

航空花键接触刚度仿真与试验

李英杰¹, 赵 广¹, 袁运博², 侯志强¹, 郭 梅³, 张大义⁴

- (1. 大连理工大学 能源与动力学院, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024;
3. 中国航发沈阳发动机研究所, 沈阳 110015;
4. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对航空花键接触刚度数量级高导致的直接试验测量难度高、误差大的现状, 以某型号航空发动机花键连接结构为研究对象, 经过合理的简化与缩尺设计, 建立相应的花键结构模型。仿真得到花键接触刚度及其随传递扭矩、横向力的变化规律, 并搭建与仿真模型一致的试验台进行刚度测试。结果表明: 当横向力不变时, 花键的接触刚度随传递扭矩的增大而非线性增大, 并逐渐趋于稳定; 当花键处于相同的扭矩和横向力作用时, 处于加载和卸载过程中的花键接触刚度值不同, 并出现迟滞现象; 试验测得在所有扭矩下的花键平均刚度值为 20.48 MN/m, 仿真结果与试验结果的平均误差为 8.54%, 试验与仿真结果取得了较好的一致性。该研究为航空花键接触刚度的研究提供了参考。

关 键 词: 航空花键; 接触刚度; 缩尺模型; 有限元分析; 刚度测试

中图分类号: V233.1

文献标志码: A

Simulation and experiment on contact stiffness of aviation splines

LI Yingjie¹, ZHAO Guang¹, YUAN Yunbo², HOU Zhiqiang¹,
GUO Mei³, ZHANG Dayi⁴

- (1. School of Energy and Power Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
2. School of Control Science and Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
3. Shenyang Engine Research Institute,
Aero Engine Corporation of China, Shenyang 110015, China;
4. School of Energy and Power Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The high magnitude of the contact stiffness of aviation splines leads to the difficulty in direct measurement and notable test error. A spline structure model was established through reasonable simplification and scale design according to the actual spline connection structure of an aero-engine. Simulations were made to determine the spline contact stiffness and its variation with transmission torque and lateral force. A test bench consistent with the simulation model was built to test the contact stiffness. The results showed that when the transverse force was constant, the contact stiffness of the spline increased nonlinearly with the increase of transmission torque, and was inclined to be unchanged

收稿日期: 2023-02-12

基金项目: 自然科学基金(12172073, 12302065); 国家科技重大专项(779608000000200007)

作者简介: 李英杰(1997—), 男, 博士生, 主要从事航空花键动力学研究。

通信作者: 袁运博(1993—), 男, 助理研究员, 博士, 主要从事转子系统动力学及故障诊断研究。E-mail: yuanyunbo@dlut.edu.cn

引用格式: 李英杰, 赵广, 袁运博, 等. 航空花键接触刚度仿真与试验[J]. 航空动力学报, 2024, 39(12): 20230070. LI Yingjie, ZHAO Guang, YUAN Yunbo, et al. Simulation and experiment on contact stiffness of aviation splines[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(12): 20230070.

gradually. When the spline was under the same torque and lateral force, the contact stiffness of the spline was different during loading and unloading, and the hysteresis phenomenon occurred. The average contact stiffness of splines measured under all torques was 20.48 MN/m. The test and simulation results were in good agreement, with an average error of 8.54%. This study provides a reference for studying the contact stiffness of aviation splines.

Keywords: aviation spline; contact stiffness; scale model; finite element analysis; stiffness measurement

在航空发动机中,花键联轴器因具备轻质量、高速下的高平衡潜力、高承载能力以及良好的不对中补偿能力等特性,广泛应用于航空附件传动系统中。航空花键齿槽较浅、齿根应力集中小,总接触面积较大、承载能力高,导向性好、易于补偿转子不对中,同时单位质量可以传输更多的功率,因此在航空发动机驱动附件中占有不可替代的地位^[1-2]。花键刚度是决定航空转子振动特性的一个非常重要的参数。花键啮合刚度与齿面应力分布相互影响,而齿面间的应力分布又决定着花键的微动磨损^[3-6]。同时在花键耦合转子系统的动力学计算方面,作为连接低压涡轮轴和风扇轴的连接结构,其刚度也是一个不容忽视的重要因素。合适的花键设计能够降低飞机转子振动幅值,同时使运行工况处于安全裕度之内。因此,花键刚度研究可以为指导花键设计、转子安全稳定运行提供重要支撑。

国内外学者针对花键接触刚度的理论推导有着较多的研究。Marmol 等^[7]根据单齿花键刚度,对齿面配合与径向配合花键的横向刚度和转角刚度进行推导。赵广等^[8-9]考虑花键单齿的弯曲、剪切与压缩变形,研究发现啮合点接触变形约占总变形的一半。Silvers 等^[10]提出了花键齿接触的顺序扩展模型和统计分析模型,用于预测花键啮合情况。Hong 等^[11-12]通过对接触弹性体载荷分布公式的扩展,提出了一种齿侧配合渐开线花键载荷分布的半解析模型。其他学者针对动态的花键刚度模型也进行了一些研究^[13-16]。

