

文章编号: 1000-8055(2024)11-20220874-10

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20220874

基于自适应径向基函数模型的区间 不确定性分析方法

姜 峰¹, 洪林雄², 李华聪¹

(1. 西北工业大学 动力与能源学院, 西安 721002;

2. 工业和信息化部电子第五研究所, 广州 510610)

摘 要: 针对区间不确定性分析问题, 提出一种基于径向基函数模型的自适应不确定性分析算法。首先提出一种适用于径向基函数模型的采集函数-潜在最值函数, 并针对最大/小值问题特性将其细分为潜在最大/小值函数。针对区间不确定性分析问题, 建立基于潜在最大/小值函数的序列优化框架, 完成区间不确定性分析问题的求解。通过 3 个算例的分析结果表明: 相比于粒子群优化 (PSO) 算法和顶点法等算法, 所提算法能够在保证计算精度的同时, 有效提高区间不确定性问题的分析效率; 相对于采用拉丁超立方方法一次抽样构建径向基函数模型, 之后使用粒子群优化算法计算响应边界 (LHS+PSO) 的方法, 所提算法通过采集函数序列更新模型, 提高了模型在局部区域的模型逼近效果, 保证了区间不确定性问题的分析求解精度。

关 键 词: 径向基模型; 区间模型; 不确定性分析; 贝叶斯全局优化; 潜在最大/小值函数

中图分类号: V231; TB114.3

文献标志码: A

Interval uncertainty analysis method based on adaptive radial basis function model

JIANG Feng¹, HONG Linxiong², LI Huacong¹

(1. School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Ministry of Industry and Information Technology Electronic 5th Research Institute,

Guangzhou 510610, China)

Abstract: Considering the problem of interval uncertainty analysis, an adaptive uncertainty analysis method based on radial basis function model was proposed. Firstly, an acquisition function, also called the potential maximum function, which can be combined with the radial basis function model, was presented, and subdivided into potential maximum/minimum functions according to the characteristics of the maximum/minimum problem. Then, for the interval uncertainty analysis problem, a sequential optimization framework based on the potential maximum/minimum function was established to complete the efficient and high-precision solution of the interval uncertainty analysis problem. Three examples showed that, the proposed method can improve the computational efficiency of particle swarm optimization (PSO) and vertex method with accurate solution; also, the method refined the model sequentially through the proposed acquisition function, so compared with the method in which the Latin hypercube sampling is used to perform the “one-shot” sampling for radial basis function model

收稿日期: 2022-11-15

基金项目: 国家科技重大专项 (J2019-V-0016-0111); 广东省自然科学基金-面上项目 (2023A1515011456)

作者简介: 姜峰 (1998—), 男, 博士生, 主要研究方向为航空发动机燃油附件设计仿真及结构可靠性分析。E-mail: jfxgd@mail.nwpu.edu.cn

通信作者: 李华聪 (1962—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要研究方向为航空发动机控制系统。E-mail: lihuacong@nwpu.edu.cn

引用格式: 姜峰, 洪林雄, 李华聪. 基于自适应径向基函数模型的区间不确定性分析方法 [J]. 航空动力学报, 2024, 39(11): 20220874. JIANG Feng, HONG Linxiong, LI Huacong. Interval uncertainty analysis method based on adaptive radial basis function model [J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(11): 20220874.

constructing, and the response bounds is estimated through particle swarm optimization (LHS+PSO), it can guarantee the accuracy of the predicted bounds by improving approximate accuracy of the model in local regions.

Keywords: radial basis function; interval model; uncertainty analysis;
Bayesian global optimization; potential maximum/minimum function

在实际的工程问题中,大部分输入参数例如结构尺寸、材料属性、外部载荷等等都是不确定的,这导致了结构性能或输出的不确定性。在结构设计或优化分析中利用不确定性分析对结构响应的变化范围或区间波动进行预测,可以很好地帮助工程师进行决策,以实现预期的设计性能和输出。

一般来说,根据不确定性的来源不同可以将不确定性分为两类^[1]:随机不确定性和认知不确定性。随机不确定性是参数和事件的固有随机属性,概率模型是表征随机不确定性最理想的数学工具^[2]。利用概率模型表征参数的随机不确定性时需要获得足够的数据来描述参数的概率分布,然而在实际的工程中,尤其是航空航天领域,收集关于不确定性的足够信息往往是非常困难且成本高昂,在缺乏足够数据的情况下,得到的标准概率模型与真实概率模型存在一定偏差,进而导致不确定分析的结果与真实值存在较大误差^[3]。因此当掌握的信息不足以得到参数精确的概率分布时,需要采用认知不确定性理论对参数的不确定性进行描述^[4]。非概率模型是一种常用的认知不确定性表征方法,主要包括模糊模型^[5]、Dempster-Shafer 证据模型^[6]和区间模型^[7],其中,区间模型将不确定参数视为未知而有界的区间数,计算时只需获取参数的分布范围即可,这一般来说是容易实现的。区间模型降低了概率方法的先验要求,同时不引入人为假设,因此在最近的几十年间,在固体力学、转子动力学、声学等多个研究领域^[8-10],不少学者基于区间模型开展了对结构响应的区间不确定性分析。

目前,区间不确定分析方法主要有顶点法(vertex method)、摄动法(perturbation method)以及代理模型法(surrogate model based method)。顶点法假设结构响应在不确定域的顶点处得到其响应边界^[11-12],因此顶点法仅适用于单调情况且其计算成本会随着区间参数的增加呈指数增长,这对于大型结构是不可接受的。摄动法包括传统摄动法^[13-14]和子区间摄动法^[15-16],是一种基于 Taylor

展开的近似方法。摄动法具有良好的计算效率且求解小不确定度问题时,计算精度较高。摄动法的一大局限性在于其需要获得结构响应函数的 1 阶或 2 阶偏导数,在很多复杂的工程问题中偏导数信息往往难以获得。

