

## 碟形锥柱型药柱的燃烧规律

杨艳羽, 徐铭泽, 费月, 孙晓霞, 黄金红, 张以亭, 高艳军, 万峻成  
(辽宁北方华丰特种化工有限公司, 辽宁 抚顺 113003)

**摘 要:** 装药设计方法影响发动机内弹道性能, 为提高装药利用率, 分别采用 UG NX 和 MATLAB 软件进行了建模和编程计算, 得到了药柱燃烧过程中燃烧面积推移规律和残药率与设计参数的函数关系图, 进行了算例分析。计算结果表明: 以药柱外径  $D$  为基准, 当环向槽圆弧半径  $r \in (0, 0.05D)$ , 圆柱段内孔半径  $R_2 \in (0.1D, 0.4D)$ , 环向槽圆弧圆心旋转半径  $R_3 \in (R_2, 0.42D)$ , 圆柱段长  $L_2 \in (0.4D, 1.53D)$  时, 药柱燃烧呈现先增面性后减面性。残药率与  $r$  和  $R_2$  的变化趋势同为单调递减, 残药率与  $L_2$  的变化趋势为单调递增, 残药率与  $R_3$  的变化趋势为先增大后减小。从减轻质量, 提高强度和提高了产品加工制造的工艺性等方面综合考虑, 建议优先选择碟形封头。计算结果与实际数据的最大相对误差为 0.078%。

**关 键 词:** 碟形锥柱型药柱; 残药率; 燃烧规律; 固体火箭发动机; 壁厚  
中图分类号: V435 文献标志码: A

## Combustion laws of dished head conic-column grain

YANG Yanyu, XU Mingze, FEI Yue, SUN Xiaoxia, HUANG Jinhong,  
ZHANG Yiting, GAO Yanjun, WAN Juncheng

(Liaoning North Huafeng Special Chemical Limited Company, Fushun Liaoning 113003, China)

**Abstract:** Charge design methods affect the ballistic performance of the engine. In order to improve the charge utilization rate, UG NX and MATLAB software were used for modeling and programming of the calculation, and the function relationship diagram of the combustion surface, the residual drug rate and the design parameters during the combustion process of the drug column was obtained, and finally the example analysis was carried out. The results showed that when  $D$  was defined as the outer diameter of grain, and the relative radius of circular groove  $r$  was  $(0, 0.05D)$ , the relative radius of the hole in the cylindrical section  $R_2$  was  $(0.1D, 0.4D)$ , the relative radius of the circular center of the circular groove  $R_3$  was  $(R_2, 0.42D)$  and the length of the cylinder  $L_2$  was  $(0.4D, 1.53D)$ , the combustion law was progressive at first and then regressive. The waste grain rate and the change trend of  $r$  and  $R_2$  monotonically decreased, the waste grain rate and the change trend of  $L_2$  monotonically increased, and the waste grain rate and the change trend of  $R_3$  first increased and then decreased. From the aspects of weight reduction, improvement of the strength, processing and manufacturing, it is recommended to give priority to the dished head. The maximum relative error between the calculated result and the actual data was 0.078%.

**Keywords:** dished head conic-column grain; waste grain rate; burning law; solid rocket motor; wall thickness

固体火箭发动机的装药是发动机的能源<sup>[1]</sup>。装药的几何形状和尺寸直接影响了发动机的燃气生成率及其变化规律, 也与发动机的压力和推力

随时间的变化曲线息息相关, 同时不同的装药尺寸也决定了燃烧室的容积和质量<sup>[2-9]</sup>。因此装药设计很大程度上决定了发动机内弹道性能和质量

收稿日期: 2022-01-29

作者简介: 杨艳羽(1993—), 女, 工程师, 硕士, 主要从事发动机内弹道设计及火工品技术研究。

通信作者: 徐铭泽(1994—), 男, 助理工程师, 主要从事火工品技术研究。E-mail: 809412396@qq.com

引用格式: 杨艳羽, 徐铭泽, 费月, 等. 碟形锥柱型药柱的燃烧规律[J]. 航空动力学报, 2024, 39(1): 20220050. YANG Yanyu, XU Mingze, FEI Yue, et al. Combustion laws of dished head conic-column grain[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(1): 20220050.

指标的优劣。

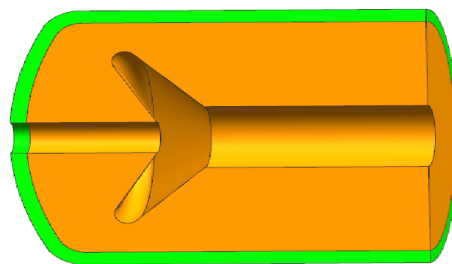
发动机装药按照燃烧方向可分为一维药柱、二维药柱和三维药柱<sup>[2]</sup>。一维药柱通常为端燃药柱,二维药柱包括管形、星形、车轮形等,三维药柱包括短内燃管形、锥孔、开槽管形、球形和锥柱型等<sup>[10-14]</sup>。文献[15]是基于三维参数化建模对翼柱形药柱形状进行了优化。文献[16]运用惠更斯原理进行燃烧面积计算。文献[17]通过几何燃烧规律计算出随燃去肉厚变化半球锥柱型药柱燃烧规律。

封头的形状有平底、半球形、椭球形和碟形等<sup>[18]</sup>。文献[19]对比了平底、半球形和碟形等封头的制造成本和难易程度,建议优选椭圆封头和碟形封头。文献[20]按照两种不同标准的规定对碟形封头几何参数进行分析,标准规定的小圆弧数值与实际设计的计算值存在偏差。文献[21]以碟形封头压力容器为研究对象,得出碟形封头压力容器的直边段内径的变化趋势与目标函数体积的最大值相一致。文献[22]对碟形封头所受压力进行了分析。锥柱型药柱在实际应用时,发现其存在残药,残药过多会降低药柱利用率,造成资源浪费<sup>[23]</sup>。为了保证强度和安全,碟形封头的壁厚设计一般偏大,但设计不合理容易增加制造成本且造成材料浪费。

