

文章编号: 1000-8055(2024)11-20220332-11

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20220332

## 偏心旋转环状周期结构参激振动分析

魏振航<sup>1</sup>, 王世宇<sup>1, 2, 3</sup>, 王一凡<sup>1</sup>

(1. 天津大学 机械工程学院, 天津 300350;

2. 天津大学 机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300350;

3. 天津大学 天津市非线性动力学与控制重点实验室, 天津 300350)

**摘 要:** 针对偏心旋转环状周期结构的参激振动问题, 利用 Hamilton 原理建立了含时变激励的动力学模型, 分析了不同附加支撑的拓扑结构及其参数组合对固有频率分裂的影响, 应用 Floquet 理论预测了不稳定域, 揭示了固有频率分裂与稳定性的关系, 还分析了分组支撑拓扑结构的振动波数、组内夹角及节径夹角对稳定性的影响, 并据此提出一种改善稳定性的方法。结果表明: 附加支撑的拓扑结构与波数满足一定条件时, 固有频率发生分裂, 参激振动被激起, 参激不稳定域主要出现在固有频率及其线性组合处; 参激不稳定域随组内夹角呈现周期性变化, 节径夹角对各不稳定域的影响不同。

**关 键 词:** 偏心旋转环状周期结构; 旋转支撑; 参激振动; 固有频率分裂; 参激稳定性

中图分类号: V214.4

文献标志码: A

## Parametric vibration analyses of eccentric rotational ring-shaped periodic structures

WEI Zhenhang<sup>1</sup>, WANG Shiyu<sup>1, 2, 3</sup>, WANG Yifan<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China;

2. Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design,

Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300350, China;

3. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Control,

Tianjin University, Tianjin 300350, China)

**Abstract:** A dynamic model with time-varying excitation of eccentric rotating structures was established based on Hamilton principle to solve the parametric vibration problem of eccentric rotational ring-shaped periodic structures. The influences of topological structures with different supports and parameter combinations on natural frequency splitting were analyzed. Floquet theory was used to calculate the instability regions for different parameters, and the relationship between the natural frequency splitting and the instability regions was revealed. In addition, the influences of wavenumbers, intergroup angle, and the angle between the radius and rotary supports of grouping topology on the stability were analyzed, based on which a method for improving stability was proposed. The results showed that natural frequencies splitting and the parameter excitation arose when the topology of the rotary supports and wavenumbers met some specific relationships. The parametric instability mainly appeared at the natural frequency and their linear combinations. The instability regions changed periodically with the intergroup

收稿日期: 2022-05-13

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFB2001300); 国家自然科学基金(52175109, 51721003)

作者简介: 魏振航(2000—), 男, 博士生, 主要从事机械系统动力学研究。

通信作者: 王世宇(1974—), 男, 教授, 博士, 主要从事旋转机械的动力学对称性研究。E-mail: wangshiyu@tju.edu.cn

引用格式: 魏振航, 王世宇, 王一凡. 偏心旋转环状周期结构参激振动分析[J]. 航空动力学报, 2024, 39(11): 20220332. WEI Zhenhang, WANG Shiyu, WANG Yifan. Parametric vibration analyses of eccentric rotational ring-shaped periodic structures[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(11): 20220332.

angle, and the angle between the radius and rotary supports had different influences on each instability region.

**Keywords:** eccentric rotational ring-shaped periodic structures; rotational supports; parametric vibration; natural frequency splitting; parametric stability

由于结构紧凑, 承载均匀, 航空航天领域常应用各类旋转对称部件以实现驱动、传动及能量传递等功能, 如行星传动、滚动轴承、发动机转子等<sup>[1-2]</sup>, 该类部件均呈现旋转周期结构特征。由于制造安装误差或某些场合的特殊要求, 该类部件通常呈现偏心旋转状态。在偏心旋转载荷作用下极易产生振动和噪声问题。

现有文献已针对偏心旋转部件的振动问题开展了深入研究<sup>[3-7]</sup>。Badger 等<sup>[3]</sup>探讨了砂轮偏心和跳动对磨削力、波纹度、砂轮磨损和颤振的影响, 并根据磨削参数和偏心率建立了预测砂轮振动轮廓的模型。岳二团等<sup>[4]</sup>研究了气隙偏心对永磁电动机转子振动的影响, 讨论了不同偏心和负载类型与系统振动的关系。Donát 等<sup>[5]</sup>考虑电动机定子和转子之间的机电耦联作用, 研究了由转子组件偏心安装导致的气隙偏心对系统的影响。Hashemi 等<sup>[6]</sup>利用应变梯度理论研究了考虑陀螺效应和转动惯量的偏心微转轴的三维弯曲振动, 并利用 Galerkin 法得到固有频率及偏心激励下的振幅。Liang 等<sup>[7]</sup>针对偏心电磁谐波齿轮传动系统, 建立了变形和振动方程, 研究了柔性环的位移分布及偏心距等参数对固有频率的影响。

在旋转支撑作用下, 周期结构通常呈现参激振动。为了获得响应的近似解析解, 前人通常采用摄动法求解参激振动问题。Canchi 等<sup>[8]</sup>应用多尺度法研究了圆环弯曲振动的参数不稳定特性。Wu 等<sup>[9]</sup>利用摄动法和 Galerkin 离散推导了弹性支撑下圆环的固有频率和振型表达式, 并研究了不同支撑参数对固有频率的影响。另外, 还有学者利用数值法研究参激振动问题。Zhang 等<sup>[10]</sup>利用 Floquet 理论分析了刚性转子-轴承系统的稳定性, 讨论了不平衡力、轴承载荷等对不稳定域的影响。黄迪山等<sup>[11]</sup>针对二自由度参数振动问题, 利用三角级数逼近方法, 成功解决了振动求解问题。辛健强等<sup>[12]</sup>利用有限元法建立了时变转速下裂纹圆柱壳的有限元模型, 并利用 Bolotin 方法分析了参数稳定性, 研究了不同参数对不稳定域的影响规律。Dai 等<sup>[13]</sup>分析了受周期轴向载荷的旋转圆柱壳的参数稳定性, 并利用 Floquet 理论确

定了参数失稳区。Zhao 等<sup>[14]</sup>采用解析和数值方法研究了双环结构的参激振动, 揭示了基本参数与系统失稳的关系。值得注意的是, 目前关于偏心旋转部件的参激振动问题的研究还相对较少。

本文拟研究偏心旋转环状周期结构的参激振动。首先, 利用能量法建立考虑移动支撑的解析动力学模型, 然后采用经典振动理论分析不同支撑拓扑结构与固有频率分裂的映射关系, 最后利用 Floquet 理论预测系统的不稳定域, 分析旋转支撑拓扑结构、组内夹角和节径夹角等对不稳定域的影响, 并据此提出抑制参激不稳定的方法。

## 1 数学建模

### 1.1 模型描述

图 1 为偏心旋转环状周期结构的几何模型, 该结构绕其几何中心  $O$  以角速度  $\Omega$  顺时针自转, 同时还绕偏心  $O'$  以角速度  $\Omega_a$  沿固定刚性轨道逆时针公转。圆环内侧受离散移动支撑  $k_j$  作用, 且各支撑以相同的转速  $\Omega_r$  绕几何中心  $O$  旋转, 各支撑与半径的夹角均为  $\beta$  ( $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ )。不失一般性, 可将支撑刚度的分布规律表示为  $k(\theta, t)$ 。