相较于摄动法,代理模型法不依赖于响应函数的偏导数信息,因此具有更广泛的适用范围^[17]。传统的代理模型法在不确定参数空间中直接使用一次抽样所得样本建立代理模型,然后利用辅助算法寻找代理模型的最大和最小值,进而得到响应的边界^[18-20]。这种方法需要抽取大量的样本才能建立足够精度的代理模型,计算效率低下^[21]。最近,不少学者将贝叶斯全局优化(Bayesian global optimization)的思想引入代理模型法中,形成了一种自适应代理模型法^[21-25],其基本思路如下:首先采用少量初始样本建立代理模型,之后根据采集函数进行自适应采样,不断更新代理模型以改善响应区间上下界的精度,当满足某一终止条件后,结束采样过程,得到最终分析结果。这一过程中,采集函数的选择将直接影响计算精度和效率,显得尤为重要,不同的采集函数被提出用于指导选点过程:Liu 等^[22]基于高斯过程模型提出了 EI_UP(upper expected improvement)和 EI_LO(lower expected improvement)函数;后续 Liu 等^[23]又基于 Kriging 模型提出了 LCB(lower confidence bound)和 UCB(upper confidence bound)函数;Dang 等^[24]基于高斯过程模型开发了一种 T-PEI(triple-engine pseudo expected improvement)函数来估计结构的响应边界,该函数可以在每次迭代过程中选取多个样本点用于代理模型的更新,减少了迭代次数。除了提出不同的采集函数,一些学者提出了改进的 Kriging 模型用以改善采样过程:Feng 等^[26]提出了一种基于对抗学习的 Kriging 模型;Hao 等^[27]为了提高样本中存在噪声时结果的准确性提出了一种随机 Kriging 模型——NSK(nested stochastic Kriging)模型。值得注意的是,上述研究都是基于高斯模型(高斯过程模型或者 Kriging 模型)开展的,这也是自适应代理模型法

所存在的局限性, 如果使用其他代理模型, 由于缺乏高斯模型提供的模型预测方差, 采集函数将无法进行全局探索^[28], 从而导致响应边界的错误估计, 如何将这种新的代理模型法扩展至其他代理模型, 目前还有待进一步的研究。

考虑到径向基函数(radial basis function, RBF)能够较好地折中计算效率和近似精度, 有很好的应用前景^[29], 本文基于 RBF 模型建立了一种自适应不确定性分析算法: 首先提出了一种能够兼顾全局区域探索和局部区域开发功能的采集函数-潜在最值大/小值函数, 该函数的构建并不依赖于样本方差, 可以适用于不同的代理模型; 然后针对区间不确定性分析问题, 建立了基于潜在最大/小值函数的序列优化框架, 完成区间不确定性分析问题的高效高精度求解。

文章首先概述了区间不确定性分析问题, 回顾了 RBF 模型的构建方法, 然后建立了一种自适应 RBF 模型, 并基于该模型提出了本文采用的区间不确定分析方法, 给出了 3 个数值算例来验证该方法的有效性, 最后对全文进行总结。

1 区间不确定性分析问题

当输入变量的样本信息较少, 无法用精确的概率分布函数描述不确定变量 X 的不确定性时, 可以采用区间模型对其不确定性进行表征, 此时不确定变量 X 被称为区间变量, 其不确定性可表示为^[30]:

$$X \in x^i = [x^l, x^r] = \{X | x^l \leq X \leq x^r\} \quad (1)$$

式中上标 i 、 l 和 r 分别表示区间, 区间下界和区间上界。区间变量 X 的不确定性通过其上边界 x^r 和下边界 x^l 限定, 变量 X 的任意可能实现包含于其构成的区间 $x^i = [x^l, x^r]$ 。

定义区间变量 X 的不确定性水平 $\gamma(X)$ 为:

$$\gamma(X) = \frac{x^r - x^l}{x^r + x^l} \times 100\% \quad (2)$$

采用区间模型来表述输入变量的不确定性, 则一般形式的区间分析模型可以表示为^[31]

$$Y = g(X) \quad (3)$$

式中 $g(\cdot)$ 为结构响应函数, Y 为输出的不确定性响应; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为不确定性输入向量, 其不确定性可用区间 x^i 表示:

$$X \in x^i = [x^l, x^r] \quad (4)$$

X 的第 i 个分量 X_i 满足:

$$X_i \in x_i^i = [x_i^l, x_i^r] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

式中 x_i^i 表示 x^i 的第 i 个分量; $x^l = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)$ 和 $x^r = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$ 分别为 x^i 的下边界和上边界。

由于采用区间变量 X 作为输入, 响应函数的输出将会在区间内变动而不是确定的值即 $Y \in y^i = [y^l, y^r]$ 。区间不确定性分析的目的就是求取响应函数的响应区间, 即确定输出响应的边界。因此结构的区间不确定性分析问题可以转化为下面两个优化问题:

$$\begin{cases} y^l = \min_{x \in x^i} \{y | y = g(x)\} \\ y^r = \max_{x \in x^i} \{y | y = g(x)\} \end{cases} \quad (6)$$

在实际工程问题中, 不确定性在复杂结构中的传递过程分析往往是个“黑箱”问题, 即不存在解析解。近年来, 基于代理模型的贝叶斯优化方法求解最优化问题逐渐被广泛应用, 然而上述方法大多得依赖于高斯模型(类似 Kriging 或高斯过程模型)。针对实际问题, 不同代理模型有其自身独有的优势, 因此本文基于 RBF 模型提出一种新的自适应求解算法用于区间不确定性分析问题求解。

2 RBF 模型

RBF 模型是由对称基函数线性组合而成, 具有较高的模型构建效率和拟合精度。对于假设的 n 维函数 $y = g(x)$, 给定训练集 $X_{\text{train}} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T$, 其对应的响应值为 $y_{\text{train}} = \{g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)\}^T$, 则 RBF 模型在未知点 x 处的预测响应值可以表示为^[32]:

$$\hat{g}(x) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi(r_i) \quad (7)$$