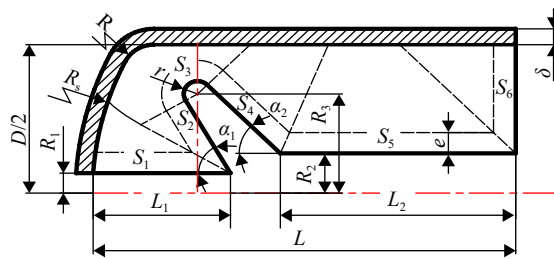
## 1 碟形锥柱型药柱

本文研究的是外表面包覆后的碟形锥柱型药柱,其结构如图1所示。

对碟形锥柱型药柱的几何形状和尺寸设计起主要作用的设计参数有:碟形封头半径 $R$ 和 $R_s$ 。图1中 $D$ 为药柱外径, $L$ 为药柱全长, $L_1$ 和 $L_2$ 分别是药柱前段和圆柱段内孔的长度, $R_1$ 和 $R_2$ 分别为前段内孔和圆柱段内孔的半径, $R_3$ 和 $r$ 分别为环向槽圆弧圆心旋转半径和环向槽圆弧半径, $\delta$ 为壁厚,



(a) 三维示意图



(b) 剖面、各个燃烧面随燃去肉厚 $e$ 的变化情况

图1 碟形锥柱型药柱示意图

Fig. 1 Schematic of dished head conic-column grain

$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 为环向槽锥面倾角(文中的倾角参数单位为rad)。图1中的虚线表示与燃去肉厚 $e$ 对应的燃烧面积变化轮廓。

## 2 碟形锥柱型药柱燃烧

### 2.1 曲线弧绕坐标轴旋转所得旋转体的侧面积

曲线弧绕坐标轴旋转所得旋转体的侧面积如下:

$$S = 2\pi \bar{y} l \quad (1)$$

其中 $l$ 为圆弧的长度, $\bar{y}$ 为圆弧的质心纵坐标<sup>[24]</sup>。

### 2.2 燃烧过程中燃去肉厚特征点的确定

碟形锥柱型药柱在整个燃烧过程中共有7个燃去肉厚特征点(见图2)。

1)  $e_1$ 为圆弧 $BC$ 所在燃烧面积分裂点

$e_1$ 与环向槽圆弧半径、环向槽圆弧圆心旋转半径和外径之间的关系如下:

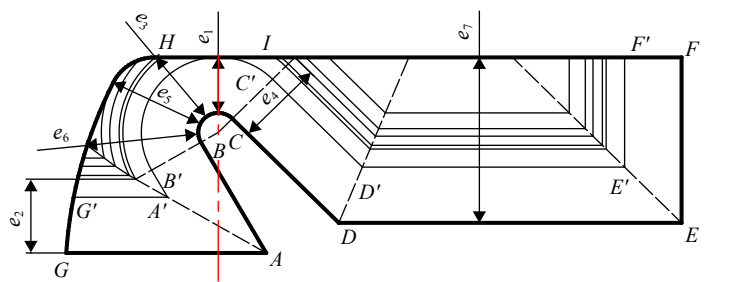


图2 燃烧过程中的燃去肉厚特征点

Fig. 2 Characteristic points of burning meat thickness in the combustion process

$$e_1 = \frac{D}{2} - r - R_3 \quad (2)$$

2)  $e_2$  为线段  $A'B'$  所在锥面消失点

动点  $A'$  与动点  $B'$  的坐标重合, 因此可以得到

$$e_2 = \frac{R_3 - R_1 - r \cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1} \quad (3)$$

$$(e_3 + r)^2 = (e_1 + r)^2 + \left\{ L_1 - \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha_1 - r}{\sin \alpha_1} - \left[ R_3 - \sqrt{(R_3 - R)^2 - \left( \frac{D}{2} - R \right)^2} \right] \right\}^2 \quad (4)$$

由此方程可解出  $e_3$ 。

4)  $e_4$  为圆弧  $B'C'I$  所在燃烧面积消失点

由于  $e_1$  所在的直线垂直于线段  $C'F'$  的延长线, 且  $e_1$  与  $e_4$  的夹角是  $\alpha_2$ , 可得

$$e_4 = \frac{r + e_1}{\cos \alpha_2} - r \quad (5)$$

5)  $e_5$  为圆弧  $B'H$  与碟形封头下半圆圆弧相交点

$e_5$  为圆弧  $B'C'$  左段 ( $B'H$ ) 绕药柱轴线旋转所形成的环向槽圆弧面燃烧至碟形封头以  $R_s$  为半径的下半圆圆弧绕药柱轴线旋转所形成的内表面时

$$\beta_3 = \sqrt{\left[ \frac{2\beta_1\beta_2(D-2R)}{(D-2R)^2 + 4\beta_1} \right]^2 - \frac{(\beta_2^2 - R_s)(D-2R)^2}{(D-2R)^2 + 4\beta_1}} + \frac{2\beta_1\beta_2(D-2R)}{(D-2R)^2 + 4\beta_1} - R_s + L_1 - \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha_1 - r}{\sin \alpha_1} \quad (9)$$

$$\beta_4 = \frac{2\beta_1}{D-2R} \beta_3 + \frac{R_s^2 + \beta_1^2 + \left( \frac{D}{2} \right)^2 - DR}{D-2R} - R_3 \quad (10)$$

6)  $e_6$  为线段  $A'G'$  所在圆柱面与圆弧  $B'H$  所在燃烧面积同时消失至侧面时的燃去肉厚

$$(e_6 + r)^2 = (e_6 + R_1 - R_3)^2 + \left[ \sqrt{R_s^2 - (R_1 + e_6)^2} + R_s - L_1 + \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha_1 - r}{\sin \alpha_1} \right]^2 \quad (11)$$

7) 药柱完全燃完点  $e_7$

$e_7$  为药柱全部燃完时的燃去肉厚, 也是药柱的最大燃去肉厚。

$$e_7 = \frac{D}{2} - R_2 \quad (12)$$

由式(12)可知, 当  $R_2$  取值为 0 时, 最大燃去肉厚的极限值为  $D/2$ 。

### 2.3 药柱燃烧面积计算

根据回转体侧表面积计算原理分别推导了各

3)  $e_3$  为圆弧  $B'H$  与碟形封头上半圆圆弧相交点

$e_3$  为圆弧  $B'C'$  左段 ( $B'H$ ) 绕药柱轴线旋转所形成的环向槽圆弧面燃烧至碟形封头以  $R$  为半径的上半圆圆弧绕药柱轴线旋转所形成的内表面时的燃去肉厚。