随着计算机计算能力的提高及有限元方法的发展与完善,众多学者利用有限元方法开展了花键接触特性分析。Barrot 等^[17-18]推导了花键齿之间的扭转力矩,并运用有限元法研究了花键受力及轴向载荷传递。Sum 等^[19]指出采用 MPCs (multipoint constraints) 进行局部网格细化实现非对称载荷作用下花键有限元分析。Liu 等^[20]用非线性有限元的方法研究了定位面的过盈量、预载

荷、定位面占空比和定位面的面积对花键连接弯曲和转角刚度的影响。Liu 等^[21]应用有限元计算了航空花键连接的接触状态,并通过试验进行验证;Medina 等^[22]应用有限元建立网格,进行边界元素积分,从而得到花键各节点的受力情况。

在试验方面,国内外学者也进行了一些研究。1994 年, Ku 等^[23]搭建花键动力学系数测试试验台,得到花键的转角刚度。Robins^[24]记录了合作方关于花键扭转刚度的测量结果,结果表明,制造误差使得内外花键齿侧间隙值呈现随机分布,故随着花键转角位移的增加,所传递的扭矩先快速增大,而后增幅变缓,之后再快速增加。廖仲坤等^[25]推导了随扭矩、齿向不对中和动态相对位移时的花键啮合力和啮合刚度,研究表明在对中情况下,花键啮合力和啮合刚度随扭矩和动态相对位移呈非线性变化规律,但不存在交叉刚度。Curà 等^[26]假设花键为悬臂梁结构,考虑齿的弯曲、剪切和齿根旋转变形,齿根的旋转变形依据文献^[27]的结果,最后根据试验和有限元法验证了所提花键扭转刚度模型的准确性,并证实花键连接刚度随着不对中角的增大而非线性减少。

综上所述,国内外学者针对花键接触刚度的理论研究相对较多,但对于花键接触刚度的仿真与试验综合研究较少。本文针对某典型发动机低压转子系统中的花键结构进行简化,建立花键结构有限元模型,仿真计算不同工况下花键刚度,并通过搭建与仿真模型大小、边界条件一致的试验台测试实际花键结构刚度,对比分析仿真与试验结果。

1 花键结构接触变形

1.1 花键结构接触变形有限元仿真

针对某型号航空发动机花键结构,如图 1 所示,提取低压涡轮轴与风扇轴处花键连接结构,由于实际花键连接结构尺寸及传递扭矩较大,不适合进行机理研究,因此根据实际结构大小,对

其进行缩尺设计,在保证节圆直径近似 3 : 1 的前提下,确定缩尺后的花键结构模型如图 2 所示。为得到花键接触刚度,将航空发动机花键连接结构简化成一个内花键座与外花键轴。其实际与缩尺后的花键结构参数如表 1 所示。

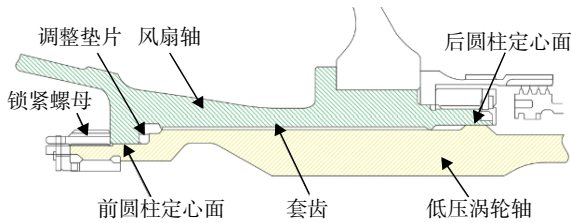


图 1 航空发动机花键结构连接图

Fig. 1 Spline structure connection of aero-engine

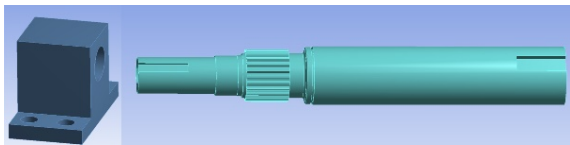


图 2 内外花键缩尺结构图

Fig. 2 Spline structure of scale

表 1 花键结构参数

Table 1 Structure parameters of spline

参数	模化前	模化后
齿数 Z	64	24
模数 m/mm	1.5	1.25
压力角 $A/(\circ)$	30	30
接触长度 l/mm	139	40
基圆直径 D_b/mm	83.1	26.0
分度圆直径 D/mm	96	30

内外花键配合图如图 3 所示。将三维结构模型导入到有限元分析软件 Workbench 中,开展花键连接结构接触刚度的有限元分析。

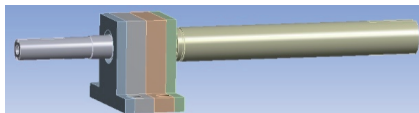


图 3 花键配合有限元模型

Fig. 3 Finite element model of mating spline

使用软件的 DM 模块对内外花键进行切分,方便接触仿真过程中对齿面等重要位置的网格进行加密。花键重要位置采用六面体网格,保证计算过程中不会出现由于剪应力自锁及网格局部应力奇异现象。其中,齿面网格尺寸初步设为 1 mm,其他部分网格尺寸初步设置为 3 mm。齿面网格