式中 $r_i = \|x - x_i\|$ 表示未知点 x 和训练样本 x_i 之间的欧式距离; w_i 为对应于基函数的权重系数; m 为基函数的个数, 同时也是训练样本集的大小; $\varphi(\cdot)$ 为径向基函数, 文献 [33] 指出选用 3 次函数作为径向基函数的 RBF 模型具有更好的近似性能, 因此本文中采用 3 次函数作为基函数, 即 $\varphi(r) = r^3$ 。

将训练集 X_{train} 和响应值 y_{train} 代入式 (7) 中, 得到如下的表达式:

$$\begin{bmatrix} g(\mathbf{x}_1) \\ g(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ g(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(r_{11}) & \varphi(r_{12}) & \cdots & \varphi(r_{1m}) \\ \varphi(r_{21}) & \varphi(r_{22}) & \cdots & \varphi(r_{2m}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(r_{m1}) & \varphi(r_{m1}) & \cdots & \varphi(r_{mm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

将式(8)表示为矩阵乘积的形式如下:

$$\mathbf{g} = \Phi \mathbf{w} \quad (9)$$

其中 Φ 是一个 $m \times m$ 的基函数矩阵, 且 $\Phi(i, j) = \varphi(r_{ij})$; $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 为权重系数向量; $\mathbf{g} = (g(\mathbf{x}_1), g(\mathbf{x}_2), \dots, g(\mathbf{x}_m))^T$; 则 RBF 模型的权重系数向量可以计算如下:

$$\mathbf{w} = \Phi^{-1} \mathbf{g} \quad (10)$$

3 基于自适应 RBF 模型的区间不确定性分析方法

当采用空间抽样方法一次性获取所有设计样本并用来构建 RBF 代理模型时, 所构建模型在最值附近区域的局部精度有待考量。因此, 借鉴贝叶斯优化思想^[34], 在模型构建过程中构建采集函数逐渐去提升模型精度, 能有效提升代理模型精度和模型构建效率。

3.1 采集函数-潜在最值函数

在模型序列更新过程中, 采集函数需要着重考虑两个方面: 全局探索和局部开发。在 Kriging 等高斯模型中, 采用模型预测方差可以量化未知点处的模型精度, 因此预测方差可以用来提升采集函数的全局特性。然而, RBF 模型无法提供在未知区域的模型预测方差, 因此本文采用样本之间的欧式距离特性构造探索函数, 即:

在 Kriging 模型中, 距离训练集越远的样本其预测方差越大。因此, 预测方差可用于防止点选择的聚集。为了不依赖于仅由 Kriging 模型提供的预测方差, 本文采用样本之间的欧式距离构造探索函数, 即

$$P_d(\mathbf{x}) = \frac{\min_{\mathbf{x}_i \in X_{\text{train}}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|}{\max_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X_{\text{train}}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

其中探索函数 $P_d(\mathbf{x})$ 的分子部分表示未知样本 $\mathbf{x}$ 和训练集样本 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X_{\text{train}}$ 之间的最小距离; 分母部分表示训练集中样本之间的最大距离, 当训练

集保持不变时其为定值。同时, 通过分子和分母部分的相互抵消, 探索函数本身变成一个无量纲函数, 在工程应用中可有效防止不确定性变量量纲对计算的影响。

然而, 影响不确定性分析计算精度的并不是代理模型的全局拟合精度, 而是在最值区域的局部拟合精度。因此, 还需要提高采集函数在潜在最值区域附近的局部开发能力。以最小值优化问题为例, 样本响应值和最小值的差值越小说明其在潜在最值区域附近的概率越高, 因此任意点的模型预测响应值和当前模型最小值之间的差值可以用来表征样本是否处在潜在最小值区域, 定义如下:

$$p_{\min}(\mathbf{x}) = \hat{g}(\mathbf{x}) - \hat{g}_{\min} \quad (12)$$

其中 $p_{\min}(\mathbf{x})$ 为最小值差值函数; $\hat{g}(\mathbf{x})$ 为代理模型在未知点 $\mathbf{x}$ 处的预测相应; $\hat{g}_{\min} = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^i} \hat{g}(\mathbf{x})$ 。差值函数的值越小, 表示未知点在潜在最小值区域的概率越高。为了增加潜在最小值区域附近样本的“奖励”力度, 最小值开发函数采用指数函数形式, 其具体形式如下:

$$P_f^{\min}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\tau \frac{p_{\min}(\mathbf{x})}{\hat{g}_{\max} - \hat{g}_{\min}}\right) \quad \tau > 0 \quad (13)$$

其中 $\hat{g}_{\max} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^i} \hat{g}(\mathbf{x})$; τ 为调节参数, 主要用来权衡全局探索和局部开发能力。同理, 针对最大值优化问题的差值函数和开发函数分别定义如下:

$$p_{\max}(\mathbf{x}) = \hat{g}_{\max} - \hat{g}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

$$P_f^{\max}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\tau \frac{p_{\max}(\mathbf{x})}{\hat{g}_{\max} - \hat{g}_{\min}}\right) \quad \tau > 0 \quad (15)$$

式中 $p_{\max}(\mathbf{x})$ 为最大值差值函数; $P_f^{\max}(\mathbf{x})$ 为最大值开发函数。

由于指数函数的数学特性, 在潜在最值区域附近的样本被采集函数选中的概率会大幅增高。最终, 针对 RBF 模型的潜在最大值函数和潜在最小值函数定义如下:

$$P_{\max}(\mathbf{x}) = P_d(\mathbf{x}) P_f^{\max}(\mathbf{x}) = \frac{\min_{\mathbf{x}_i \in X_{\text{train}}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|}{\max_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X_{\text{train}}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \exp\left(-\tau \frac{p_{\max}(\mathbf{x})}{\hat{g}_{\max} - \hat{g}_{\min}}\right) \quad (16)$$

$$P_{\min}(\mathbf{x}) = P_d(\mathbf{x}) P_f^{\min}(\mathbf{x}) = \frac{\min_{\mathbf{x}_i \in X_{\text{train}}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|}{\max_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X_{\text{train}}} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \exp\left(-\tau \frac{p_{\min}(\mathbf{x})}{\hat{g}_{\max} - \hat{g}_{\min}}\right) \quad (17)$$