的燃去肉厚。

由于  $e_5$  为碟形封头上半圆弧和下半圆弧的相交点, 因此可以联立方程求出, 即

$$e_5 = \sqrt{\beta_3^2 + \beta_4^2} - r \quad (6)$$

其中

$$\beta_1 = \sqrt{(R_s - R)^2 - \left( \frac{D}{2} - R \right)^2} \quad (7)$$

$$\beta_2 = \frac{R_s^2 + \beta_1^2 + \left( \frac{D}{2} \right)^2 - DR}{D - 2R} \quad (8)$$

个燃烧面积的公式, 其具体位置参见图 3。其中点  $A'$  的运动轨迹为  $\angle BAG$  的角平分线, 点  $D'$  的运动轨迹是  $\angle CDE$  的角平分线, 点  $E'$  的运动轨迹是  $\angle DEF$  的角平分线。  $BB' \perp AB$ ,  $CC' \perp CD$ ,  $FF' \perp EF$ 。

1)  $S_1$  为线段  $A'G'$  绕轴线旋转所形成圆柱表面积 (I 区燃烧面积)

以  $X_1OY_1$  为中心建立直角坐标系, 由于动点  $G'$  的运动轨迹在碟形封头以  $R_s$  为半径的下半圆圆弧上, 则动点  $G'$  的运动轨迹方程为  $X_1^2 + (R_1 + e)^2 = R_s^2$ 。求得  $GG'$  的坐标差为  $X_{G'} - X_G = \sqrt{R_s^2 - R_1^2} - \sqrt{R_s^2 - (e + R_1)^2}$ 。由于动点  $A'$  的运动轨迹为  $\angle BAG$  的角平分线, 则  $AA'$  的坐标差为  $X_{A'} - X_A = e \cot \frac{\alpha_1}{2}$ , 所以线段  $A'G'$  的运动方程为

$$A'G' = L_1 - e \cot \frac{\alpha_1}{2} - \left[ \sqrt{R_s^2 - R_1^2} - \sqrt{R_s^2 - (e + R_1)^2} \right] \quad (13)$$

$S_1$  为线段  $A'G'$  绕轴线旋转所形成侧表面积。

当  $e < e_2$  时:

$$S_1 = 2\pi (R_1 + e) \left\{ L_1 - e \cot \frac{\alpha_1}{2} - \left[ \sqrt{R_s^2 - R_1^2} - \sqrt{R_s^2 - (e + R_1)^2} \right] \right\} \quad (14)$$

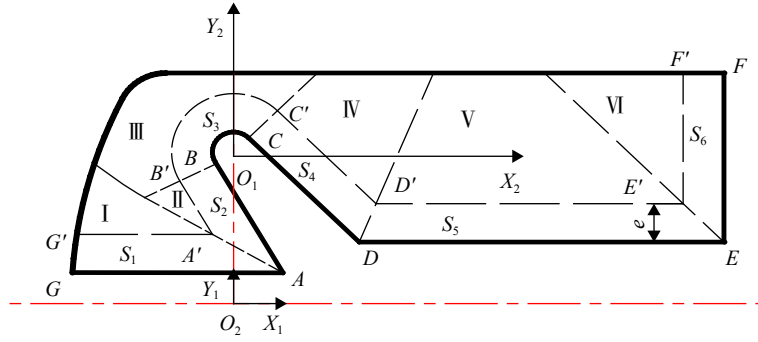


图 3 燃烧过程中燃烧面积区域的划分

Fig. 3 Division of area of burning area in combustion process

当  $e > e_2$  时:

$$S_1 = 2\pi(R_1 + e) \left\{ L_1 - \left[ \sqrt{R_s^2 - R_1^2} - \sqrt{R_s^2 - (e + R_1)^2} \right] - \sqrt{(r + e)^2 - (R_3 - R_1 - e)^2} + \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha_1 - r}{\sin \alpha_1} \right\} \quad (15)$$

2)  $S_2$  为线段  $A'B'$  绕药柱轴线旋转所形成的锥面面积(II 区燃烧面积)

在直角坐标系  $X_2OY_2$  中, 将圆的方程  $X_2^2 + Y_2^2 = r^2$  与直线  $AA'$  和  $BB'$  的方程联立求得交点  $A'$  与  $B'$  (当燃去肉厚  $e = e_2$  时,  $A'$  与  $B'$  重合), 而动点  $A'$  与  $B'$  的坐标为

$$\begin{cases} Y_{A'} = R_1 + e \\ Y_{B'} = R_3 + (r + e) \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = R_3 + (r + e) \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (16)$$

$$S_2 = \pi(Y_{B'} + Y_{A'}) \frac{Y_{B'} - Y_{A'}}{\sin \alpha_1} = \frac{\pi \{ [R_3 - (r + e) \cos \alpha_1]^2 - (R_1 + e)^2 \}}{\sin \alpha_1} \quad (17)$$

3)  $S_3$  为图 3 中以  $O$  为圆心的圆弧  $B'C'$  绕药柱轴线旋转所形成的环向槽圆弧面面积(III 区燃烧面积)

根据定理求出圆弧  $B'C'$  的弧长及其质心到药柱轴线的距离, 即可求出  $S_3$ 。当  $e < e_1$  时, 圆弧  $B'C'$  的弧长

$$l = (r + e)(\pi - \alpha_1 + \alpha_2) \quad (18)$$

圆弧的质心纵坐标

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{l} \quad (19)$$

求得的燃烧面积为

$$S_3 = 2\pi \left[ R_3 + \frac{(r + e)(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}{\pi - \alpha_1 + \alpha_2} \right] (r + e)(\pi - \alpha_1 + \alpha_2) \quad (20)$$

同理, 当  $e_1 < e < e_3$  时, 圆弧  $B'C'$  分为圆弧  $B'H$  和圆弧  $B'I$ 。圆弧  $B'H$  的弧长为

$$l_1 = (r + e) \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \arcsin \frac{(D/2)^2 - R_3^2}{r + e} \right] \quad (21)$$

圆弧  $B'H$  绕药柱轴线旋转所形成的圆弧面面积为

$$S_3 = 2\pi l_1 \cdot \left\{ R_3 + (r + e)^2 \cdot \left[ \sin \alpha_1 - \cos \left( \arcsin \frac{D/2 - R_3}{r + e} \right) \right] / l_1 \right\} \quad (22)$$