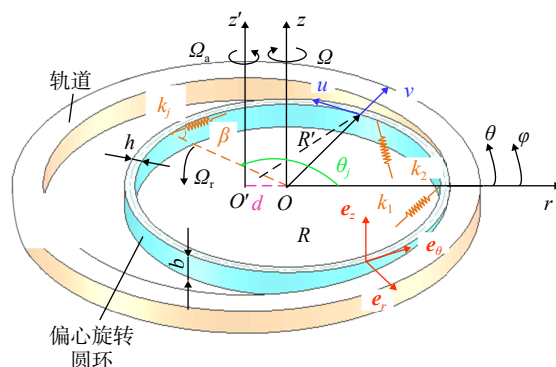


图 1 偏心旋转环状周期结构几何模型

Fig. 1 Geometric model of an eccentric rotating ring-shaped periodic structure

为了便于描述运动, 图 1 建立了惯性坐标系  $O'-r\varphi z'$  及随动坐标系  $O-r\theta z$ , 两坐标系的极点分别位于几何中心  $O$  和偏心  $O'$ , 随动坐标系的极轴沿  $O'O$  方向。圆环中性面上任意一点  $(r, \theta)$  处的切向和径向位移分别为  $u$  和  $v$ ,  $e_r$ 、 $e_\theta$ 、 $e_z$  分别为径向、

切向和轴向单位矢量。 $R$ 、 $R'$ 、 $d$ 、 $b$ 、 $h$ 、 $E$  和  $\rho$  分别表示圆环中性圆半径、偏心半径、偏心距、轴向厚度、径向厚度、弹性模量和密度。

### 1.2 内力分布

在圆环偏心运动的过程中, 假设圆环与轨道之间无相对滑动, 则圆环的自转与公转转速满足

$$\Omega R = \Omega_a (R + d) \quad (1)$$

由文献 [15] 可知, 偏心运动时, 圆环中性面上任一点  $(r, \theta)$  处的切向和径向离心力分别为

$$\begin{cases} F_{cu} = \rho A \Omega^2 d \sin \theta \\ F_{cv} = \rho A R (\Omega^2 + \Omega_a^2) + \rho A \Omega_a^2 d \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

另外, 轨道对圆环的支反力为

$$F_b = d \Omega_a^2 \int_0^{2\pi} \rho A R d \theta \quad (3)$$

离心力和轨道支反力引起的内力分布可由叠加法分别求得, 径向和切向力产生的内力分布分别为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} f_1(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \theta) \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2} \right] \\ f_2(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \theta) \cos \theta + \frac{\sin \theta}{2} \right] \end{cases} \quad (4)$$

综上可得圆环的切向内力为

$$F_\theta = F_{\theta v} + F_{\theta u} + F_{\theta b} \quad (5)$$

其中  $F_{\theta v}$ 、 $F_{\theta u}$  和  $F_{\theta b}$  分别代表由径向离心力、切向离心力和轨道支反力产生的内力分布。

如图 2 所示, 可由  $(0, \theta)$  和  $(\theta, 2\pi)$  两部分叠加求得切向离心力产生的内力分布

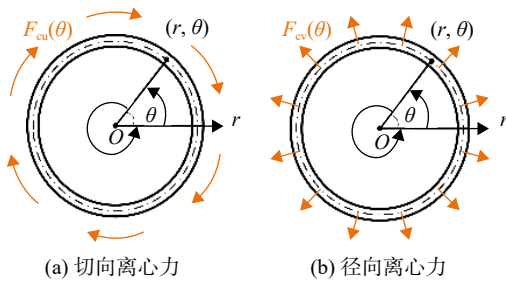


图 2 离心力产生的内力分布

Fig. 2 Distributions of internal forces produced by centrifugal forces

$$\begin{aligned} F_{\theta u} = & \int_0^\theta F_{cu}(\alpha) \cdot f_2(\theta - \alpha) R d\alpha + \\ & \int_0^{2\pi-\theta} F_{cu}(\theta + \alpha) \cdot f_2(2\pi - \alpha) R d\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

同理, 径向离心力为

$$\begin{aligned} F_{\theta v} = & \int_0^\theta F_{cv}(\alpha) \cdot f_1(\theta - \alpha) R d\alpha + \\ & \int_0^{2\pi-\theta} F_{cv}(\theta + \alpha) \cdot f_1(2\pi - \alpha) R d\alpha \end{aligned} \quad (7)$$

轨道支反力产生的内力分布为

$$F_{\theta b} = f_1(\theta) \cdot F_b \quad (8)$$

### 1.3 能量表达

如图 1 所示, 随动坐标系下  $(r, \theta)$  处的位置矢量和偏心距位置矢量可分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (R + v) \mathbf{e}_r + u \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{OO}' = d \cos \theta \mathbf{e}_r - d \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (9)$$

则圆环上  $(r, \theta)$  处的速度  $\mathbf{v}_a$  可表示为

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_r \quad (10)$$

其中  $\mathbf{v}_a$  为合成速度,  $\mathbf{v}_c$  为相对速度,  $\mathbf{v}_r$  为牵连速度, 且有

$$\mathbf{v}_c = \frac{d}{dt} [(R + v) \mathbf{e}_r + u \mathbf{e}_\theta], \quad \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\Omega}_a \times \mathbf{OO}'$$

因此, 圆环的动能为

$$T = \frac{1}{2} b \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \rho |\mathbf{v}_a|^2 r d\theta dr \quad (11)$$

圆环的势能包括弹性振动引起的应变能  $U_1$ 、由离心力产生的应变能  $U_2$  和由附加支撑引起的弹性势能  $U_3$ 。在平面应变状态下,  $(r, \theta)$  处的切向应变为<sup>[17]</sup>

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^l + \frac{1}{2} [(\varepsilon_\theta^l)^2 + (\phi_z^l)^2] + \frac{r-R}{R} \cdot \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta} \quad (12)$$

式中  $\phi_z$  为轴向扭角, 且

$$\varepsilon_\theta^l = \frac{1}{R} \left( v + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \quad \phi_z^l = \frac{1}{R} \left( u - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

则

$$U_1 = b \int_0^{2\pi} \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \frac{1}{2} E \varepsilon_\theta^2 r dr d\theta \quad (13)$$

式中  $A = bh$ , 表示圆环截面积,  $I = bh^3/12$ , 为圆环主惯性矩。离心力产生的应变能可表示为

$$U_2 = \int_0^{2\pi} F_\theta \left\{ \varepsilon_\theta^l + \frac{1}{2} [(\varepsilon_\theta^l)^2 + (\phi_z^l)^2] \right\} R d\theta \quad (14)$$

附加支撑产生的弹性势能为

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k(\theta, t) \cdot (u \sin \beta + v \cos \beta)^2 d\theta \quad (15)$$

综上, 圆环势能可表示为

$$U_r = U_1 + U_2 + U_3 \quad (16)$$

#### 1.4 数学模型

由于系统中仅存在保守力,为保守系统,这里可利用 Hamilton 原理建模,有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U_r) dt = 0 \quad (17)$$

将式(11)和式(16)代入式(17),求解变分极值问题,并通过引入  $\Omega = \omega_m \Omega_v$  ( $\omega_m = \sqrt{\rho A R^4 / EI}$ ),  $\Omega_a = \omega_m \Omega_{av}$ ,  $\bar{t} = t / \omega_m$ ,  $\bar{u} = u / R$ ,  $\bar{v} = v / R$  和  $\bar{k} = kR / EA$ , 进行无量纲运算,忽略非线性项和方程右端项,

