两端自由	频率/Hz	A_4 (Matlab)	124.16	216.34	314.59	475.38	598.73
		B_4 (Ansys)	116.27	208.01	298.75	441.21	618.40
	误差/%	$ A_4-B_4 /A_4$	6.3	3.8	5.0	7.1	3.2

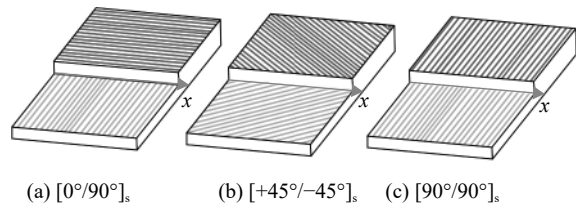


图 6 纤维增强截顶圆锥壳不同铺层角度示意图
Fig. 6 Schematic diagram of fiber reinforced truncated conical shell with different laid methods

结构的固有频率最小, 而 $[90^\circ/90^\circ]_s$ 时最大, 这是由于不同铺层方式结构的刚度不同而引起的。此外, 低阶时, 各种不同铺层方式的固有频率相差较大, 以 Matlab 计算数据为例, 比如在第 1 阶时, 固有频率相差的最大值为 470.4 Hz, 而第 6 阶时, 固有频率相差的最大值为 94.57 Hz, 因此, 伴随着阶次的升高, 结构铺层方式的不同在低阶时对固有频率的影响较大而高阶时较小。

表 4 不同铺层角度下纤维增强截顶圆锥壳的固有频率
Table 4 Natural frequencies of fiber reinforced truncated conical shell with different laid methods

铺层角度		频率相关参数	模态阶次					
			1	2	3	4	5	6
[0°/90°] _s	频率/Hz	A ₁ (Matlab)	441.94	987.35	1 435.64	1 895.46	2 334.71	2 791.86
		B ₁ (Ansys)	422.57	1 002.42	1 519.20	1 822.80	2 284.70	2 680.20
	误差/%	A ₁ -B ₁ /A ₁	4.3	1.5	5.5	3.8	2.1	3.9
[+45°/-45°] _s	频率/Hz	A ₂ (Matlab)	705.23	1 246.16	1 645.50	1 934.49	2 450.27	2 864.31
		B ₂ (Ansys)	726.28	1 157.70	1 756.90	1 987.60	2 412.20	2 764.30
	误差/%	A ₂ -B ₂ /A ₂	2.9	7.1	6.7	2.7	1.6	3.5
[90°/90°] _s	频率/Hz	A ₃ (Matlab)	912.34	1 132.60	1 455.74	1 725.34	2 236.68	2 886.43
		B ₃ (Ansys)	955.34	1 160.50	1 500.10	1 795.30	2 331.00	1 986.40
	误差/%	A ₃ -B ₃ /A ₃	4.7	2.4	3.0	4.0	4.2	3.1

4 结 论

本文从半解析法角度, 基于经典壳体理论和层合理论, 通过引入半锥角的方式, 建立了复合截顶圆锥壳的理论模型, 并利用 Rayleigh-Ritz 法求解了所研究结构的固有特性。计算与实验前 3 阶固有频率的计算误差在 1.4%~2.3% 之间, 与 Ansys 有限元结果间的误差在 1.3%~5.1% 之间, 模态阵型的变化趋势也基本一致, 验证了所提出模型的正确性。

通过讨论不同参数对结构固有频率的影响规律, 可得到以下结论:

- 1) 半锥角越小, 结构的固有频率越大, 且频率增长趋势越快, 这是由于半锥角变化导致结构刚度和质量发生变化而引起的。
- 2) 结构在两端固定时, 固有频率更高, 这是由于不同的约束方式导致的结构刚度变化而引起的。
- 3) 当结构采用 $[0^\circ/90^\circ]_s$ 方式进行铺层时, 固有频率最小, 而 $[90^\circ/90^\circ]_s$ 时最大, 此外, 随着阶次的升高, 不同方式间固有频率的差距在变小。
- 4) 由于结构的对称分布, 会出现相邻阶次间

频率变化较小的情况, 但随着结构参数的变化, 该现象出现的阶次会发生一定的变化。

参考文献:

[1] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989.
CAO Zhiyuan. Vibration theory of plate and shell[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1989. (in Chinese)

[2] QATU M S. Vibration of laminated shells and plates[M]. Amsterdam, Holland: Elsevier, 2004: 259-320.

[3] 邢誉峰, 刘波. 板壳自由振动的精确解[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
XING Yufeng, LIU Bo. Exact solutions of free vibrations of plates and shells[M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese)

[4] ZOU Y, TONG L, STEVEN G P. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures: a review[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 230(2): 357-378.