圆弧  $B'I$  的弧长为

$$l_2 = (r + e) \left( \arcsin \frac{D/2 - R_3}{r + e} - \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \right) \quad (23)$$

圆弧  $B'I$  绕药柱轴线旋转所形成的圆弧面面积为

$$S_3 = 2\pi l_2 \cdot \left\{ R_3 + (r + e)^2 \cdot \left[ \sin \alpha_2 - \cos \left( \arcsin \frac{D/2 - R_3}{r + e} \right) \right] / l_2 \right\} \quad (24)$$

当  $e_3 < e < e_5$  时, 以直角坐标系  $X_2OY_2$  中  $O$  为圆心, 则燃烧圆弧的过程方程为  $x^2 + y^2 = (r + e)^2$ , 把该方程转化为以  $O$  为圆心的极坐标方程为

$$\begin{cases} x = (r + e) \cos \theta_1 \\ y = (r + e) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (25)$$

将燃烧圆弧与碟形封头以  $R$  为半径的上半圆弧联立方程求得

$$\theta_1 = \arcsin \left[ -\frac{R^2 - (r+e)^2 - \beta_5^2 - \beta_6^2}{2(r+e)\sqrt{\beta_5^2 + \beta_6^2}} \right] - \arctan \left( \frac{-\beta_5}{\beta_6} \right) \quad (26)$$

其中

$$\beta_5 = L_1 - \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha_1 - r}{\sin \alpha_1} - \left[ R_3 - \sqrt{(R_3 - R)^2 - \left( \frac{D}{2} - R \right)^2} \right] \quad (27)$$

$$\beta_6 = \frac{D}{2} - R - R_3 \quad (28)$$

因此圆弧  $B'H$  的弧长为

$$l_3 = (r+e) \left( \pi - \theta_1 + \arcsin \frac{R_3 - R_1 - e}{r+e} \right) \quad (29)$$

圆弧  $B'H$  绕药柱轴线旋转所形成的圆弧面面积为

$$S_3 = 2\pi l_3 \cdot \left[ R_3 + (r+e)^2 \cos \theta_1 + \cos \left( \arcsin \frac{R_3 - R_1 - e}{r+e} \right) \right] / l_3 \quad (30)$$

圆弧  $B'I$  绕药柱轴线旋转所形成的圆弧面面积为

$$S_3 = 2\pi l_4 \cdot \left\{ R_3 + (r+e)^2 \left[ \cos \theta_2 + \cos \left( \arcsin \frac{R_3 - R_1 - e}{r+e} \right) \right] \right\} / l_4 \quad (35)$$

4)  $S_4$  为线段  $C'D'$  绕药柱轴线旋转所形成的锥面面积 (IV 区燃烧面积)

$$\begin{cases} Y_{C'} = R_3 + (r+e) \cos \alpha_2 \\ Y_{D'} = R_2 + e \end{cases} \quad (36)$$

$$S_4 = \pi (Y_{C'} + Y_{D'}) \frac{Y_{C'} - Y_{D'}}{\sin \alpha_2} = \frac{\pi \left\{ [R_3 + (r+e) \cos \alpha_2]^2 - (R_2 + e)^2 \right\}}{\sin \alpha_2} \quad (37)$$

5)  $S_5$  为线段  $D'E'$  绕药柱轴线旋转所得到的圆柱段表面积 (V 区燃烧面积)

$$S_5 = 2\pi (R_2 + e) \left[ L_2 - e \left( 1 + \tan \frac{\alpha_2}{2} \right) \right] \quad (38)$$

6)  $S_6$  为线段  $E'F'$  绕药柱轴线旋转所得到的端面面积 (VI 区燃烧面积)

$$S_6 = \pi \left[ \left( \frac{D}{2} \right)^2 - (R_2 + e)^2 \right] \quad (39)$$

综上, 可以得到碟形锥柱型药柱总燃烧面积  $S$

积公式不变。

当  $e > e_5$  时, 以直角坐标系  $X_2OY_2$  中  $O$  为圆心, 则燃烧圆弧的过程方程为  $x^2 + y^2 = (r+e)^2$ , 把该方程转化为以  $O$  为圆心的极坐标方程如下:

$$\begin{cases} x = (r+e) \cos \theta_2 \\ y = (r+e) \sin \theta_2 \end{cases} \quad (31)$$

将燃烧圆弧与碟形封头以  $R_s$  为半径的下半圆弧联立方程求得

$$\theta_2 = \pi - \arcsin \left[ \frac{R_s^2 - (r+e)^2 - \beta_7^2 - R_3^2}{2(r+e)\sqrt{\beta_7^2 + R_3^2}} \right] - \arctan \left( -\frac{\beta_7}{R_3} \right) \quad (32)$$

其中

$$\beta_7 = R_s - \left[ L_1 - \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha_1 - r}{\sin \alpha_1} \right] \quad (33)$$

因此圆弧  $B'H$  的弧长

$$l_4 = (r+e) \left( \pi - \theta_2 + \arcsin \frac{R_3 - R_1 - e}{r+e} \right) \quad (34)$$

圆弧  $B'H$  绕药柱轴线旋转所形成的圆弧面面积为

$$S = \sum_{i=1}^6 S_i = f(e) \quad (40)$$

## 2.4 长径比对燃烧面积变化规律的影响

长径比为药柱设计的主要参数, 选取长径比分别为 1.5、2、2.5、3 和 3.5 的 5 组药柱对其燃烧面积随燃去肉厚变化进行对比 (见图 4)。对图 4 的横坐标与纵坐标进行了无量纲处理, 后文均同样处理。

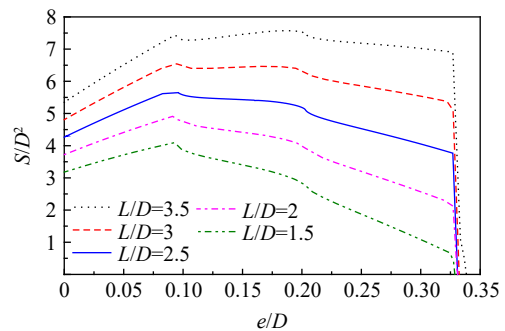


图 4 不同长径比的药柱燃烧面积随  $e$  变化关系

Fig. 4 Relation of the burning area for different aspect ratios changing with  $e$