其中 $P_{\max}(\mathbf{x})$ 为潜在最大值函数, $P_{\min}(\mathbf{x})$ 为潜在最小值函数。很明显, 当样本接近潜在最大/小值区域时会被最大/小值开发函数 $P_f^{\max}(\mathbf{x})/P_f^{\min}(\mathbf{x})$ 给予较高的“奖励”, 然而当样本离当前训练样本集距离较近时, 就会被探索函数 $P_d(\mathbf{x})$ 施加“惩罚”。因此, 潜在最大/小值函数的全局探索和局部开发能力之间存在一种权衡, 可通过调节参数 τ 进行调整。

在整个 RBF 模型更新过程中, 采集函数的选点策略分为两个阶段: 第 1 阶段是侧重全局探索过程, 此时应该赋予潜在最值函数更高的全局探索能力; 第 2 阶段是在全局探索结束后, 面向潜在最大/小值区域进行局部开发, 因此应该赋予潜在最值函数更高的局部开发能力。综上所述, 将调节参数定义成和迭代次数相关的自适应参数, 即 $\tau = \ln(n_{\text{iter}}^2)$, 其中 n_{iter} 为模型更新过程中的迭代次数。调节参数是一个经验取值参数, 在工程应用中可根据实际问题进行适当调整。

3.2 本文提出的区间不确定性分析方法

综合 RBF 代理模型和所提的潜在最值函数, 本文提出一种区间不确定性分析的自适应求解方法——ARBF(adaptive radial basis function)算法。在算法的自适应迭代过程中, 采用潜在最大值函数和潜在最小值函数对模型进行并行更新, 减少模型探索过程中的选点浪费。本文所提算法的具体流程如图 1 所示, 其对应具体步骤如下:

1) 产生初始训练样本集 S 。根据区间 x^i 的上下界, 采用 LHS(Latin hypercube sampling)方法得到初始样本集 S 。考虑到初始代理模型的构造和问题维数大小等因素, 将初始训练样本集的大小定为 $\max(2n, 10)$, 其中 n 为区间变量的维数。

2) 构建初始代理模型 $\hat{g}$ 。计算样本集 S 中所有样本的真实响应值 g , 并构建响应的初始 RBF 模型 $\hat{g}$ 。

3) 计算 $\hat{g}$ 的极值 $\hat{g}_{\max}$ 和 $\hat{g}_{\min}$ 。

4) 判断收敛条件。为了防止迭代过程出现早熟或者过度学习问题, 本文借鉴文献 [35], 采用了如下的最大/最小值收敛准则, 以最小值收敛准则为例:

$$\varepsilon_{\min} = \left| \frac{\sigma_{\min}}{\mu_{\min}} \right| \leq \varepsilon_{\text{th}} \quad (18)$$

其中 $\varepsilon_{\min}$ 为最小值收敛指标, ε_{th} 为收敛指标的阈值; 当 $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_{\text{th}}$ 时, 迭代停止。式(18)中

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{1}{n_{\min}} \sum_{i=n_{\text{iter}}-n_{\min}+1}^{n_{\text{iter}}} (\hat{g}_{\min} - \mu_{\min})^2} \quad (19)$$

$$\mu_{\min} = \frac{1}{n_{\min}} \sum_{i=n_{\text{iter}}-n_{\min}+1}^{n_{\text{iter}}} \hat{g}_{\min} \quad (20)$$

式中 n_{iter} 为迭代次数。 $\mu_{\min}$ 和 $\sigma_{\min}$ 为取最后 $n_{\min}$ 次迭代的最小值的均值和标准差。最大值收敛准则即将式(18)~式(20)中的下标 $\min$ 换成 $\max$ 即可。为了保证收敛速度和计算精度, 本文取 $\varepsilon_{\text{th}} = 0.002$, 且 $n_{\min} = n_{\max} = 10$ 。所以针对上述收敛准则, 在每一次迭代过程中存在 4 种情况, 分别如下:

1) 当 $\varepsilon_{\min} > \varepsilon_{\text{th}}$ 且 $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{\text{th}}$ 时, 同时根据式(16)潜在最大值函数和式(17)潜在最小值函数进行选点, 得到最佳模型更新样本点 $\mathbf{X}^b = \{\mathbf{x}_{\max}^b, \mathbf{x}_{\min}^b\}$, 其中 $\mathbf{x}_{\max}^b = \arg\max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^i} P_{\max}(\mathbf{x})$ 且 $\mathbf{x}_{\min}^b = \arg\max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^i} P_{\min}(\mathbf{x})$ 。跳到步骤 5)。

2) 当 $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_{\text{th}}$ 且 $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{\text{th}}$ 时, 则根据式(16)潜在最大值函数得到最佳模型更新样本点 $\mathbf{X}^b = \mathbf{x}_{\max}^b$ 。跳到步骤 5)。

3) 当 $\varepsilon_{\min} > \varepsilon_{\text{th}}$ 且 $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{\text{th}}$ 时, 则根据式(17)潜在最小值函数得到最佳模型更新样本点 $\mathbf{X}^b = \mathbf{x}_{\min}^b$ 。跳到步骤 5)。

4) 当 $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_{\text{th}}$ 且 $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{\text{th}}$ 时, 说明满足收敛条件, 则跳到步骤 6)。