[5] 李晖, 孙伟, 许卓, 等. 纤维增强复合薄板振动测试与分析方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
LI Hui, SUN Wei, XU Zhuo, et al. Vibration test and analysis method of fiber reinforced composite thin plate[M]. Beijing: China Machine Press, 2020. (in Chinese)

[6] 张德众. 叠层复合材料旋转薄壳的自由振动[J]. 振动与冲击, 1985, 4(1): 28-37.
ZHANG Dezong. Free vibration of thin-wall shells of revolution of laminated composites[J]. Journal of Vibration and Shock, 1985, 4(1): 28-37. (in Chinese)

[7] 张德众, 孟凡平. 叠层复合材料旋转薄壳的半有限元分析

- [J]. 山东工业大学学报, 1986, 16(6): 41-47.
- ZHANG Dezhong, MENG Fanping. Half-finite element analysis of laminated composite thin-wall shells of revolution[J]. Journal of Shandong University (Engineering Science), 1986, 16(6): 41-47. (in Chinese)
- [8] TONG Liyong. Free vibration of composite laminated conical shells [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1993, 35(1): 47-61.
- [9] 朱显明, 张国良, 师汉民. 截顶圆锥壳体的自由振动分析[J]. 舰船科学技术, 1997, 19(5): 33-36.
- ZHU Xianming, ZHANG Guoliang, SHI Hanmin. Free vibration analysis of truncated conical shell[J]. Ship Science and Technology, 1997, 19(5): 33-36. (in Chinese)
- [10] LIANG Sen, CHEN H L, CHEN Tianning, et al. The natural vibration of a symmetric cross-ply laminated composite conical-plate shell[J]. *Composite Structures*, 2007, 80(2): 265-278.
- [11] TRIPATHI V, SINGH B N, SHUKLA K K. Free vibration of laminated composite conical shells with random material properties[J]. *Composite Structures*, 2007, 81(1): 96-104.
- [12] QU Yegao, LONG Xinhua, WU Shihao, et al. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia[J]. *Composite Structures*, 2013, 98: 169-191.
- [13] VIOLA E, TORNABENE F, FANTUZZI N. General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels[J]. *Composite Structures*, 2013, 95: 639-666.
- [14] 瞿叶高, 华宏星, 谌勇, 等. 复合材料旋转壳自由振动分析的新方法[J]. 力学学报, 2013, 45(1): 139-143.
- QU Yegao, HUA Hongxing, CHEN Yong, et al. A new method for free vibration analysis of composite laminated shells of revolution [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(1): 139-143. (in Chinese)
- [15] XIE Xiang, JIN Guoyong, LI Wanyou, et al. A numerical solution for vibration analysis of composite laminated conical, cylindrical shell and annular plate structures[J]. *Composite Structures*, 2014, 111: 20-30.
- [16] SU Zhu, JIN Guoyong, SHI Shuangxia, et al. A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 80: 62-80.
- [17] DEY S, MUKHOPADHYAY T, KHODAPARAST H H, et al. Stochastic natural frequency of composite conical shells[J]. *Acta Mechanica*, 2015, 226(8): 2537-2553.
- [18] 宋旭圆. 层合薄壁圆柱壳结构的非线性振动特性研究[D]. 辽宁 大连: 大连理工大学, 2016.
- SONG Xuyuan. Nonlinear vibration characteristics of laminated thin-walled cylindrical shell[D]. Dalian Liaoning: Dalian University of Technology, 2016. (in Chinese)
- [19] 周正学, 李晖, 薛鹏程, 等. 纤维增强复合薄壳固有特性计算及验证[J]. 中国机械工程, 2018, 29(10): 1234-1239.
- ZHOU Zhengxue, LI Hui, XUE Pengcheng, et al. Natural characteristic calculation and verification of FRCS[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(10): 1234-1239. (in Chinese)
- [20] ZHANG Hong, ZHU Rupeng, SHI Dongyan, et al. A simplified plate theory for vibration analysis of composite laminated sector, annular and circular plate[J]. *Thin-Walled Structures*, 2019, 143: 106252.
- [21] SAFARPOUR M, RAHIMI A R, ALIBEIGLOO A. Static and free vibration analysis of graphene platelets reinforced composite truncated conical shell, cylindrical shell, and annular plate using theory of elasticity and DQM[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2020, 48(4): 496-524.
- [22] SOBHANI E, MASOODI A R, AHMADI-PARI A R. Vibration of FG-CNT and FG-GNP sandwich composite coupled Conical-Cylindrical-Conical shell[J]. *Composite Structures*, 2021, 273: 114281.
- [23] NIU Yan, YAO Minghui. Linear and nonlinear vibrations of graphene platelet reinforced composite tapered plates and cylindrical panels[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2021, 115: 106798.
- [24] 田宏业, 刘朋, 胡志宽, 等. 基于半解析法的功能梯度圆锥板自由振动特性[J]. 船舶力学, 2021, 25(3): 351-359.
- TIAN Hongye, LIU Peng, HU Zhikuan, et al. Free vibration characteristics of functionally graded conical panels with complex boundary conditions[J]. Journal of Ship Mechanics, 2021, 25(3): 351-359. (in Chinese)
- [25] 夏鑫. 硬涂层阻尼薄壁截锥壳的固有特性及相似动力学研究[D]. 辽宁 鞍山: 辽宁科技大学, 2021.
- XIA Xin. Natural characteristics and similar dynamics of thin-walled truncated conical shell with hard coating damping[D]. Anshan Liaoning: University of Science and Technology Liaoning, 2021. (in Chinese)
- [26] MAHI A, BEDIA E A A, TOUNSI A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(9): 2489-2508.

(编辑: 王碧琚)