根据图 4 中的曲线变化可知即使长径比不同的药柱燃烧规律均为先增面性后减面性,且当取值为 2.5 时,曲线相对平缓,更接近恒面

燃烧。

## 2.5 燃烧规律

燃烧面积对燃去肉厚求导得:

$$\begin{aligned} \frac{df(e)}{de} \approx & 2\pi \left[ L_1 + \sqrt{R_s^2 - (R_1 + e)^2} - \sqrt{R_s^2 - R_1^2} - e \cot \frac{\alpha_1}{2} \right] + 2\pi \left[ L_2 - e \left( \tan \frac{\alpha_2}{2} + 1 \right) \right] - \\ & \pi (2R_2 + 2e) - 2\pi (R_2 + e) \left( \tan \frac{\alpha_2}{2} + 1 \right) - 2\pi (R_1 + e) \left[ \cot \frac{\alpha_2}{2} + \frac{2R_1 + 2e}{2\sqrt{R_s^2 - (R_1 + e)^2}} \right] + \\ & 2\pi (\pi - \alpha_1 - \alpha_2) \left[ R_3 + \frac{(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)(e + r)}{\pi - \alpha_1 - \alpha_2} \right] - \pi \frac{2R_1 + 2e + 2\cos \alpha_1 [R_3 - \cos \alpha_1 (e + r)]}{\sin \alpha_1} - \\ & \pi \frac{2R_2 + 2e - 2\cos \alpha_2 [R_3 + \cos \alpha_2 (e + r)]}{\sin \alpha_2} + 2\pi (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)(e + r) \end{aligned} \quad (41)$$

本文主要设计参数共有 12 个,通过采用以外径为基准的无量纲单位,选取长径比为 2.5,选用  $R_s = D$ ,  $r = 0.1D$  的碟形封头,取环向槽锥面倾角  $\alpha_1 = \pi/3$ ,  $\alpha_2 = \pi/4$  后,还剩余  $r$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $L_2$  和  $L_1$  共 6 个设计参数。根据式(41)对于这 6 个设计参数进行敏感度分析(见图 5,图中横坐标为用  $D$  进行无量纲化后的设计参数)。

从图 5 可以看出,对  $df(e)/de$  较敏感的设计参数为  $r$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  和  $L_2$ , 因此联立式(40)和式(41),可得  $df(e)/de$  与  $r$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $L_2$  的关系图(见图 6~

图 9)。图中 Z 面表示  $df(e)/de=0$  的平面。

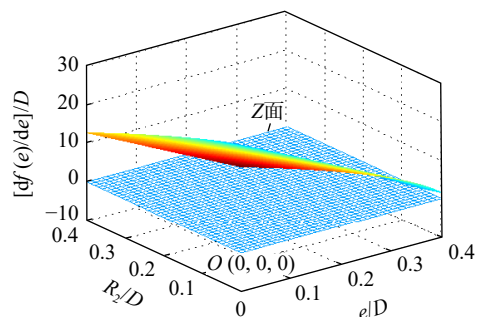


图 7  $df(e)/de$  与  $R_2$  的变化关系

Fig. 7 Relative relationship between  $df(e)/de$  and  $R_2$

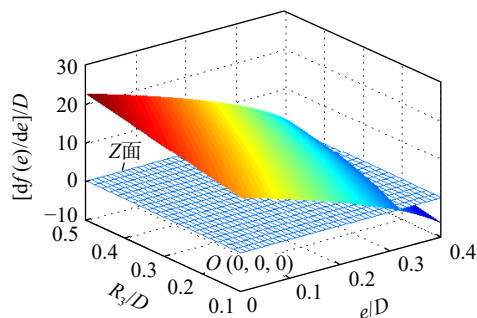


图 8  $df(e)/de$  与  $R_3$  的变化关系

Fig. 8 Relative relationship between  $df(e)/de$  and  $R_3$

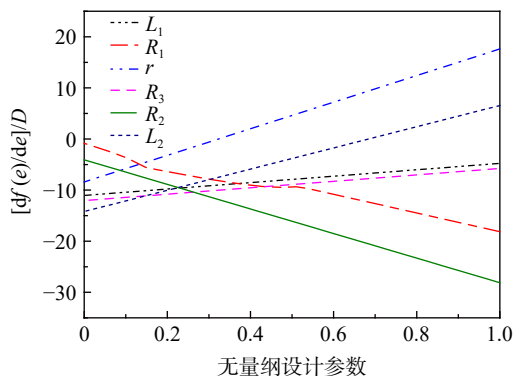


图 5 设计参数与  $df(e)/de$  的变化关系

Fig. 5 Relative relationship between  $df(e)/de$  and design variables

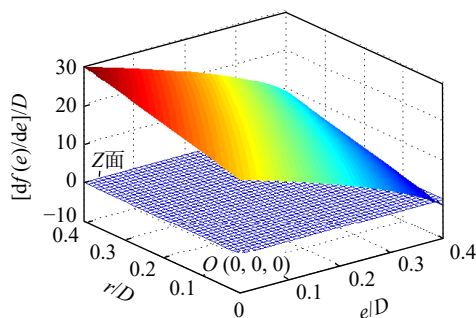


图 6  $df(e)/de$  与  $r$  的变化关系

Fig. 6 Relative relationship between  $df(e)/de$  and  $r$

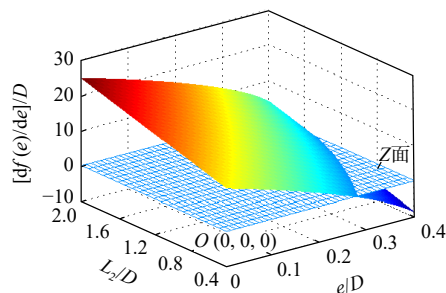


图 9  $df(e)/de$  与  $L_2$  的变化关系

Fig. 9 Relative relationship between  $df(e)/de$  and  $L_2$

图6表示在燃烧过程中,  $df(e)/de$ 与 $r$ 的变化关系。由图6可知, 当 $0 < r < 0.05D$ 时, 药柱燃烧呈现先增面性后减面性; 当 $0.05D < r < 0.4D$ 时,  $df(e)/de > 0$ , 药柱燃烧呈单增面性。

图7表示在燃烧过程中,  $df(e)/de$ 对 $R_2$ 的变化关系。由图7可知, 当 $0 < R_2 < 0.1D$ 时,  $df(e)/de > 0$ , 药柱燃烧呈单增面性; 当 $0.1D < R_2 < 0.4D$ 时, 药柱燃烧呈现先增面性后减面性。