划分如图 4 所示。

在接触设置上,仿真对象为花键结构,只有内、外花键相接触,如图 5 所示。其中外花键为主动面,故设为接触面,内花键设为目标面;接触类型为摩擦接触,摩擦因数取 0.15;为使得仿真过程中不发生网格穿透现象,故调整接触类型为对称接触;计算方法选择增广拉格朗日法,相对于 Pure Penalty 和 Normal Lagrange 法来说,兼顾了易收敛和计算快的特点;由于在初始的花键装配结构中,内外花键齿之间存在间隙,为保证仿真的收敛性,将接触面设置为 Adjust to Touch。

针对花键接触的边界条件设置如图 6 所示。内花键底座 C 固定,在花键轴细端 A 施加垂直向

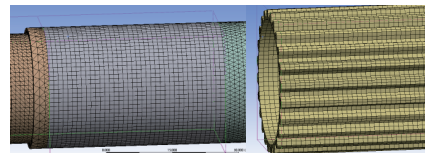


图 4 外花键轴与齿面网格划分

Fig. 4 External spline shaft and tooth surface meshing

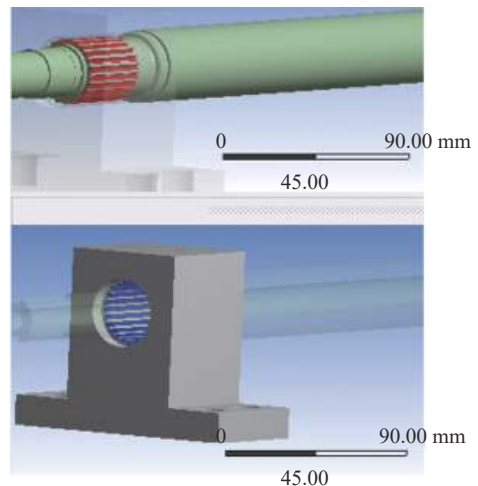
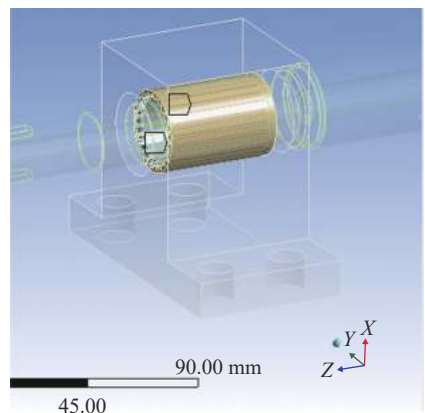


图 5 花键接触设置

Fig. 5 Contact settings of spline

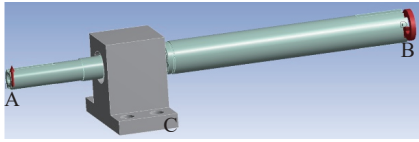


图 6 花键边界条件设置

Fig. 6 Boundary constraints of spline

上的作用力,在外花键轴粗轴端面 B 施加扭矩。

花键刚度的仿真计算中,变形提取选择构造路径实现。在 Construct Geometry 插入 Path, 建立合适的坐标系,此外,为了方便后面不同工况的参数化计算,将需要提取的变形点设为端点。具体设置见图 7。定义 R 为外花键轴细轴侧的测点。

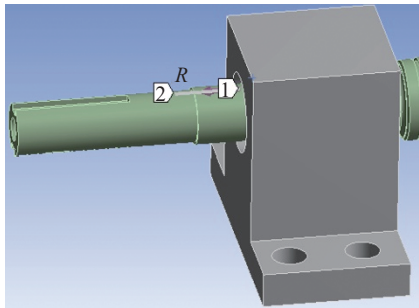


图 7 变形点路径的设置

Fig. 7 Deformation point path settings

通过整体和局部加密,进行网格无关性验证。建立单元数不同的 4 个模型,在保证接触和边界条件一致的前提下,选取图 7 中 2 点变形作为比较的依据。施加相应的边界条件,得到的变形结果如表 2 所示,可以发现从模型 2 到模型 4,网格尺寸变小的同时变形结果变化较小。综合对比,为了提高计算效率并且保证结果准确,后续的仿真采用模型 2 的网格划分方法。

表 2 不同网格建模的变形对照表

Table 2 Deformation comparison table for different mesh modeling

模型	节点数	单元数	变形/ μm	占运行内存/G	相对误差/%
1	307 658	182 867	10.62	2	-24.9
2	476 134	273 112	14.06	3	-0.16
3	1 827 756	945 861	14.13	9.3	-0.05
4	1 866 676	963 731	14.14	10.2	0