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{av}^2 - \left( \frac{AR^2}{I} + 1 + \Omega_{av}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \left( 2\Omega_{av}^2 + \frac{AR^2}{I} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = k \begin{bmatrix} \frac{AR^2 \sin^2 \beta}{I} & \frac{AR^2 \sin 2\beta}{2I} \\ \frac{AR^2 \sin 2\beta}{2I} & \frac{AR^2 \cos^2 \beta}{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{d\Omega_{av}^2}{R} \begin{bmatrix} f_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1 \right) + f_2 \frac{\partial}{\partial \theta} & f_2 + 2f_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \\ - \left( f_2 + 2f_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & f_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1 \right) + f_2 \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$f_1 = (\pi - \theta) \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2}, \quad f_2 = (\pi - \theta) \cos \theta - \frac{3 \sin \theta}{2}$$

其中  $\mathbf{M}_1$  为质量算子矩阵,为 2 阶单位矩阵,  $\mathbf{G}_1$  为阻尼算子矩阵,  $\mathbf{K}_0$  为刚度算子矩阵,  $\mathbf{K}_1$  为附加支撑刚度算子矩阵,  $\mathbf{D}$  为支反力产生的附加刚度算子矩阵。

## 2 方程离散

### 2.1 均布支撑

假设  $N$  个弹簧支撑沿圆环周向等间隔分布,刚度大小均为  $k_0$ ,则支撑刚度分布函数可表示为

$$k = k_0 \sum_{j=1}^N \delta(\theta - \theta_j - \Omega_i t + 2m\pi) \quad (19)$$

式中  $\delta$  表示 Dirac's delta 函数,用于描述离散支撑位置,  $\theta_j = 2\pi(j-1)/N$ ,表示初始时刻第  $j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, N$ ) 个支撑的位置,  $m$  为整数,且  $0 \leq \theta - \theta_j - \Omega_i t + 2m\pi \leq 2\pi$ 。

应用 Galerkin 方法<sup>[18]</sup>对数学模型进行离散,为此假设

$$\begin{cases} u(\theta, t) = U e^{in\theta} + \tilde{U} e^{-in\theta} \\ v(\theta, t) = V e^{in\theta} + \tilde{V} e^{-in\theta} \end{cases} \quad (20)$$

进而得到无量纲自由振动动力学模型。为了表达方便,采用  $t$ 、 $u$ 、 $v$  和  $k$  分别代替  $\bar{t}$ 、 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$  和  $\bar{k}$ ,最终可得

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 + \mathbf{D}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = 2\Omega_v \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & 1 \\ -1 & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - \left( 2\Omega_{av}^2 + \frac{AR^2}{I} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{AR^2}{I} + \Omega_{av}^2 \left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \end{bmatrix}$$

式中  $i$  为虚数单位,“ $\sim$ ”表示复共轭,且  $U$ 、 $V$  均为时间的复函数,有

$$\begin{cases} U = x_u + iy_u \\ V = x_v + iy_v \end{cases}$$

式中  $x_u$ 、 $y_u$ 、 $x_v$  和  $y_v$  均为时间的实函数,定义内积

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x \bar{y} d\theta \quad (21)$$

将式(19)和式(20)代入式(18),然后将其与  $e^{in\theta}$  做内积运算,之后分离虚实部,并写为矩阵形式,可得

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_j \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} x_u & y_u & x_v & y_v \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2n\Omega_v & 2\Omega_v & 0 \\ 2n\Omega_v & 0 & 0 & 2\Omega_v \\ -2\Omega_v & 0 & 0 & -2n\Omega_v \\ 0 & -2\Omega_v & 2n\Omega_v & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} K_j^{11} & K_j^{12} & K_j^{13} & K_j^{14} \\ K_j^{21} & K_j^{22} & K_j^{23} & K_j^{24} \\ K_j^{31} & K_j^{32} & K_j^{33} & K_j^{34} \\ K_j^{41} & K_j^{42} & K_j^{43} & K_j^{44} \end{bmatrix}$$

式中  $\mathbf{M}_2$  为质量矩阵,是 4 阶单位矩阵,  $\mathbf{G}_2$  为陀螺矩阵,  $\mathbf{K}_j$  为刚度矩阵,且

$$K_j^{11} = A_1 + A_2 + A_3 + (N + A_8) A_6$$

$$K_j^{22} = A_1 + A_2 - A_3 + (N - A_8) A_6$$

$$K_j^{33} = A_1 + A_3 + A_4 + (N + A_8) A_7$$

$$\begin{aligned}
K_j^{44} &= A_1 - A_3 + A_4 + (N - A_8) A_7 \\
K_j^{12} &= -A_6 A_9, \quad K_j^{13} = (N + A_8) A_5 \\
K_j^{14} &= -B_1 - A_5 A_9, \quad K_j^{23} = B_1 - A_5 A_9 \\
K_j^{24} &= (N - A_8) A_5, \quad K_j^{34} = -A_7 A_9 \\
K_j^{21} &= K_j^{12}, \quad K_j^{31} = K_j^{13}, \quad K_j^{32} = K_j^{23} \\
K_j^{41} &= K_j^{14}, \quad K_j^{42} = K_j^{24}, \quad K_j^{43} = K_j^{23} \\
A_1 &= \frac{\Omega_{av}^2 (R - d) (1 + n^2)}{R}, \quad A_2 = n^2 \left( \frac{AR^2}{I} + 1 \right) \\
A_3 &= \frac{d \Omega_{av}^2 (n^2 - 1)}{R (1 - 4n^2)}, \quad A_4 = n^4 + \frac{AR^2}{I} \\
A_5 &= \frac{AR^2 k_0 \sin 2\beta}{4\pi I}, \quad A_6 = \frac{AR^2 k_0 \sin^2 \beta}{2\pi I} \\
A_7 &= \frac{k_0 AR^2 \cos^2 \beta}{2\pi I}, \quad A_8 = \cos 2n\Omega_r t \sum_{j=1}^N \cos 2n\theta_j \\
A_9 &= \sin 2n\Omega_r t \sum_{j=1}^N \cos 2n\theta_j \\
B_1 &= n \left[ \frac{2(d-R)\Omega_{av}^2}{R} - \left( n^2 + \frac{AR^2}{I} \right) \right]
\end{aligned}$$

根据三角函数的加和性质, 当  $2n/N$  不为整数时,  $A_8$  和  $A_9$  均为 0, 当  $2n/N$  为整数时,  $A_8 = N \cos 2n\Omega_r t$ ,  $A_9 = N \sin 2n\Omega_r t$ 。

## 2.2 分组支撑

若支撑共有  $N_1$  组, 每组内有  $N_2$  个弹簧, 支撑刚度大小均为  $k_0$ , 则其分布函数可写为

$$k = k_0 \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \delta(\theta - \theta_{p,q} - \Omega_r t + 2m\pi) \quad (23)$$

式中  $\theta_{p,q} (\theta_{p,q} = 2\pi(p-1)/N_1 + (q-1)\varphi)$  为  $t=0$  时第  $p$  ( $p=1, 2, 3, \dots, N_1$ ) 组内的第  $q$  ( $q=1, 2, 3, \dots, N_2$ ) 个支