图8表示在燃烧过程中,  $df(e)/de$ 对 $R_3$ 的变

化关系。由图8可知, 当 $R_2 < R_3 < 0.42D$ 时, 药柱燃烧呈现先增面性后减面性; 当 $0.42D < R_3 < 0.5D$ 时,  $df(e)/de > 0$ , 药柱燃烧呈单增面性。

图9表示在燃烧过程中,  $df(e)/de$ 对 $L_2$ 的变化关系。由图9可知, 当 $0.4D < L_2 < 1.53D$ 时, 药柱燃烧呈现先增面性后减面性; 当 $L_2 > 1.53D$ 时,  $df(e)/de > 0$ , 药柱燃烧呈单增面性。

## 2.6 残药率的计算

装药总体积 $V_0$ 为

$$V_0 \approx \frac{\pi}{6} L_1 D^2 + \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \left( L - \frac{L_1}{2} \right) - \pi L_1 R_1^2 - \pi L_2 R_2^2 - \pi (R_3 + r \cos \alpha_1 - R_1) \cdot \frac{(R_3 + r \cos \alpha_1)^2 + R_1^2 + (R_3 + r \cos \alpha_1) R_1}{3 \tan \alpha_1} - \pi (R_3 + r \cos \alpha_2 - R_2) \cdot \frac{(R_3 + r \cos \alpha_2)^2 + R_2^2 + (R_3 + r \cos \alpha_2) R_2}{3 \tan \alpha_2} - 2\pi r (R_3 + r)^2 \quad (42)$$

残药体积 $V_r$ 为

$$V_r = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \left( L - \frac{D}{2} - e \right) - \pi (R_2 + e)^2 \left[ L_2 - e \left( 1 + \tan \frac{\alpha_2}{2} \right) \right] - \frac{\pi [R_3 + (r + e) \cos \alpha_2 - R_2 - e] \{ [R_3 + (r + e) \cos \alpha_2]^2 + (R_2 + e)^2 + [R_3 + (r + e) \cos \alpha_2] (R_2 + e) \}}{3 \tan \alpha_2} \quad (43)$$

残药率 $\eta$ 为

$$\eta = \frac{V_r}{V_0} \quad (44)$$

残药为环向槽与前段燃完点之后的药剂, 因为当药柱燃烧到该点后药剂燃烧所产生的能量已经无法满足做功的要求。图10和图11分别给出了残药率与 $r$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ 和 $L_2$ 的关系。

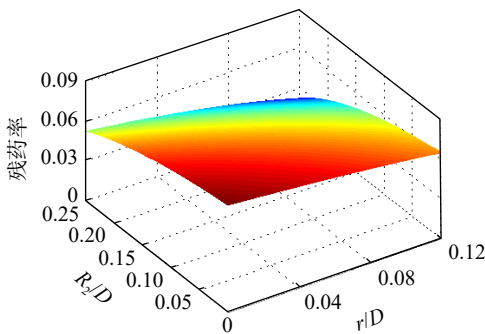


图10 残药率与 $r$ 、 $R_2$ 的变化关系

Fig. 10 Relative relationship between waste grain rate,  $r$  and  $R_2$

图10表示残药率与 $r$ 和 $R_2$ 的变化关系。残药率与 $r$ 和 $R_2$ 的曲线变化具有单调性, 且随着 $r$ 和 $R_2$ 的增大而减小, 呈现单调递减的趋势。

图11表示残药率与 $L_2$ 和 $R_3$ 的变化关系。残

药率随着 $L_2$ 的增大而增大, 呈现单调递增的趋势。残药率与 $R_3$ 的曲线变化不具有单调性, 但具有凹凸性。残药率随着 $R_3$ 的增大曲线的变化趋势为先增大后减小, 即为凸函数。

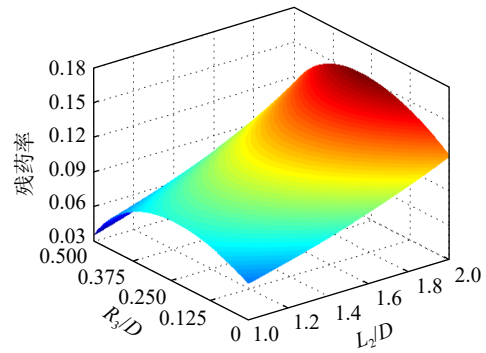


图11 残药率与 $R_3$ 、 $L_2$ 的变化关系

Fig. 11 Relative relationship between waste grain rate,  $L_2$  and  $R_3$

## 3 碟形锥柱型药柱的特点

### 3.1 壁厚 $\delta$ 估算

壁厚的估算分为两部分, 分别是金属筒体的估算和封头壁厚的估算。

#### 3.1.1 金属筒体的估算

由最大应力强度理论可知, 圆筒的最小壁厚

估算公式为

$$\delta_{\min} = \frac{\varphi p_{\max} D_i}{2\xi[\sigma] - p_{\max}} \quad (45)$$

其中  $p_{\max}$  为高温下壳体内的最大工作压力,  $\varphi$  为压力波动系数,  $[\sigma]$  为材料许用应力,  $\xi$  为焊缝强度系数,  $D_i$  为筒体内径。

### 3.1.2 封头壁厚的估算

碟形封头的最小壁厚估算公式<sup>[2]</sup> 为

$$\delta_{\text{dish}} = \frac{\varphi p_{\max} D_i m}{4[\sigma] - \varphi p_{\max} m} \quad (46)$$

其中  $m$  为形状系数, 当  $m > 2$  时, 封头强度弱于筒体, 否则情况相反, 因此通常  $m$  取值为 2。

球形封头的最小壁厚估算公式为

$$\delta_{\text{ball}} = \frac{\varphi p_{\max} D_i}{4[\sigma] - \varphi p_{\max}} \quad (47)$$

平底封头的最小壁厚估算公式为

$$\delta_{\text{flat}} = D_i \sqrt{\frac{K p_{\max}}{[\sigma] \varphi}} \quad (48)$$

其中  $K$  为形状系数。

根据式(46)~式(48), 假设除封头形状不同以外, 其他条件均相同的情况下, 即  $p_{\max}$ 、 $\varphi$ 、 $[\sigma]$ 、 $\xi$  和  $D_i$  参数均取相同数值, 则  $\delta_{\text{ball}} < \delta_{\text{dish}} < \delta_{\text{flat}}$ 。根据封头尺寸系数表可知, 封头的质量随封头的壁厚增大而增大, 因此可知平底的封头最重, 碟形封头质量适中。