1.2 花键刚度仿真结果分析

根据上述接触有限元建模和分析方法,对花键开展单侧加载-变形接触有限元仿真计算,在花

键轴粗轴端施加扭矩 T , 细轴端施加横向力 F_y , 统计 R 位置处的位移值。仿真与试验材料均采用 C250 钢。

根据仿真计算结果,绘制不同扭矩下花键单侧加载-变形曲线如图 8 所示。根据变形曲线计算不同扭矩下花键单侧加载-刚度曲线如图 9 所示。

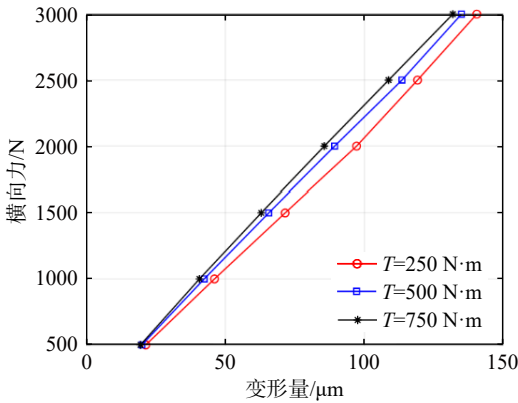


图 8 不同扭矩下花键单侧加载-变形仿真结果

Fig. 8 Unilateral loading-deformation simulation curves of spline under different torques

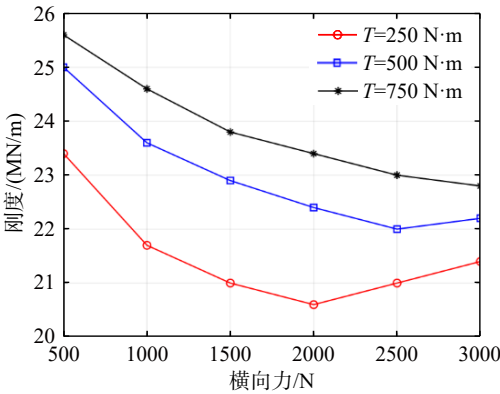


图 9 不同扭矩下花键单侧加载-刚度仿真曲线

Fig. 9 Unilateral loading-stiffness simulation curves of spline under different torques

从图 8 可知,随着横向力的增大,测点处的变形总体呈线性增加;随着扭矩的增加,测点处的变形量略有下降,且呈现出非线性趋势。根据图 9,当扭矩小于 750 N·m 时,刚度不是单纯的下降,而是下降之后出现一个略微抬升的现象;且随着扭矩的增加,测点处刚度略有增加,呈现非线性趋势变化,扭矩越大,增加趋势越小,说明当花键传递扭矩较大时,花键齿面啮合状态近似固结,其啮合刚度受传递扭矩的影响将越来越小。

2 花键结构接触变形试验研究

2.1 花键结构接触变形试验台搭建与试验方法

根据上述仿真模型及边界条件, 为了使试验台与仿真模型边界条件与载荷施加保持一致, 让两者结果更具有可比性, 试验台设计时考虑了以下几点:

- 1) 仿真模型中, 扭矩在外花键轴粗轴端部施加。在试验台设计时, 外花键轴粗轴端用平键与扭矩加载臂相连, 扭矩加载臂上下对称位置各放置一个千斤顶, 两个千斤顶的力作用点到外花键轴的轴心线的距离相同, 两个千斤顶同时加载即可对外花键轴施加扭矩, 使内、外花键相互啮合。
- 2) 仿真模型中, 特意在外花键轴上施加载荷位置处切分出圆弧面, 在这个圆弧面上施加垂直向上的载荷。试验条件下, 选择千斤顶作为载荷施加的工具, 一方面是可以均匀地施加载荷; 另一方面是相比于液压缸, 可以实现加载、卸载的连续过程。为了保证力加载过程中不发生倾斜, 在千斤顶与外花键轴之间安置了“圆弧-平板”结构件。
- 3) 仿真模型中外花键轴的变形可以直接从结果中提取, 而在试验时, 采用电涡流位移传感器和激光位移传感器测得外花键轴的变形量。由于内花键座是通过螺栓固定在支座上的, 为了避免试验过程中支座变形对试验结果的影响, 电涡流位移传感器与激光位移传感器都固定在支座上。

试验台原理图如图 10 所示, 试验台实物图及细节如图 11、图 12 所示。

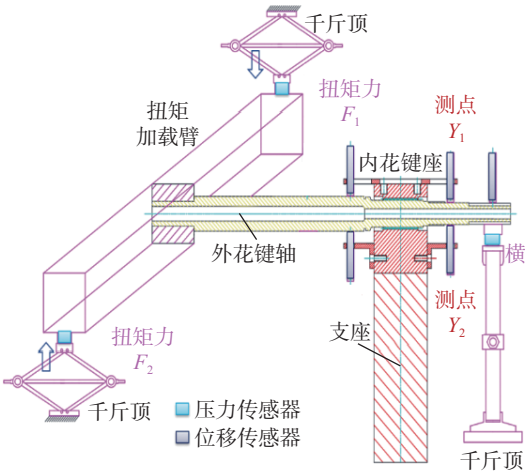


图 10 花键结构接触变形试验台原理图
Fig. 10 Schematic diagram of the contact deformation test bench of the spline structure