撑的位置角,  $\varphi$  表示同一组内相邻两支撑之间的夹角, 其取值满足  $0 < \varphi < 2\pi/[N_1(N_2-1)]$ ,  $m$  为整数, 其取值满足  $0 \leq \theta - \theta_{p,q} - \Omega_r t + 2m\pi \leq 2\pi$ 。仍然采用 Galerkin 对方程进行离散, 可得与式 (22) 相似的结果。由于支撑刚度仅影响刚度矩阵, 故两者只有刚度矩阵不同, 即

$$M_2 \ddot{q}_1 + G_2 \dot{q}_1 + K_f q_1 = 0 \quad (24)$$

$$K_f = \begin{bmatrix} K_f^{11} & K_f^{12} & K_f^{13} & K_f^{14} \\ K_f^{21} & K_f^{22} & K_f^{23} & K_f^{24} \\ K_f^{31} & K_f^{32} & K_f^{33} & K_f^{34} \\ K_f^{41} & K_f^{42} & K_f^{43} & K_f^{44} \end{bmatrix}$$

$$K_f^{11} = A_1 + A_2 + A_3 + (N_1 N_2 + A'_8) A_6$$

$$K_f^{22} = A_1 + A_2 - A_3 + (N_1 N_2 - A'_8) A_6$$

$$K_f^{33} = A_1 + A_3 + A_4 + (N_1 N_2 + A'_8) A_7$$

$$K_f^{44} = A_1 - A_3 + A_4 + (N_1 N_2 - A'_8) A_7$$

$$K_f^{12} = -A_6 A'_9, \quad K_f^{13} = (N_1 N_2 + A'_8) A_5$$

$$K_f^{14} = -B_1 - A_5 A'_9, \quad K_f^{23} = B_1 - A_5 A'_9$$

$$K_f^{24} = (N_1 N_2 - A'_8) A_5, \quad K_f^{34} = -A_7 A'_9$$

$$K_f^{21} = K_f^{12}, \quad K_f^{31} = K_f^{13}, \quad K_f^{32} = K_f^{23}$$

$$K_f^{41} = K_f^{14}, \quad K_f^{42} = K_f^{24}, \quad K_f^{43} = K_f^{23}$$

$$A'_8 = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \cos 2n(\theta_{p,q} + \Omega_r t)$$

$$A'_9 = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sin 2n(\theta_{p,q} + \Omega_r t)$$

与均布模型相比, 此处的  $A'_8$  和  $A'_9$  的取值难以通过波数和支撑个数的关系来判定, 其取值还受支撑组内参数的影响, 表 1 给出了不同参数组合下  $A'_8$  和  $A'_9$  的取值。

表 1 不同波数和支撑参数下矩阵元素取值

Table 1 Values of matrix elements for different wavenumbers and support parameters

| $2n/N_1$ | $n, N_2, \varphi$                               | $A'_8$                                                                                | $A'_9$                                                                                |
|----------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 不为整数     |                                                 | 0                                                                                     | 0                                                                                     |
| 为整数      | $\sin nN_2\varphi = 0, \sin n\varphi \neq 0$    | 0                                                                                     | 0                                                                                     |
|          | $\sin n\varphi = 0$                             | $N_1 N_2 \cos 2n\Omega_r t$                                                           | $N_1 N_2 \sin 2n\Omega_r t$                                                           |
|          | $\sin nN_2\varphi \neq 0, \sin n\varphi \neq 0$ | $\frac{N_1 \sin N_2 n\varphi \cos [2n\Omega_r t + (N_2 - 1)n\varphi]}{\sin n\varphi}$ | $\frac{N_1 \sin N_2 n\varphi \sin [2n\Omega_r t + (N_2 - 1)n\varphi]}{\sin n\varphi}$ |

### 3 动力学特性

#### 3.1 基本参数

表 2 给出了一个典型偏心旋转环状周期结构的参数, 其中圆环的径厚比满足薄环假设。下面将根据表 2 和式(22)和式(24)研究系统的动力学特性。若无特别说明, 下文所用参数均以表 2 为准。为便于分析计算, 刚度、圆环转速、支撑转速等均采用无量纲参数。根据无量纲过程, 这里用偏心率  $\eta$  表征偏心程度, 且  $\eta=d/R$ 。

表 2 偏心环状周期结构基本参数

Table 2 Parameters of an eccentric ring-shaped periodic structure

| 参数                                  | 取值      |
|-------------------------------------|---------|
| 中性圆半径 $R/10^{-2}$ m                 | 3.00    |
| 径向厚度 $h/10^{-3}$ m                  | 2.00    |
| 轴向厚度 $b/10^{-3}$ m                  | 5.00    |
| 弹性模量 $E/10^{11}$ Pa                 | 2.06    |
| 密度 $\rho/10^3$ (kg/m <sup>3</sup> ) | 7.85    |
| 偏心率 $\eta$                          | 1/3     |
| 节径夹角 $\beta$                        | $\pi/8$ |
| 刚度 $k_0$                            | 0.5     |

#### 3.2 固有频率

根据经典振动学理论, 可通过改写式(22)和

式(24)得到特征方程, 进而求解系统特征值, 得到固有频率。由于主要讨论刚度拓扑结构引起的固有频率分裂, 重点关注静止圆环的固有频率分裂规律。图 3 描述了不同支撑刚度拓扑结构下圆环转速、支撑个数和波数对固有频率的影响。图中分别给出了系统的第 1 阶、第 2 阶固有频率, 实线与虚线分别表示正、余弦模态。图 3(a)和图 3(b)描述了支撑刚度均布时固有频率随圆环自转速度的变化情况。在图 3(a)中,  $2n/N_1=2 \times 3/6=1$ , 为整数, 固有频率在圆环静止时分裂, 即: 支撑刚度引起了固有频率分裂。而在图 3(b)中  $2n/N_1=2 \times 3/4=3/2$ , 不为整数, 固有频率重合。

在分组支撑下, 固有频率分裂不仅受  $2n/N_1$  的影响, 还与组内参数有关<sup>[19]</sup>。图 3(c)~图 3(f)描述了分组支撑下固有频率随圆环自转速度的变化规律, 当  $2n/N_1$  不为整数时, 如图 3(c)所示, 固有频率重合; 当  $2n/N_1$  为整数时, 固有频率是否分裂还取决于支撑的组内参数, 例如在图 3(d)中,  $2n/N_1=2 \times 3/2=3$  为整数,  $\sin n\varphi=\sin \pi=0$ , 此时固有频率分裂; 在图 3(e)中,  $2n/N_1$  为整数, 但  $\sin n\varphi \neq 0$  且  $\sin nN_2\varphi=0$ , 固有频率重合; 对于图 3(f),  $2n/N_1$  为整数,  $\sin n\varphi \neq 0$  且  $\sin nN_2\varphi \neq 0$ , 支撑刚度引起固有频率分裂。综上可得固有频率的具体分裂规律, 如表 3 所示, 该规律与文献 [19] 一致。根据表 3