## 3.2 制造加工工艺性

在相同容积、直径和压力的条件下, 球形封头壁厚最薄, 可节省钢材, 但由于封头深度较大, 导致加工工艺较差, 整体冲压成型困难, 且所占轴向空间较大; 平底封头结构最简单, 加工工艺性较好, 适合大量生产, 但由于壁厚大, 质量大, 强度也差, 仅适合小型发动机; 碟形封头加工工艺性较好, 便于手工加工成型, 且封头壁厚近似等于筒体壁厚, 这样筒体和封头可采用同样厚度的钢板来制造, 这不仅可以给选材带来方便, 也便于筒体和封头的焊接。

为了减轻质量、提高强度、并提高产品制造工艺等方面综合考虑, 建议优先选择碟形封头。

## 4 算 例

选取碟形锥柱型药柱的主要设计参数如下:

$D=300$  mm,  $L=400$  mm,  $L_1=130$  mm,  $R_1=20$  mm,  $L_2=223$  mm,  $R_2=40$  mm,  $r=13$  mm,  $R_3=100$  mm,  $R=$

30 mm,  $R_3=300$  mm, 环向槽锥面前倾角和后倾角分别为  $\pi/3$  和  $\pi/4$ 。

通过 UG 软件按照以上数值对碟形锥柱型药柱进行建模, 运用面积提取功能分别提取了初始面积、6 个燃去肉厚消失点的面积和 2 个中间点面积, 并将提取的数值与公式计算求得的燃烧面积数据进行对比, 如表 1 所示。表 1 证明了公式的正确性, 且两种方式所得到的面积数值最大相对误差为 0.078%。

表 1 计算燃烧面积与 UG 提取燃烧面积数据对比

Table 1 Data comparison between burning areas by calculated and extracted from UG

| $e$           | 面积/mm <sup>2</sup> |            | 相对误差/% |
|---------------|--------------------|------------|--------|
|               | UG 提取              | 公式计算       |        |
| 0             | 238 436.16         | 238 309.56 | 0.053  |
| $e_1$         | 334 076.46         | 334 069.78 | 0.002  |
| $(e_1+e_2)/2$ | 310 675.48         | 310 631.99 | 0.014  |
| $e_2$         | 277 875.48         | 277 769.92 | 0.039  |
| $e_3$         | 271 807.12         | 271 676.71 | 0.048  |
| $e_4$         | 249 780.29         | 249 712.87 | 0.027  |
| $e_5$         | 231 567.18         | 231 407.51 | 0.069  |
| $(e_5+e_6)/2$ | 206 687.47         | 206 668.87 | 0.009  |
| $e_6$         | 161 727.81         | 161 601.76 | 0.078  |

以药柱外径  $D$  为基准, 环向槽圆弧半径  $r$  为  $0.04D$ , 圆柱段内孔半径  $R_2$  为  $0.13D$ , 环向槽圆弧圆心旋转半径  $R_3$  为  $0.33D$ , 圆柱段长度为  $0.74D$ 。根据设计参数与燃烧过程之间的关系图可知, 燃烧药柱应该呈现先增面性后减面性。

根据给出的碟形锥柱型药柱的设计参数以及计算公式, 通过 MATLAB 软件得到了燃烧面积随燃去肉厚的变化曲线(见图 12)。从图 12 中可以看出, 燃烧药柱呈现先增面性后减面性, 与给

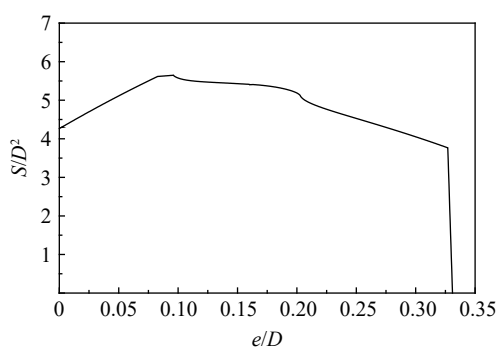


图 12 燃烧面积随  $e$  变化关系

Fig. 12 Relative relationship between burning area and  $e$

出的燃烧规律吻合。

## 5 结 论

1) 长径比为 2.5 时, 更接近恒面燃烧。

2) 以药柱外径  $D$  为基准, 当环向槽圆弧半径  $r \in (0, 0.05D)$ , 圆柱段内孔半径  $R_2 \in (0.1D, 0.4D)$ , 环向槽圆弧圆心旋转半径  $R_3 \in (R_2, 0.42D)$ , 圆柱段长  $L_2 \in (0.4D, 1.53D)$  时, 药柱燃烧呈现先增面性后减面性。算例证明燃烧面积计算准确, 燃烧规律与实际相符。

3) 残药率与  $r$  和  $R_2$  的曲线变化具有单调性, 且随着  $r$  和  $R_2$  的增大而减小, 呈现单调递减的趋势。

4) 残药率随着  $L_2$  的增大而增大, 呈现单调递增的趋势。

5) 残药率与  $R_3$  的曲线变化不具有单调性, 但具有凹凸性。残药率随着  $R_3$  的增大曲线的变化趋势为先增大后减小, 即为凸函数。

6) 通过对金属筒体和封头壁厚的估算可知, 碟形封头的壁厚适中且更近似于筒体的壁厚, 便于选材。在同等条件下对比平底、半球和碟形三种封头, 从减轻质量, 提高强度和提高了产品加工制造的工艺性等方面综合考虑, 建议优先选择碟形封头。