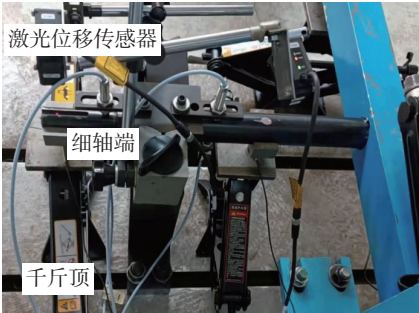


图 11 花键连接结构接触变形试验台
Fig. 11 Contact deformation test bench of the spline connection structure

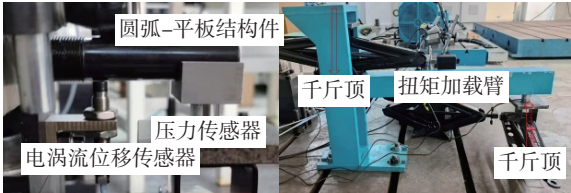


图 12 花键连接结构接触变形试验台细节
Fig. 12 Spline connection structure contact deformation test bench details

2.2 试验内容

针对花键结构, 依次分别施加扭矩载荷、横向载荷, 测试扭矩载荷、横向载荷和横向变形, 获得花键结构接触刚度。

基于上述仿真边界条件与试验内容, 制定试验工况, 如表 3 所示。考虑同时进行加载、卸载, 并重复 3 次, 试验次数共 9 次。

表 3 花键结构接触变形试验内容矩阵规划
Table 3 Matrix planning of contact deformation test content of spline structure

序号	扭矩/(N·m)	横向载荷/N	试验内容
1	250	500~3 000	花键刚度测试及 扭矩、载荷影响
2	500	500~3 000	
3	750	500~3 000	

2.3 花键接触变形试验测试

在外花键轴细轴侧施加垂直向上载荷, 在外花键粗轴端部分别施加 250、500 N·m 和 750 N·m 的扭矩, 加卸载试验数据记录 3 次。

扭矩为 250、500 N·m 和 750 N·m 时, 各测点 (Y_{12} 代表相同轴向位置上测点 Y_1 及下测点 Y_2 的平均值, 下同) 的单侧加载-变形试验曲线如图 13、图 14、图 15 所示。

根据图 13~图 15, 可以得到: 随着横向力的增加, 变形总体呈现弱非线性增加的趋势; 卸载

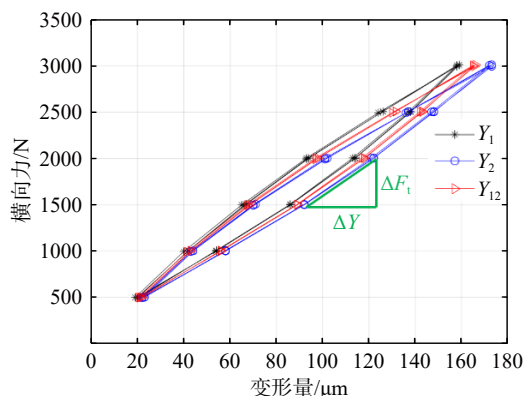


图 13 扭矩为 250 N·m 时,花键加载变形试验结果

Fig. 13 When the torque is 250 N·m, the test results of spline unilateral loading-deformation

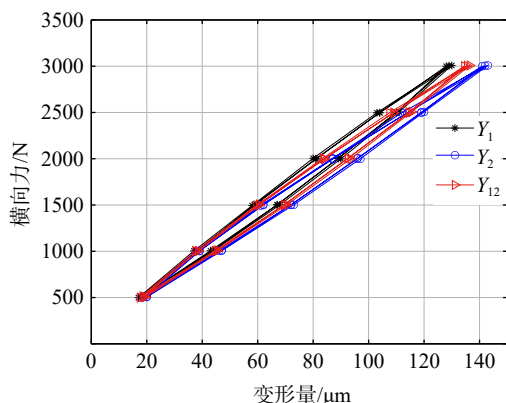


图 14 扭矩为 500 N·m 时,花键加载变形试验结果

Fig. 14 When the torque is 500 N·m, the test results of spline unilateral loading-deformation