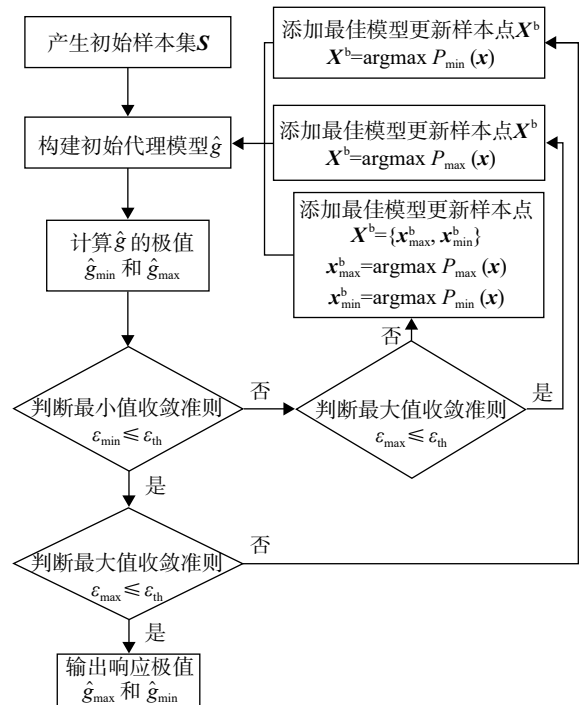


图 1 自适应 RBF 算法计算流程图

Fig. 1 Flowchart of the proposed method

5) 计算模型更新点的真实函数值。针对采集函数所得到的最佳模型更新样本点 $\mathbf{X}^b$, 计算其真实响应值 $g(\mathbf{X}^b)$, 并将上述样本加入到初始样本集 S , 并回到步骤 2)。

6) 迭代完毕。当满足所有收敛条件时, 输出最大值 $\hat{g}_{\max}$ 和最小值 $\hat{g}_{\min}$ 作为响应函数的边界值。

4 实际算例验证

本节中将采用 1 个数值算例和 2 个工程算例对所提算法进行有效性验证。在每个算例中, 将所提算法和顶点法^[12]、PSO(particle swarm optimization)^[36]、直接 LHS+PSO(即直接使用 LHS 方法进行抽样并构建 RBF 模型, 之后使用 PSO 算法进行求解)、N-PBGO(non-parallel bayesian global optimization)^[24]等算法进行比较。其中, PSO 算法是一种优秀的全局优化算法, 因此其计算结果将被当作每个算例中的精确解。在与 N-PBGO 算法进行对比时, 为了对比其与本文算法的性能, 将原有 N-PBGO 算法的收敛准则替换为本文算法的收敛准则, 使得两种算法在相同收敛准则之下进行计算。在计算过程两种算法的初始训练样本集的大小均为 $\max\{2n, 10\}$, 其中 n 为区间变量的维数。

4.1 二维数值算例

图 2 是一个经典的二维数值算法, 其函数表达式具体如下^[24]:

$$g(\mathbf{x}) = (1.5x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2 + x_1x_2 + 10\sin(2\pi x_1) + 10(2\pi x_2)$$

(21)

式中 x_1 、 x_2 为区间变量, 且 $x_1 \in [2, 5]$, $x_2 \in [2, 5]$ 。由图 2 可知, 算例 1 为一个强非线性不确定分析问题, 且在整个不确定性区域内存在多个局部最优解。

将 PSO、顶点法、ARBF 和 LHS+PSO 算法、N-PBGO 算法都用于上述不确定性分析问题的求

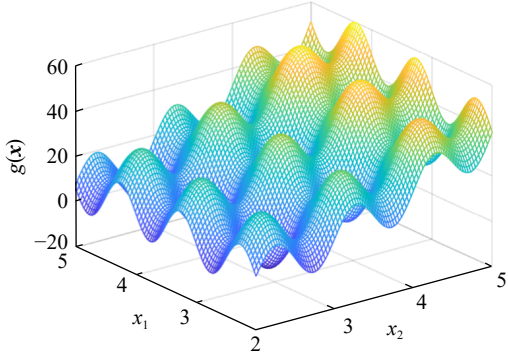


图 2 算例 1 中二维测试函数的三维示意图

Fig. 2 Plot of the two-dimensional test function in Example 1

解, 其计算结果如表 1 所示。和精确解相比, PSO 算法的计算结果精确度最高, 然而其调用函数 7 600 次, 是所有算法中计算效率最低的。顶点法是一种比较经典的最值求解方法, 但是针对强非线性问题, 其计算精度有待改善, 由表 1 可以看出所计算的响应下界的相对误差为 51.25%。在 LHS+PSO 算法中, 采用 LHS 方法得到 80 个样本并构建 RBF 模型, 由计算结果可知其计算精度较差, 这是因为 LHS+PSO 没有针对最大值/最小值区域的局部精度进行提升。在所有算法中, N-PBGO 和本文的算法精度最高, 但是 N-PBGO 在效率上要低于本文的算法, 这也验证了本文所提算法的有效性和优异性。为了直观展示 ARBF 算法的模型更新过程, 图 3 描述了 ARBF 算法的选点过程。可以看到, 在初始局部精度较低的情况下, ARBF 算法能有权衡全局探索和局部开发能力, 逐步逼近最大值和最小值区域, 进而完成区间不确定性问题的高效高精度求解。

4.2 25 杆桁架算例

如图 4 所示, 这是一个 25 杆桁架结构不确定性分析问题^[37]。桁架在实际工作过程中, 受到 3 个垂直向下的力 F_1 、 F_2 和 F_3 , 同时还受到一个水平方向上的力 F_4 。本算例中, 将桁架节点 7 的垂

表 1 算例 1 的所有分析结果
Table 1 Evaluation results of Example 1

算法类型	g(x) 上边界		g(x) 下边界		调用次数
	取值	相对误差/%	取值	相对误差/%	
精确解	59.95		-8.10		
PSO	59.95	0	-8.10	0	7 600
顶点法	51.25	14.51	-4	51.25	4
LHS+PSO	55.37	7.64	-5.97	26.83	80
N-PGBO	59.94	0.017	-8.10	0	80
ARBF	59.94	0.017	-8.10	0	66