## 参考文献:

- [1] 晁侃, 王健儒, 陆贺建. 残余限燃环对大型分段式固体火箭发动机凝相沉积的影响[J]. *固体火箭技术*, 2021, 44(1): 9-15. CHAO Kan, WANG Jianru, LU Hejian. Influence of residual annular insulator on slag accumulation in segmented SRM[J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2021, 44(1): 9-15. (in Chinese)
- [2] 王元有. 固体火箭发动机设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984.
- [3] 鲍福廷, 侯晓. 固体火箭发动机设计[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2016.
- [4] OH S H, LEE H J, ROH T S. Development of a hybrid method in a 3-D numerical burn-back analysis for solid propellant grains[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 106: 106103.
- [5] KI W, KO T, KIM S, et al. 3D grain burnback analysis using the partial interface tracking method[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 68: 58-67.
- [6] 苗海玉, 刘少伟, 朱柏银. 基于动网格的装药燃烧的燃面退移仿真[J]. *火力与指挥控制*, 2019, 44(1): 156-160, 165. MIAO Haiyu, LIU Shaowei, ZHU Baiyin. A simulation research of surface regression in propellant charge combustion process based on dynamic mesh[J]. *Fire Control & Command Control*, 2019, 44(1): 156-160, 165. (in Chinese)
- [7] ZHENG Jinyang, YU Yehong, CHEN Yehong, et al. Comparison of ellipsoidal and equivalent torispherical heads under internal pressure: buckling, plastic collapse and design rules[J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2021, 143(2): 021301.
- [8] ZHENG Jinyang, ZHANG Zekun, LI Keming, et al. A simple formula for prediction of plastic collapse pressure of steel ellipsoidal heads under internal pressure[J]. *Thin-Walled Structures*, 2020, 156: 106994.
- [9] 席运志, 王宁飞, 李军伟, 等. 基于旋转阀的固体火箭发动机燃烧室压强振荡特性[J]. *兵工学报*, 2021, 42(1): 33-44. XI Yunzhi, WANG Ningfei, LI Junwei, et al. Oscillation characteristics of pressure in combustor with rotary valve for solid rocket engine[J]. *Acta Armamentarii*, 2021, 42(1): 33-44. (in Chinese)
- [10] LIU Weitao, LI Qiang, ZHAO Jiyan. Application on floor water inrush evaluation based on AHP variation coefficient method with GIS[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2018, 36(5): 2799-2808.
- [11] OTAY İ, OZTAYSI B, CEVIK ONAR S, et al. Multi-expert performance evaluation of healthcare institutions using an integrated intuitionistic fuzzy AHP & DEA methodology[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 133: 90-106.
- [12] ALI S A, AHMAD A. Mapping of mosquito-borne diseases in Kolkata Municipal Corporation using GIS and AHP based decision making approach[J]. *Spatial Information Research*, 2019, 27(3): 351-372.
- [13] LIU Sainan. E-shop transshipment selection evaluation based on cloud model[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*, 2018, 23(5): 643-649.
- [14] 姚枫秋, 相升海, 张德键. 车轮型药柱燃烧规律研究[J]. *兵器装备工程学报*, 2021, 42(2): 76-81, 126. YAO Fengqiu, XIANG Shenghai, ZHANG Dejian. Study on burning law of wheel-shaped grain[J]. *Journal of Ordnance Equipment Engineering*, 2021, 42(2): 76-81, 126. (in Chinese)
- [15] 张维星, 唐国金. 基于三维参数化建模的翼柱形发动机药形优化[J]. *固体火箭技术*, 2014, 37(4): 490-495. ZHANG Weixing, TANG Guojin. Optimization of finocyl grain based on the three-dimensional parameterized modeling[J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2014, 37(4): 490-495. (in Chinese)
- [16] 褚佑彪, 张岗, 苑博, 等. 固体火箭发动机装药燃面计算方法[J]. *固体火箭技术*, 2016, 39(4): 488-491, 502. CHU Youbiao, ZHANG Gang, YUAN Bo, et al. Burning surface computing method for solid rocket motor grain[J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2016, 39(4): 488-491, 502. (in Chinese)
- [17] 相升海, 杨艳羽, 李世鹏, 等. 减小半球锥柱型药柱残药率的研究[J]. *航空动力学报*, 2019, 34(6): 1389-1398. XIANG Shenghai, YANG Yanyu, LI Shipeng, et al. Study on reduction of waste grain rate for semi-spherical conic-column grain[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(6): 1389-1398. (in Chinese)
- [18] 鲁雨, 贺小华. 内压标准椭圆封头弹塑性屈曲分析及失效载荷研究[J]. *压力容器*, 2019, 36(11): 25-33. LU Yu, HE Xiaohua. Investigation on elastic-plastic buckling and failure load of standard elliptical head under internal pressure[J]. *Pressure Vessel Technology*, 2019, 36(11): 25-33. (in Chinese)
- [19] 刘江涌. 关于几种形式封头特点的比较[J]. *广东化工*, 2012, 39(7): 202-203. LIU Jiangyong. On the characteristics of several forms of head[J]. *Guangdong Chemical Industry*, 2012, 39(7): 202-203. (in Chinese)
- [20] 朱燕梅, 许进文. 碟形封头的几何参数和应力分析[J]. *石油化工设计*, 2008, 25(4): 8-10, 21. ZHU Yanmei, XU Jinwen. Geometrical parameter and stress analysis on dished head[J]. *Petrochemical Design*, 2008, 25(4): 8-10, 21.

- (in Chinese)
- [21] 王战辉, 马向荣, 范晓勇, 等. 凸形封头压力容器优化设计[J]. *轻工机械*, 2019, 37(2): 98-104.  
WANG Zhanhui, MA Xiangrong, FAN Xiaoyong, et al. Optimization design of pressure vessel with convex head[J]. *Light Industry Machinery*, 2019, 37(2): 98-104. (in Chinese)
- [22] 唐保威, 徐平. 内压碟形封头塑性垮塌压力预测方法[J]. *压力容器*, 2021, 38(4): 34-41.  
TANG Baowei, XU Ping. Method for prediction of plastic collapse pressure of torispherical heads under internal pressure[J]. *Pressure Vessel Technology*, 2021, 38(4): 34-41. (in Chinese)
- [23] 杨艳羽. 火箭发动机装配机设计及锥柱型药柱燃烧规律研究[D]. 沈阳: 沈阳理工大学, 2019.  
YANG Yanyu. Design of rocket motor assembly machine and study on burning law of conocyl grain[D]. Shenyang: Shenyang Ligong University, 2019. (in Chinese)
- [24] 杨艳羽, 相升海, 刘瑞东, 等. 平底锥柱型药柱燃烧规律研究[J]. *弹箭与制导学报*, 2019, 39(1): 79-83.  
YANG Yanyu, XIANG Shenghai, LIU Ruidong, et al. Study on burning law of fat-bottome conic-column grain[J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2019, 39(1): 79-83. (in Chinese)

(编辑: 秦理曼)