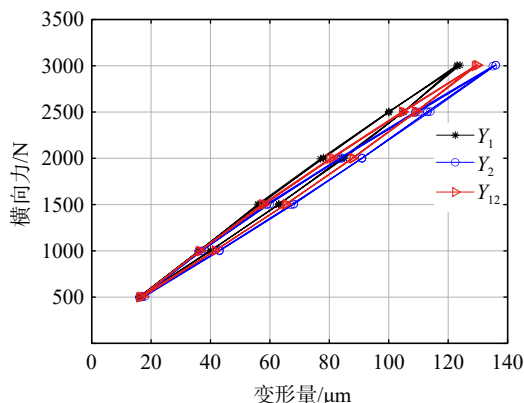


图 15 扭矩为 750 N·m 时,花键加载变形试验结果

Fig. 15 When the torque is 750 N·m, the test results of spline unilateral loading-deformation

过程中变形略大于相同载荷下加载过程的变形,即加卸载过程导致变形曲线存在迟滞现象,形成封闭的迟滞环;转轴沿轴向相同测试位置,相同横向载荷下的上测点变形略小于下测点变形。

根据变形结果,花键刚度计算公式为

$$K = \frac{\Delta F_t}{\Delta Y} \quad (1)$$

式中 ΔF_t 为横向力相对变化值, ΔY 为变形量相对变化值,如图 13 所示。

根据式(1)计算不同横向力下的花键刚度,绘制不同扭矩及横向力下花键刚度测试结果,如图 16、图 17、图 18 所示。

图 16~图 18 中总均值为该扭矩下加卸载过程中花键刚度的平均值。

根据花键刚度测试结果可以发现:

1) 在加载过程中,测点处刚度随载荷的增加而逐渐降低,卸载过程中,测点处刚度随载荷下降而逐渐下降,且是非线性的。

2) 随着传递扭矩的增加,花键刚度的总平均值从 17.74 MN/m 逐渐增加至 22.21 MN/m,且增幅逐渐减缓;随着传递扭矩的增加,花键刚度在加载与卸载过程中的变化率逐渐降低,花键刚度变化的区间范围逐渐缩小;相同的横向力下,其

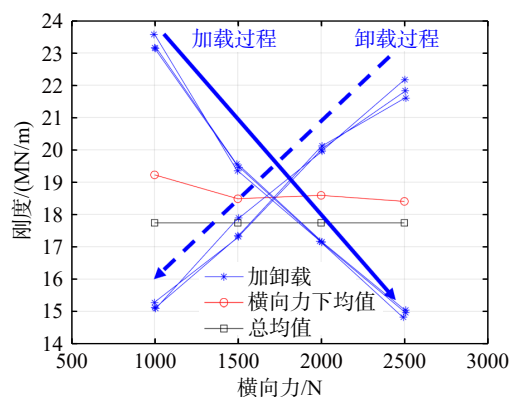


图 16 扭矩为 250 N·m 时,刚度测试结果

Fig. 16 When the torque is 250 N·m, the test results of spline stiffness

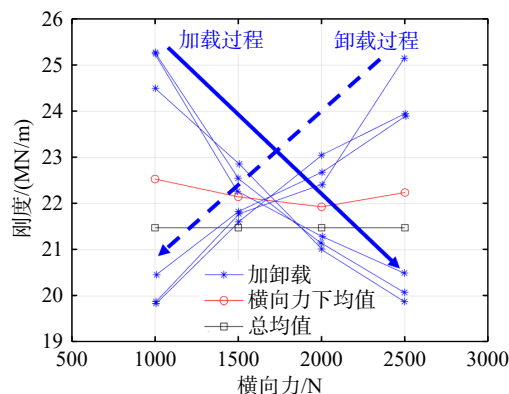


图 17 扭矩为 500 N·m 时,刚度测试结果

Fig. 17 When the torque is 500 N·m, the test results of spline stiffness

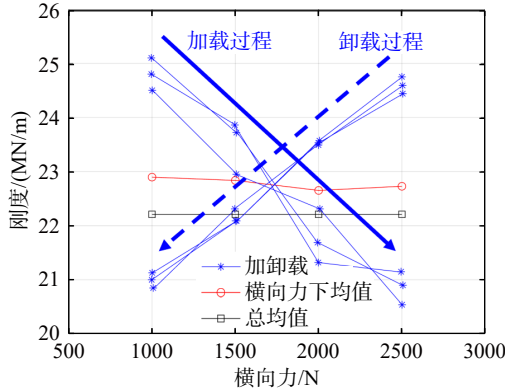


图 18 扭矩为 750 N·m 时, 刚度测试结果

Fig. 18 When the torque is 750 N·m, the test results of spline stiffness

横向力下的刚度均值随着传递扭矩的增加而增加。

3) 在花键加载与卸载过程中, 花键的刚度值一直处于变化状态; 且不同的扭矩载荷、横向力, 变化幅度也不同, 故对于花键刚度的准确测量, 需要给定的工作状态或者边界条件。

3 花键接触变形仿真与试验对比

花键单侧加载时, 根据式(1)计算测点 Y_{12} 处刚度试验测试平均值与仿真计算平均值, 其对比结果如表 4 所示。测点处刚度值试验与仿真结果及误差如图 19 所示。