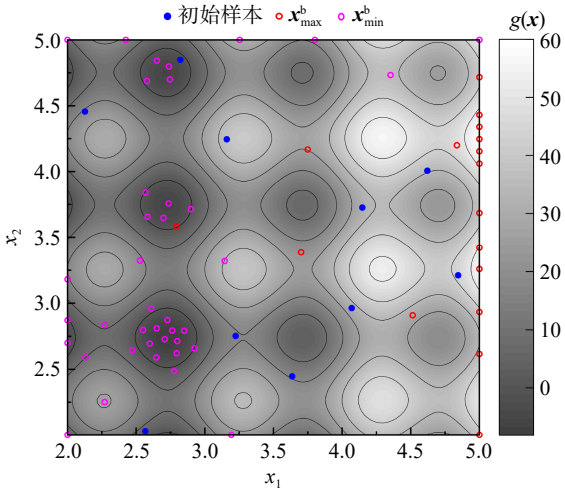


图 3 ARBF 算法的选点过程图

Fig. 3 Sequential sampling process by ARBF

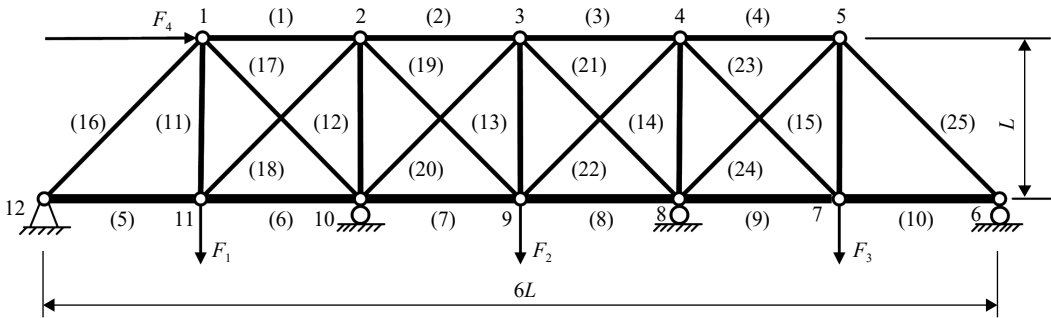
直位移 D_7 作为目标函数, 即

$$g(\mathbf{x}) = D_7(A_1, A_2, A_3, A_4, L, F_1, F_2, F_3, F_4) \quad (22)$$

式中 L 表示垂直杆和竖直杆的长度; A_1 为杆(1)~(4)的截面积; A_2 为杆(16)~(25)的截面积; A_3 为

杆(11)~(15)的截面积; A_4 为杆(5)~(10)的截面积; 节点 12 为铰接, 节点 6、8、10 为活动支座。由于存在制造和测量误差, 横截面积 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、杆的长度 L 、外载荷 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 均为区间变量, 其具体参数如表 2 所示。

针对算例 2, 不同算法的分析结果如表 3 所示。PSO 算法调用函数 4 600 次, 得到桁架节点 7 的垂直位移的边界值分别为 54.62 mm 和 28.04 mm, 这将成为本算例的参考解。由于桁架算例的非线性程度相对较低, 所以顶点法的计算结果和 PSO 算法基本一致。但是, 随着维度的增加, 顶点法所需的函数调用次数成爆炸增长, 这在实际工程应用中是不可接受的。和算例 1 一样, LHS+PSO 算法的计算精度很差, 其计算获得的上边界和下边界值的计算相对误差分别是 9.37% 和 25.11%。相比于其他几种算法, N-PBGO 算法和 ARBF 算法可以以较少的调用次数获得更高精度的结果, 在本算例中, ARBF 法的效率要低于 N-PBGO 算法, 这是由于 RBF 模型对线性函数的近似精度较差造成的^[38]。



注: 图中编号 1~12 为节点编号; 编号(1)~(25)为杆编号。

图 4 25 杆桁架示意图

Fig. 4 Schematic diagram of a 25-bar truss

表 2 算例 2 中区间变量参数

Table 2 Interval variables for Example 2

变量	区间
A_1/mm^2	[630, 770]
A_2/mm^2	[5 580, 6 820]
A_3/mm^2	[4 770, 5 830]
A_4/mm^2	[7 920, 9 680]
L/m	[13.5, 16.5]
F_1/kN	[1 601.2, 1 957.1]
F_2/kN	[2 001.6, 2 446.4]
F_3/kN	[1 601.2, 1 957.1]
F_4/kN	[1 201, 1 467.8]

4.3 航空发动机涡轮叶片算例

算例 3 为航空发动机涡轮叶片问题^[39], 该算例源自于 Matlab 偏微分方程工具箱。本算例对发动机涡轮叶片在高温高压环境中受到的热应力和产生的热变形进行了分析, 计算过程中将叶片的根部固定, 叶片表面承受温度载荷和压力载荷, 具体的材料参数和载荷施加方式可以参考 Matlab 帮助文档。本算例的有限元模型以及应力分布云图如图 5 所示。

考虑到材料特性、外部载荷和温度条件的不确定性, 由外部载荷引起的涡轮叶片的最大形变量也具有不确定性。定义响应函数如下:

表 3 算例 2 的所有分析结果

Table 3 Evaluation results of Example 2

算法类型	节点 7 垂直位移上边界		节点 7 垂直位移下边界		调用次数
	取值/mm	相对误差/%	取值/mm	相对误差/%	
PSO	54.62		28.04		4 600
顶点法	54.62	0	28.04	0	512
LHS+PSO	59.74	9.37	21.00	25.11	70
N-PBGO	54.62	0	28.04	0	36
ARBF	54.69	0.13	27.95	0.32	57