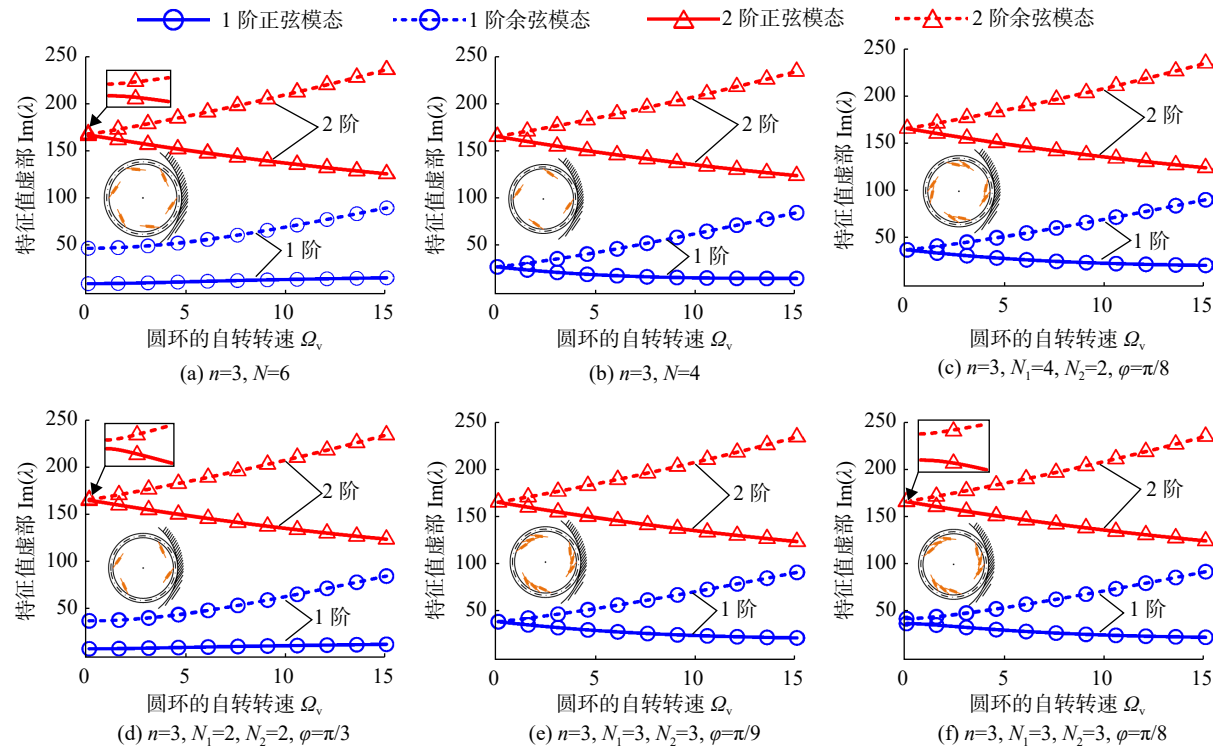


图 3 固有频率随圆环自转速度的变化规律

Fig. 3 Natural frequencies versus rotation speed of the ring

表 3 固有频率分裂规律

Table 3 Natural frequency splitting rules

| 支撑刚度<br>拓扑结构 | 参数组合                                                             | 固有频率 |
|--------------|------------------------------------------------------------------|------|
| 均布           | $2n/N$ 不为整数                                                      | 重合   |
|              | $2n/N$ 为整数                                                       | 分裂   |
| 分组           | $2n/N_1$ 不为整数                                                    | 重合   |
|              | $2n/N_1$ 为整数, $\sin n\varphi \neq 0$ , $\sin nN_2\varphi = 0$    | 重合   |
|              | $2n/N_1$ 为整数, $\sin n\varphi \neq 0$ , $\sin nN_2\varphi \neq 0$ | 分裂   |
|              | $2n/N_1$ 为整数, $\sin n\varphi = 0$                                | 分裂   |

可知,在附加支撑均布时,可直观地通过  $2n/N$  是否为整数来判别支撑刚度是否引起频率分裂,而在支撑分组分布时,除了分组数  $N_1$ ,还需要判别组内参数的关系才可预测固有频率是否分裂。

### 3.3 动力学稳定性

由于式(22)与式(24)均具有时变特征,无法求得解析解,因此采用 Floquet 理论预测系统的稳定性,并求解响应。经简单分析可知,当支撑刚度未引起固有频率分裂时,参激受到抑制,不予考虑。可将式(22)与式(24)改写为

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{Q} \quad (25)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \dot{\mathbf{q}}_1^T \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A}(t + T_m) = \mathbf{A}(t)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_b & -\mathbf{G}_2 \end{bmatrix}$$

式中  $\mathbf{Q}(t)$  为包含状态变量的  $8 \times 1$  矩阵,  $\mathbf{0}$  与  $\mathbf{I}$  分别为零矩阵和单位矩阵,  $\mathbf{K}_b$  为刚度矩阵,均布支撑下  $\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_j$ , 分组支撑下  $\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_r$ ,  $\mathbf{G}_2$  为陀螺矩阵。由式(22)与式(24)可知,  $\mathbf{A}(t)$  中的时变项分别为  $A_8$ 、 $A_9$  和  $A'_8$ 、 $A'_9$ , 它们拥有共同的时变频率  $\omega_t = 2n\Omega_r$ , 故  $\mathbf{A}(t)$  为周期矩阵, 时变周期为  $T_t = 2\pi/\omega_t$ , 可根据 Floquet 理论, 通过周期矩阵近似构造转换矩阵, 进而根据特征乘子判别系统的稳定性<sup>[20]</sup>。根据表 2 和式(25)可得系统不稳定域。在计算过程中, 圆环的自转转速取  $\Omega_v = 10$ 。

图 4 为不同拓扑结构下系统不稳定域随支撑转速和刚度的变化情况。其中, 图 4(a)和图 4(b)为均布刚度支撑下系统的不稳定域, 图 4(c)和图 4(d)为分组刚度支撑下的不稳定域。可以看出, 系统存在 3 个不稳定域, 为了表述方便, 根据支撑转速分别用低频不稳定域、中频不稳定域和高频不稳定域表示, 依次对应  $\omega_t = 2\omega_{n1}$ 、 $\omega_t = \omega_{n1} + \omega_{n2}$  和  $\omega_t = 2\omega_{n2}$ , 其中,  $\omega_{n1}$  与  $\omega_{n2}$  分别为系统的第 1、2 阶