表 4 花键单侧加载下测点 Y_{12} 的刚度仿真结果与试验结果对比

Table 4 Comparison of spline stiffness at point Y_{12} between test and simulation results under unilateral loading

参数	扭矩/(N·m)			刚度平均值
	250	500	750	
刚度仿真值/(MN/m)	21.51	22.33	22.84	22.23
刚度试验值/(MN/m)	17.74	21.48	22.21	20.48
误差/%	21.25	3.96	2.84	8.54

根据图 19 可知试验过程中, 当花键扭矩较小时, 由于花键齿面啮合不充分, 或者部分齿对可能没有参与啮合, 导致花键接触刚度相对较小, 此时花键刚度的试验测试与仿真结果误差最大, 为 21.25%; 随着花键传递扭矩值的增大, 所测花键刚度值逐渐增加, 仿真与试验误差逐渐缩小, 误差最小值为 2.84%; 3 种工况下的仿真与试验平均误差为 8.54%, 仿真与试验结果有着较好的一致性。

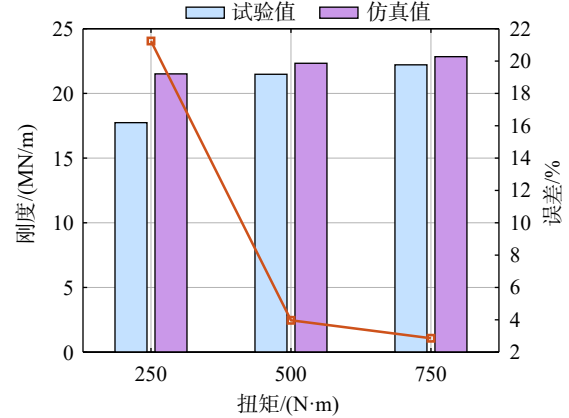


图 19 花键刚度值试验与仿真结果对比

Fig. 19 Comparison between test and simulation results of spline stiffness

通过对比, 仿真所得花键刚度值整体大于试验所测刚度值, 一方面是由于试验件不可避免的制造误差等导致各个花键齿啮合状态的不同, 降低了花键刚度; 另一方面, 试验件的齿面微观形貌将削弱理想花键表面的接触刚度, 而仿真模型中的齿面为理想花键齿面, 故仿真所得花键接触刚度值较大。

4 结 论

本文以某型号航空发动机低压转子系统花键连接结构为对象, 通过简化和缩尺设计, 建立花键结构接触变形仿真模型, 依据简化模型搭建花键结构接触变形测试试验台, 探究花键接触刚度在不同扭矩、横向力作用下的变化规律, 并和仿真结果进行对比。本文主要结论如下:

1) 根据仿真结果, 花键结构的变形量随横向力的增大而增大; 随着传递扭矩的增大, 测点的变形量呈现非线性下降趋势, 测点处刚度略微增加, 且扭矩越大, 增加趋势越小。

2) 根据试验结果, 测点的变形在加载和卸载阶段出现迟滞环, 导致花键刚度随载荷的增加而逐渐降低, 卸载过程中, 花键刚度随载荷降低而降低。

3) 试验过程中, 花键刚度值随着传递扭矩、横向力、加卸载等边界条件的变化而一直变化, 故针对花键刚度的测量与确定, 需要给出具体的边界条件。

4) 相同边界条件下, 仿真所得花键刚度平均值为 22.23 MN/m, 试验所得花键刚度平均值为 20.48 MN/m, 两者误差为 8.54%, 仿真结果与试验

结果有较好的一致性。

本文研究结果为航空发动机低压转子系统花键结构的刚度研究提供一定参考。

参考文献:

- [1] 《航空发动机设计手册》总编委会. 航空发动机设计手册: 第 19 册 转子动力学及整机振动[M]. 北京: 航空工业出版社, 2001.
- [2] ZHAO Guang, ZHAO Xiangyang, QIAN Liting, et al. A review of aviation spline research[J]. *Lubricants*, 2023, 11(1): 1-19.
- [3] 王永亮, 赵广, 孙绪聪, 等. 航空花键研究综述[J]. 航空制造技术, 2017, 60(3): 91-100.
WANG Yongliang, ZHAO Guang, SUN Xucong, et al. Review on research of aviation spline[J]. *Aeronautical Manufacturing Technology*, 2017, 60(3): 91-100. (in Chinese)
- [4] 赵广, 李盛翔, 郭梅, 等. 航空花键振动磨损预测与实验[J]. 航空动力学报, 2018, 33(12): 2958-2964.
ZHAO Guang, LI Shengxiang, GUO Mei, et al. Prediction and experiment of vibration wear of aviation spline[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2018, 33(12): 2958-2964. (in Chinese)
- [5] CURÀ F, MURA A. Evaluation of the fretting wear damage on crowned splined couplings[J]. *Procedia Structural Integrity*, 2017, 5: 1393-1400.
- [6] 肖立, 徐颖强, 陈智勇, 等. 直升机浮动渐开线花键微动磨损影响因素分析[J]. 航空动力学报, 2021, 36(4): 751-766.
XIAO Li, XU Yingqiang, CHEN Zhiyong, et al. Analysis of influencing factors of fretting wear with helicopter floating involute spline[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(4): 751-766. (in Chinese)
- [7] MARMOL R A, SMALLEY A J, TECZA J A. Spline coupling induced nonsynchronous rotor vibrations[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1980, 102(1): 168-176.
- [8] ZHAO Guang, LIU Zhansheng, CHEN Feng. Meshing force of misaligned spline coupling and the influence on rotor system[J]. *International Journal of Rotating Machinery*, 2008, 2008(1): 1-8.
- [9] 赵广. 转子-联轴器-轴承-隔振器系统耦合动力学特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.
ZHAO Guang. Study on coupled dynamics of rotor-coupling-bearing-isolator system[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2009. (in Chinese)
- [10] SILVERS J E, SORESENSEN C, CHASE K. A new statistical model for predicting tooth engagement and load sharing in involute splines [C]//American Gear Manufacturers Association Fall Technical Meeting 2010. Alexandria, US: American Gear Manufacturers Association, 2010: 1-17.
- [11] HONG J, TALBOT D, KAHRAMAN A. A semi-analytical load distribution model for side-fit involute splines[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 76: 39-55.
- [12] HONG J, TALBOT D, KAHRAMAN A. A stiffness formulation for spline joints[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2016, 138(4): 043301.
- [13] 陈曦, 廖明夫, 李全坤. 带套齿联轴器的转子系统动力学特性研究[J]. 推进技术, 2015, 36(7): 1069-1077.
CHEN Xi, LIAO Mingfu, LI Quankun. Dynamic characteristics of a rotor system with a spline coupling[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2015, 36(7): 1069-1077. (in Chinese)
- [14] YU Pingchao, WANG Cun, LIU Yunlong, et al. Analytical modeling of the lateral stiffness of a spline coupling considering teeth engagement and influence on rotor dynamics[J]. *European Journal of Mechanics: A Solids*, 2022, 92: 104468.
- [15] XUE Xiangzhen, HUO Qixin, DEARN K D, et al. Involute spline couplings in aero-engine: predicting nonlinear dynamic response with mass eccentricity[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, 2021, 235(1): 75-92.
- [16] XUE Xiangzhen, HUO Qixin, LIU Jian, et al. Nonlinear dynamic load analysis of aviation spline coupling with mass eccentricity and misalignment[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2021, 13(2): 168781402199651.
- [17] BARROT A, PAREDES M, SARTOR M. Determining both radial pressure distribution and torsional stiffness of involute spline couplings[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, 220(12): 1727-1738.
- [18] BARROT A, PAREDES M, SARTOR M. Extended equations of load distribution in the axial direction in a spline coupling[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2009, 16(1): 200-211.
- [19] SUM W S, LEEN S B, WILLIAMS E J, et al. Efficient finite element modelling for complex shaft couplings under non-symmetric loading[J]. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2005, 40(7): 655-673.
- [20] LIU Shuguo, MA Yanhong, ZHANG Dayi, et al. Studies on dynamic characteristics of the joint in the aero-engine rotor system[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 29: 120-136.
- [21] LIU Shuguo, WANG Jun, HONG Jie, et al. Dynamics design of the aero-engine rotor joint structures based on experimental and numerical study[C]//Proceedings of the ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea and Air. Glasgow, US: ASME, 2010: 1-12.
- [22] MEDINA S, OLIVER A V. Regimes of contact in spline couplings [J]. *Journal of Tribology*, 2002, 124(2): 351-357.
- [23] KU C P R, WALTON J F Jr, LUND J W. Dynamic coefficients of axial spline couplings in high-speed rotating machinery[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1994, 116(3): 250-256.
- [24] ROBINS R R. Tooth engagement evaluation of involute spline couplings[D]. Provo, US: Brigham Young University, 2008.
- [25] 廖仲坤, 陈果, 王海飞. 套齿联轴器对航空发动机振动特性的影响[J]. 中国机械工程, 2015, 26(10): 1312-1319.
LIAO Zhongkun, CHEN Guo, WANG Haifei. Effects of gear coupling on aero-engine vibration characteristics[J]. *China Mechanical Engineering*, 2015, 26(10): 1312-1319. (in Chinese)
- [26] CURÀ F, MURA A. Experimental procedure for the evaluation of tooth stiffness in spline coupling including angular misalignment[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 40(2): 545-555.
- [27] O'DONNELL W J. The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1960, 27(3): 461.

(编辑: 陈 越)