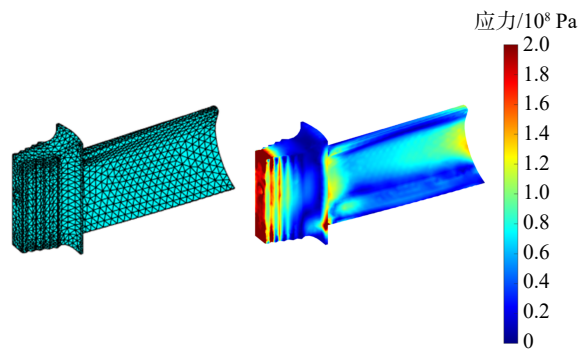


图 5 航空发动机涡轮叶片的有限元模型和应力分布云图

Fig. 5 Finite element model and stress distribution of turbine blade

$$g(\boldsymbol{x}) = D_{\max}(E, C_{\text{CTE}}, \mu, \lambda, p_1, p_2) \tag{23}$$

式中 $D_{\max}$ 表示涡轮叶片的最大变形量, E 为材料的弹性模量, C_{CTE} 为热膨胀系数 (coefficient of thermal expansion, CTE), μ 为泊松比, λ 为热导率, p_1 为压力面受到的压力载荷, p_2 为吸入面受到的压力负荷。上述参数均为区间变量, 各个区间变量的具体参数如表 4 所示。

针对算例 3, PSO 算法调用函数 4 600 次, 得

到涡轮叶片最大变形量的边界值为 0.002 08 m 和 0.001 31 m。顶点法、N-PBGO 算法、ARBF 算法的都能针对涡轮叶片的不确定性问题进行有效求解, 然而 ARBF 和 N-PBGO 算法的计算效率相对较高, 其函数调用次数比顶点法少 20 次左右。LHS+PSO 算法为一次性抽样并构建 RBF 模型, 其在不确定性分析过程中的局部精度相对较低, 导致其计算精度为几种算法中最低, 分析结果如表 5 所示。综上所述, 针对工程问题的计算效率和精度权衡问题, 所提 ARBF 算法能对其进行有效权衡, 适合用于工程不确定性问题求解。

表 4 算例 3 中区间变量相关参数

Table 4 Interval variables for Example 3

变量	区间
$E/10^9 \text{ Pa}$	[200, 250]
$C_{\text{CTE}}/10^{-6} \text{ K}^{-1}$	[11, 14]
μ	[0.24, 0.3]
$\lambda/(\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}))$	[10.3, 12.7]
$p_1/10^5 \text{ Pa}$	[7.2, 8.8]
$p_2/10^5 \text{ Pa}$	[5.4, 6.6]

表 5 算例 3 的所有分析结果

Table 5 Evaluation results of Example 3

算法类型	涡轮叶片最大变形量上边界		涡轮叶片最大变形量下边界		调用次数
	取值/mm	相对误差/%	取值/mm	相对误差/%	
PSO	2.08		1.31		4 600
顶点法	2.08	0	1.31	0	64
LHS+PSO	2.23	7.21	1.17	10.69	50
N-PBGO	2.08	0	1.31	0	41
ARBF	2.08	0	1.31	0	40

5 结 论

本文针对工程中区间不确定性分析问题, 提出一种能够兼顾全局区域探索和局部区域开发功

能的采集函数-潜在最值函数, 并基于 RBF 模型建立其高效高精度自适应求解框架。

1) 在区间不确定性分析问题的自适应求解

过程中,采用潜在最大/小值函数并行选点策略,可以有效减少 RBF 模型初期选点的全局探索过程,进一步提升算法的效率。

2) 通过 3 个算例的分析结果表明:相比于 PSO 和顶点法等算法,所提 ARBF 算法能够在保证计算精度的同时,有效提高区间不确定性问题的分析效率。相对于 LHS+PSO 算法,ARBF 算法通过采集函数序列更新模型,提高模型在局部区域的模型逼近效果,保证区间不确定性问题的分析求解精度。

参考文献:

- [1] HELTON J C. Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1997, 57(1/2/3/4): 3-76.
- [2] 李杰. 工程结构整体可靠性分析研究进展[J]. 土木工程学报, 2018, 51(8): 1-10.
LI Jie. Advances in global reliability analysis of engineering structures[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2018, 51(8): 1-10. (in Chinese)
- [3] ELISHAKOFF I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling[J]. *Computers & Structures*, 1995, 56(6): 871-895.
- [4] 杨旭锋. 含认知不确定性参数的高效高精度可靠性分析方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2016.
YANG Xufeng. Research on highly efficient and precise methods for reliability analysis with epistemic uncertainties[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2016. (in Chinese)
- [5] BALU A S, RAO B N. High dimensional model representation based formulations for fuzzy finite element analysis of structures[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, 50: 217-230.
- [6] SHAH H, HOSDER S, WINTER T. Quantification of margins and mixed uncertainties using evidence theory and stochastic expansions[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 138: 59-72.
- [7] MOORE R E. Methods and applications of interval analysis[M]. Philadelphia, US: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.
- [8] 傅超, 任兴民, 杨永峰, 等. 正交多项式在不确定转子动态响应计算中的应用及对比分析[J]. 航空动力学报, 2018, 33(9): 2228-2234.
FU Chao, REN Xingmin, YANG Yongfeng, et al. Application and comparative analysis of orthogonal polynomials in uncertain rotor dynamic response calculation[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2018, 33(9): 2228-2234. (in Chinese)
- [9] 胡计雨. 声学超材料不确定性分析及其车内降噪应用研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2018.
HU Jiyu. Research on the uncertainty analysis and the application in car interior noise control of acoustic metamaterials[D]. Changsha: Hunan University, 2018. (in Chinese)
- [10] 朱颖, 田玉基. 基于区间理论的不确定结构随机疲劳损伤估计方法[J]. 工程力学, 2017, 34(8): 1-9.
ZHU Ying, TIAN Yujie. Study on random fatigue analysis method of uncertainty structure based on interval theory[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, 34(8): 1-9. (in Chinese)
- [11] JANSOON C. Calculation of exact bounds for the solution set of linear interval systems[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1997, 251: 321-340.
- [12] QIU Zhiping, LV Zheng. The vertex solution theorem and its coupled framework for static analysis of structures with interval parameters[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 112(7): 711-736.
- [13] FUJITA K, TAKEWAKI I. An efficient methodology for robustness evaluation by advanced interval analysis using updated second-order Taylor series expansion[J]. *Engineering Structures*, 2011, 33(12): 3299-3310.
- [14] QIU Zhiping, WANG Xiaojun. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain-but-bounded parameters based on interval analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(18/19): 4958-4970.
- [15] FU C M, CAO L X, TANG J C, et al. A subinterval decomposition analysis method for uncertain structures with large uncertainty parameters[J]. *Computers & Structures*, 2018, 197: 58-69.
- [16] WANG Chong, QIU Zhiping, CHEN Xianjia. Uncertainty analysis for heat convection-diffusion problem with large uncertain-but-bounded parameters[J]. *Acta Mechanica*, 2015, 226(11): 3831-3844.
- [17] 魏彤辉. 基于函数分解法的结构区间分析及优化设计[D]. 长春: 吉林大学, 2022.
WEI Tonghui. Structural interval analysis and optimization design based on function decomposition method[D]. Changchun: Jilin University, 2022. (in Chinese)
- [18] JI Lei, CHEN Guangsong, QIAN Linfang, et al. An iterative interval analysis method based on Kriging-HDMR for uncertainty problems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2022, 38(7): 521378.
- [19] LIU Yisi, WANG Xiaojun, WANG Lei. Interval uncertainty analysis for static response of structures using radial basis functions[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 69: 425-440.
- [20] WU Jinglai, ZHANG Yunqing, CHEN Liping, et al. A Chebyshev interval method for nonlinear dynamic systems under uncertainty[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(6): 4578-4591.
- [21] CICIRELLO A, GIUNTA F. Machine learning based optimization for interval uncertainty propagation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 170: 108619.
- [22] LIU Yisi, WANG Xiaojun, WANG Lei, et al. A Bayesian collocation method for static analysis of structures with unknown-but-bounded uncertainties[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 346: 727-745.
- [23] WAN Huaping, NI Yiqing. A new approach for interval dynamic analysis of train-bridge system based on Bayesian optimization[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2020, 146(5): 04020029.
- [24] DANG Chao, WEI Pengfei, FAES M G R, et al. Interval uncertainty propagation by a parallel Bayesian global optimization method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 108: 220-235.
- [25] LIU Yisi, WANG Xiaojun, WANG Lei. A dynamic evolution scheme for structures with interval uncertainties by using bidirectional sequential Kriging method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 348: 712-729.
- [26] FENG Shaojun, HAO Peng, LIU Hao, et al. A data-driven Kriging model based on adversarial learning for reliability assessment[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(1): 27.
- [27] HAO Peng, FENG Shaojun, LIU Hao, et al. A novel Nested Stochastic Kriging model for response noise quantification and reliability analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and*

- Engineering, 2021, 384: 113941.
- [28] 李正良, 彭思思, 王涛. 基于混合加点准则的代理模型优化设计方法[J]. 工程力学, 2022, 39(1): 27-33.
LI Zhengliang, PENG Sisi, WANG Tao. A surrogate-based optimization design method based on hybrid infill sampling criterion[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(1): 27-33. (in Chinese)
- [29] JIN Ruichen, CHEN Wei, SIMPSON T. Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modeling criteria: AIAA2000-4801 [R]. Reston, US: AIAA, 2000.
- [30] MOORE R. Interval analysis prentice-hall[M]. Englewood, US: Prentice Hall, 1966.
- [31] 唐嘉昌. 基于区间不确定性的工程反问题方法研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2020.
TANG Jiachang. The research on computational methods for engineering inverse problems under interval uncertainty[D]. Changsha: Hunan University, 2020. (in Chinese)
- [32] HONG Linxiong, LI Huacong, PENG Kai. A combined radial basis function and adaptive sequential sampling method for structural reliability analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 90: 375-393.
- [33] 叶年辉, 龙腾, 武宇飞, 等. 基于 Kriging 代理模型的约束差分进化算法[J]. 航空学报, 2021, 42(6): 324580.
YE Nianhui, LONG Teng, WU Yufei, et al. Kriging-assisted constrained differential evolution algorithm[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(6): 324580. (in Chinese)
- [34] JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. Journal of Global Optimization, 1998, 13(4): 455-492.
- [35] HONG Linxiong, LI Huacong, FU Jiangfeng, et al. Hybrid active learning method for non-probabilistic reliability analysis with multi-super-ellipsoidal model[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2022, 222: 108414.
- [36] MEZURA-MONTES E, COELLO COELLO C A. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(4): 173-194.
- [37] ZHANG Yishang, LIU Yongshou, YANG Xufeng, et al. An efficient Kriging method for global sensitivity of structural reliability analysis with non-probabilistic convex model[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part O Journal of Risk and Reliability, 2015, 229(5): 442-455.
- [38] 武泽平, 王东辉, 杨希祥, 等. 应用径向基代理模型实现序列自适应再采样优化策略[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(6): 18-24.
WU Zeping, WANG Donghui, YANG Xixiang, et al. Adaptive resampling strategy of sequential optimization based on radial basis function surrogate model[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36(6): 18-24. (in Chinese)
- [39] SONG Jingwen, WEI Pengfei, VALDEBENITO M A, et al. Data-driven and active learning of variance-based sensitivity indices with Bayesian probabilistic integration[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 163: 108106.

(编辑: 王碧珺)