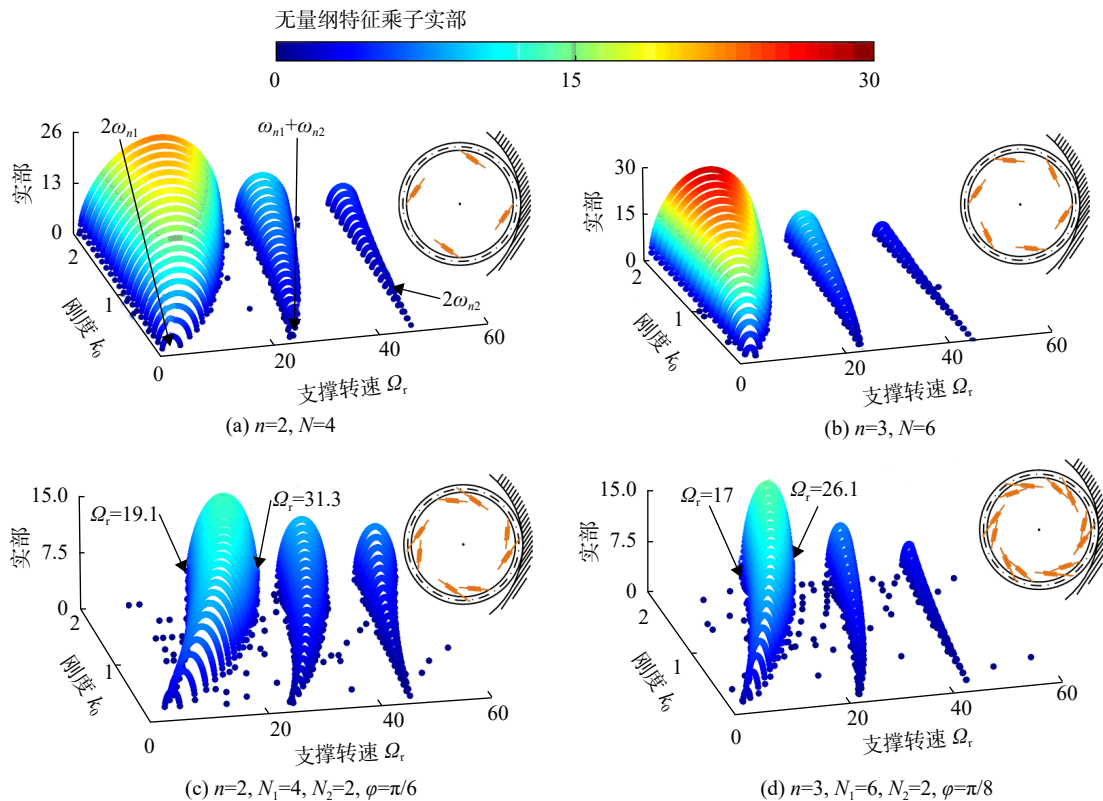


图 4 参激不稳定域

Fig. 4 Parametric instability regions

正弦模态固有频率。

经对比发现,低频不稳定域最大,随着支撑刚度转速的增大,不稳定域依次变窄,不稳定程度依次降低;随着支撑刚度的增大,各不稳定域扩大,不稳定性增加,这是由于随着刚度的增大,式(22)和式(24)中参激项的系数逐渐增大,使得参激不稳定程度加剧。另外,随着支撑刚度变大,3个不稳定域逐渐靠拢,该现象在分组时尤为显著。图中给出了 $k_0=2$ 处低频不稳定域的范围,对比可知, $n=3$ 时的不稳定域明显较 $n=2$ 时的不稳定域窄。

### 3.4 结果验证

为了验证不稳定域的正确性,这里选取图4(a)中的点,通过4阶变步长Runge-Kutta法求解响应。图5为图4(a)的俯视图,图中共选取了6个验证点,其中I、III、V分别位于3个不稳定域,II、IV、VI均位于稳定域。各点的参数组合( $\Omega_r, k_0$ )分别为I(10, 1.6)、II(15, 0.4)、III(30, 1)、IV(40, 1.3)、V(48, 1.8)和VI(55, 0.8)。

图6为各参考点时域动态响应。可以看到,图6(a)、图6(c)和图6(e)呈现颤振不稳定特征,其余各图均呈现出稳态响应特征。数值计算结果

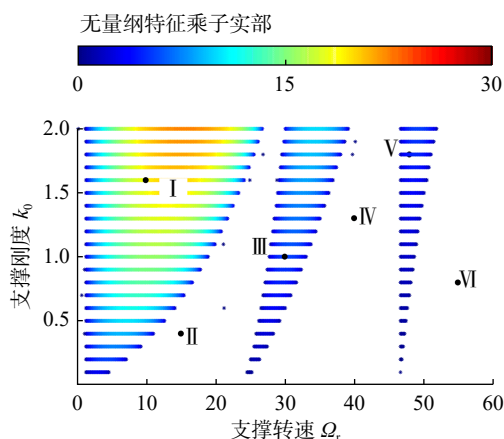


图5 不稳定域验证点

Fig. 5 Verification points of the instability regions

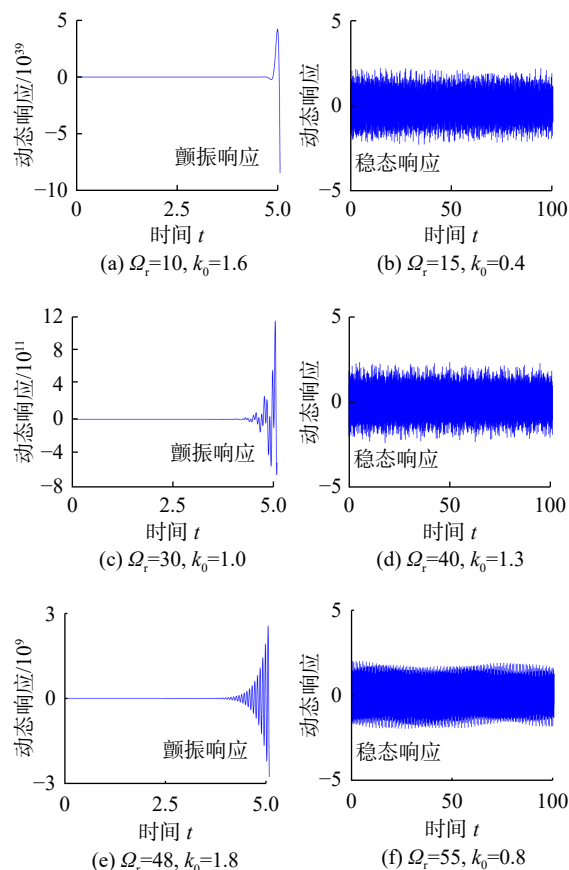


图6 验证点的时域动态响应

Fig. 6 Time-domain dynamic responses at the verification points

与预测结果相符。

图4描述了小偏心距( $\eta < 1$ )时的参激不稳定域,工程实际中也通常出现大偏心距( $\eta > 1$ )的情况,图7和图8分别描述了大偏心距时均布支撑且不同波数下系统的稳态和非稳态响应,其中偏心率 $\eta=6$ ,刚度 $k_0=0.2$ 。图中实线表示圆环变形前的形状,虚线表示圆环变形后形状。为了描述圆环的真实运动状态,图中截取了圆环在轨道上公转至轨道不同位置时的振动响应。对比图7和图8可知,在相同的初始条件下,圆环的稳态和非

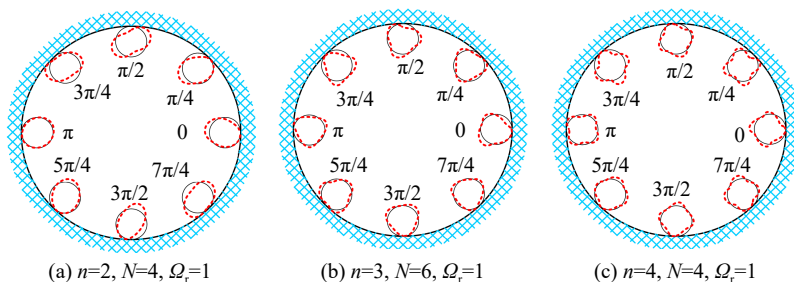


图7 不同波数下的稳定响应

Fig. 7 Stable responses for different wavenumbers

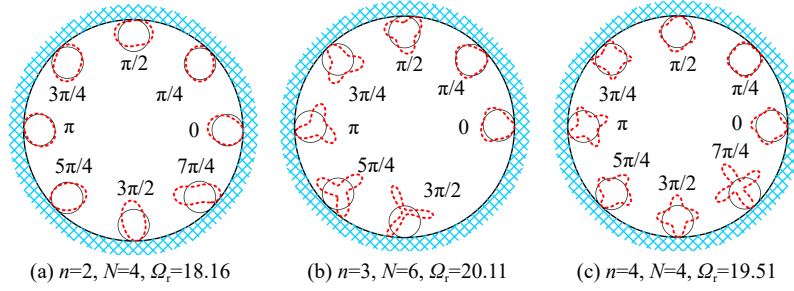


图 8 不同波数下的不稳定响应

Fig. 8 Unstable responses for different wavenumbers

稳态响应随时间呈现不同的变化。在图 7 中, 由于各参数区间落在稳定域, 因此圆环变形始终处于一定范围内; 反之, 图 8 中的各参数区间落在非稳定域, 随着时间的推移, 圆环的变形越来越大, 直至失稳。

### 3.5 参激振动分析

当旋转支撑刚度呈分组分布时, 除了支撑的组数  $N_1$  和组内个数  $N_2$ , 组内夹角  $\varphi$  也是影响稳定域的重要因素之一。图 9 描述了支撑转速和组内夹角对不稳定性的影响。可以看出, 3 个不稳定

域随组内夹角增大均呈现周期性变化。在图 9(a) 的  $\varphi=\pi/2$  处和图 9(c) 的  $\varphi=\pi/3$  处, 系统分别由参数组合为  $\{n, N_1, N_2\}=\{2, 2, 2\}$  和  $\{3, 3, 2\}$  的分组分布, 退化为参数组合为  $\{n, N\}=\{2, 4\}$  和  $\{3, 6\}$  的均匀分布, 退化后的参数  $2n/N$  为整数且  $N=N_1N_2$ , 不稳定域最大; 在图 9(b) 的  $\varphi=\pi/4$  处和图 9(d) 的  $\varphi=\pi/9$  处, 系统分别由参数组合为  $\{n, N_1, N_2\}=\{2, 4, 2\}$  和  $\{3, 6, 3\}$  的分组分布退化参数组合为  $\{n, N\}=\{2, 8\}$  和  $\{3, 18\}$  的均匀分布, 退化后的参数  $2n/N$  不为整数, 此时系统稳定。

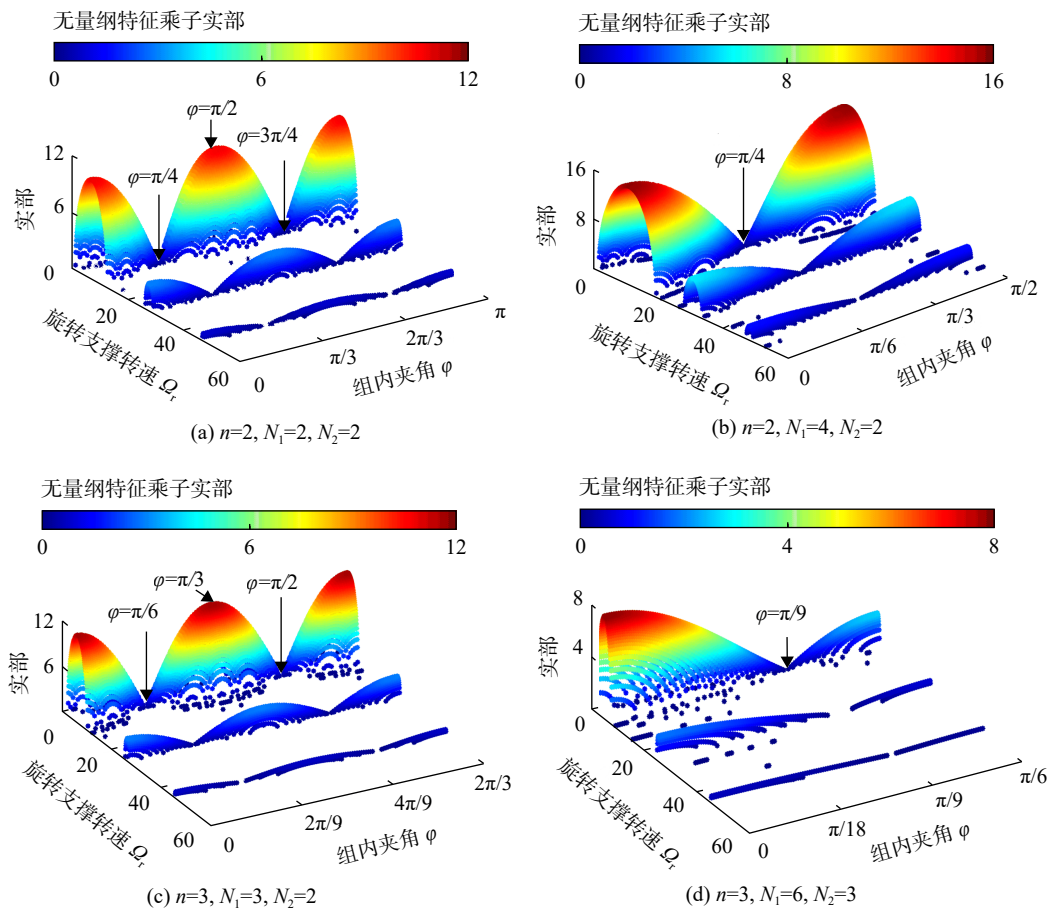


图 9 组内夹角对参数不稳定的影响

Fig. 9 Influences of intergroup angle on instability regions

综上所述,在分组拓扑结构中,若  $2n/(N_1N_2)$  为整数,应避免采用均布结构以提高系统的稳定性;反之,若  $2n/(N_1N_2)$  不为整数,则可考虑将支撑形式由分组改为均布以提高系统的稳定性。除了上述退化情形,图 9 中不稳定域最小的位置均出现在  $\sin nN_2\varphi=0$  处,此时方程中参激项的系数为零,参激被抑制。故在系统不退化的前提下,可使参数尽量满足  $\sin nN_2\varphi=0$  以提高稳定性。

支撑刚度的节径夹角  $\beta$  对参数不稳定域的影响如图 10 所示,其中图 10(a)与图 10(b)分别为支撑均布和分组的情况。不同于组内夹角,节径

夹角对 3 个稳定域的影响并不一致。对于低频不稳定域,当  $\beta=0^\circ$  时,不稳定域最大,不稳定程度最高;反之,对于高频情形, $\beta=0^\circ$  时不稳定域最窄,不稳定程度最低;中频不稳定域表现为低频和高频的组合结果。该现象源于 3 个不稳定域对应不同类型的固有频率,其中低频不稳定域对应圆环的 1 阶正弦模态固有频率, $\beta=0^\circ$  时,支撑沿径向,激起圆环的 1 阶振动,不稳定域最大;而高频不稳定域对应 2 阶正弦模态固有频率, $\beta=0^\circ$  时,圆环的 2 阶振动被抑制,不稳定域最小。在工程中可通过改变节径夹角以提高稳定性。

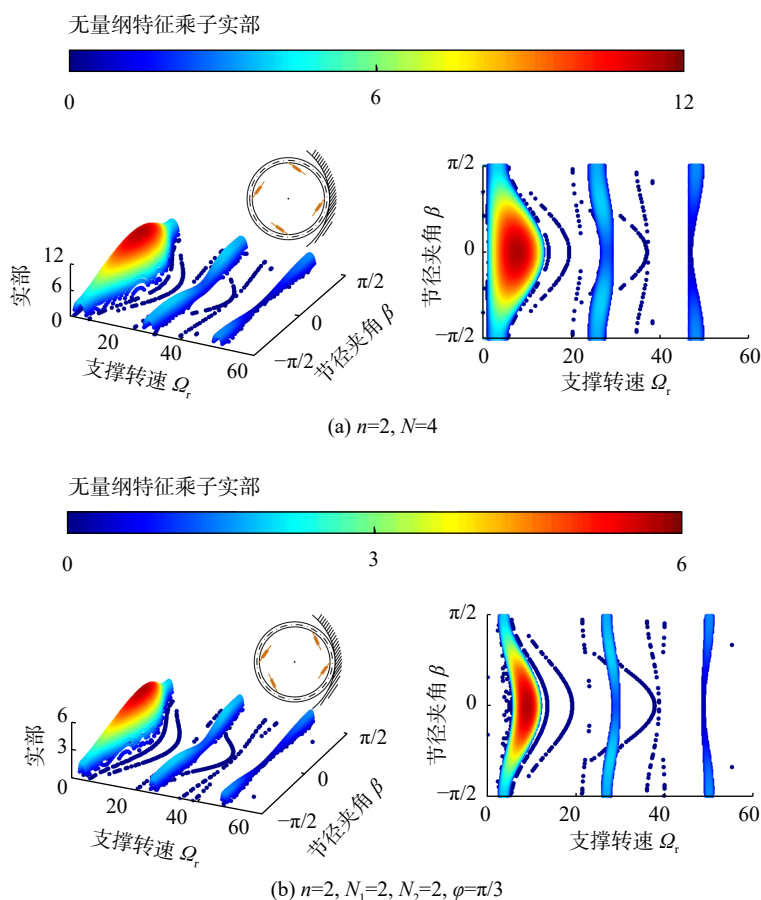


图 10 节径夹角对参数不稳定的影响

Fig. 10 Influences of angle between the radius and rotary supports on parametric instability

## 4 结 论

本文以工程实际中常见的偏心环状结构为对象,研究了该结构在均布和分组附加支撑下的参激振动问题。主要工作及结论如下:

1) 考虑旋转支撑刚度和偏心公转的影响,利用 Hamilton 原理和 Galerkin 离散建立了不同刚度拓扑结构下的时变动力学模型。

2) 均布和分组附加支撑均影响固有频率分裂。对于均布支撑,固有频率是否分裂仅取决于  $2n/N$  是否为整数;而对于分组支撑,固有频率是否分裂不仅取决于波数和分组数,还受组内参数影响。

3) 基于时变动力学模型,采用 Floquet 理论预测了不同参数下的不稳定域,并利用变步长 Runge-Kutta 法验证了结果。另外,揭示了组内夹

角和节径夹角对不稳定域的影响规律, 并据此提出了改善系统稳定性的方法。

## 参考文献:

- [1] 杨建明, 张策, 林忠钦, 等. 行星齿轮传动动力学特性研究进展[J]. 航空动力学报, 2003, 18(2): 299-304.  
YANG Jianming, ZHANG Ce, LIN Zhongqin, et al. An extensive review of elasto-dynamics of planetary gear trains[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(2): 299-304. (in Chinese)
- [2] 袁雪, 张岩松, 邱大明, 等. 航空发动机转子轴向力动态特征测试技术[J]. 航空动力学报, 2021, 36(9): 1804-1810.  
YUAN Xue, ZHANG Yansong, QIU Daming, et al. Test technique for dynamic characteristic of rotor axial force on aero-engine [J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(9): 1804-1810. (in Chinese)
- [3] BADGER J, MURPHY S, O'DONNELL G. The effect of wheel eccentricity and Run-out on grinding forces, waviness, wheel wear and chatter[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2011, 51(10/11): 766-774.
- [4] 岳二团, 甘春标, 杨世锡. 气隙偏心下永磁电机转子系统的振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2014, 33(8): 29-34.  
YUE Ertuan, GAN Chunbiao, YANG Shixi. Vibration characteristics analysis of a rotor for a permanent magnet motor with air-gap eccentricity[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(8): 29-34. (in Chinese)
- [5] DONÁT M, DUŠEK D. Eccentrically mounted rotor pack and its influence on the vibration and noise of an asynchronous generator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 344: 503-516.
- [6] HASHEMI M, ASGHARI M. Analytical study of three-dimensional flexural vibration of micro-rotating shafts with eccentricity utilizing the strain gradient theory[J]. Meccanica, 2016, 51(6): 1435-1444.
- [7] LIANG Yongli, XU Lizhong. Coupled dynamics for an electromagnetic harmonic movable-tooth drive system with eccentricity[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 90: 703-718.
- [8] CANCHI S V, PARKER R G. Parametric instability of a rotating circular ring with moving, time-varying springs[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2006, 128(2): 231-243.
- [9] WU Xionghua, PARKER R G. Vibration of rings on a general elastic foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295(1/2): 194-213.
- [10] ZHANG Xuening, HAN Qinkai, PENG Zhike, et al. Stability analysis of a rotor-bearing system with time-varying bearing stiffness due to finite number of balls and unbalanced force[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(25): 6768-6784.
- [11] 黄迪山, 刘成, 张波. 二自由度参数振动自由响应逼近[J]. 振动与冲击, 2019, 38(13): 13-20.  
HUANG Dishan, LIU Cheng, ZHANG Bo. Free response approximation of a 2-DOF parametric vibration system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(13): 13-20. (in Chinese)
- [12] 辛健强, 王建军. 时变转速下裂纹圆柱壳的参数振动稳定性分析[J]. 航空动力学报, 2011, 26(10): 2227-2236.  
XIN Jianqiang, WANG Jianjun. Stability analysis of parametric resonance of a crack cylindrical shell with time-varying rotating speed[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(10): 2227-2236. (in Chinese)
- [13] DAI Qiyi, CAO Qingjie. Parametric instability of rotating cylindrical shells subjected to periodic axial loads[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 146/147: 1-8.
- [14] ZHAO Zhifu, WANG Shiyu. Parametric instability of dual-ring structure with motionless and moving supports[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2016, 11(1): 014501.1-014501.9.
- [15] 王姚志豪, 汪菲, 王世宇, 等. 切向内力对偏心旋转圆环自由振动的影响[J]. 振动与冲击, 2021, 40(17): 7-13.  
WANG Yaozhihao, WANG Fei, WANG Shiyu, et al. Effects of tangential internal force on free vibration of eccentrically rotating ring[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(17): 7-13. (in Chinese)
- [16] BARBER J R. Force and displacement influence functions for the circular ring[J]. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 1978, 13(2): 77-81.
- [17] HUANG S C, SOEDEL W. Effects of Coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 115(2): 253-274.
- [18] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.  
HU Haiyan. Applied nonlinear dynamics[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000. (in Chinese)
- [19] 王世宇, 陈东亮, 刘建平, 等. 分组对称旋转周期结构固有频率分裂解析分析[J]. 天津大学学报, 2012, 45(5): 393-399.  
WANG Shiyu, CHEN Dongliang, LIU Jianping, et al. Analytical analysis on natural frequency splitting of rotationally periodic structure with grouped features[J]. Journal of Tianjin University, 2012, 45(5): 393-399. (in Chinese)
- [20] FRIEDMANN P, HAMMOND C E, WOO T H. Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11(7): 1117-1136.

(编辑: 张 雪)