

航天飞行器折叠翼锁紧机构力学模型

任浩源, 王 毅, 王 亮, 周剑波, 常汉江, 蔡毅鹏, 雷 豹
(中国航天科技集团有限公司 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076)

摘 要: 针对折叠翼插-拔式锁紧机构建模问题, 采用平面应变假设和叠加原理对模型简化降维, 构建了考虑间隙效应的连接刚度解析模型。首先, 采用能量法求解接触摩擦引起的非静定问题, 获得法向和切向接触力; 其次, 基于 Hertz 基本解计算出等效接触刚度, 并采用梁模型计算弹性销的弯曲变形; 通过将解析解与文献试验值进行对比, 对方法的适用性进行验证, 并进一步针对不同接触模式开展参数影响分析, 最终给出了载荷和间隙对连接刚度的影响规律。结果表明: 当载荷由 20 N·m 变为 50 N·m 时, 锁紧机构的连接刚度增大 3%~5%, 存在刚度渐硬非线性效应; 而随间隙增大, 连接刚度呈现下降趋势, 其原因为配合尺寸影响弹性销与孔壁的相对姿态。

关 键 词: 折叠翼面; 锁紧机构; 力学模型; 接触刚度; 半解析方法

中图分类号: V416.2

文献标志码: A

Mechanical model of locking mechanisms of folding wing for spacecraft

REN Haoyuan, WANG Yi, WANG Liang, ZHOU Jianbo,
CHANG Hanjiang, CAI Yipeng, LEI Bao

(China Academy of Launch Vehicle Technology,
China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100076, China)

Abstract: To model the plug-in locking mechanism, the plane strain assumption and superposition principles were used for dimensionality reduction and simplification, and an analytical model of connection stiffness considering the effect of gap was established. Firstly, the energy method was used to solve the indeterminate problem caused by contact friction, and the normal and tangential contact forces were obtained. Then, the equivalent contact stiffness was calculated by using Hertz's theory, and the bending deformation of elastic pins was calculated through beam model. To validate the applicability of the method, the analytical results were compared with the experimental results from the reference paper. Finally, the parameter influence analysis was carried out, and the effect of load and clearance on connection stiffness was proposed. The results showed that when the load changed from 20 N·m to 50 N·m, the connection stiffness of the locking mechanism increased by about 3%—5%, demonstrating a hardening spring nonlinear effect. With the increase of the clearance, the connection stiffness showed a downward trend, owing to the fact that the fit size affected the relative attitude of the elastic pin and the hole.

Keywords: folding wing; lock mechanisms; mechanical model; contact stiffness;
semi-analytical method

收稿日期: 2022-01-19

基金项目: 国家自然科学基金(11902363)

作者简介: 任浩源(1994—), 男, 博士生, 主要从事非线性结构动力学研究。

通信作者: 王毅(1963—), 男, 研究员, 博士, 主要从事飞行器总体设计和多体系统动力学研究。E-mail: ywangcalt@163.com

引用格式: 任浩源, 王毅, 王亮, 等. 航天飞行器折叠翼锁紧机构力学模型[J]. 航空动力学报, 2023, 38(12): 3009-3019. REN Haoyuan, WANG Yi, WANG Liang, et al. Mechanical model of locking mechanisms of folding wing for spacecraft[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(12): 3009-3019.

滑翔式轨道再入航天器面临发射平台几何相容性要求严、装载空间约束高等限制,需采用翼面折叠构型^[1-2]。折叠翼面技术能够有效减小飞行器的横向尺寸、缩减储运空间、改变气动布局,并提升飞行器的可设计性能^[3-5]。对于面外折叠构型航天飞行器,其内翼面与外翼面由转动副机构进行连接,并采用插-拔式铰接/锁紧机构进行折叠和展开的限位锁定。插-拔式铰接/锁紧机构作为折叠翼的核心部件,具有设计拆装方便、连接特性好、解锁安全性高和空间占比小等优势,在飞行器中得到了广泛的应用。但为了保证折叠-展开机构的正常工作,必须在折叠转动副的内芯轴与外套筒之间以及锁紧机构的插销与对接孔槽之间留有配合间隙。连接机构各部件之间受间隙、接触和摩擦非线性因素的作用,以及材料特性、尺寸误差和气动加热环境等影响,呈现复杂的力学行为,并显著影响翼面整体的固有频率和气动弹性响应,严重威胁飞行安全^[6-8]。因此,折叠翼面铰接/锁紧机构的精细设计和力学性能分析在新型高速飞行器研制中将发挥越来越重要的作用。

铰接/锁紧机构作为内外翼面的连接部件,其准确的力学模型是后续分析的关键。国内外学者针对连接结构建模问题已开展大量理论和试验研究,并取得了一系列研究成果^[9-13]。当前针对连接结构的有限元建模分析方法主要分为两类:非线性接触算法^[14]和界面单元法^[15]。前者需要不断通过接触算法判别接触状态,迭代计算结构响应,计算量较大,多用于计算结构静力学变形或动力学响应特性;后者采用薄层单元方法^[16-17]或等效弹簧法^[18]将接触边界条件转化为虚拟材料单元的位移约束或弹簧约束,能够在保证计算精度的前提下降低计算量,多用于结构模态分析。目前在航天工程分析中倾向于采用等效弹簧法建模,其本质上是一种以多个弹簧单元或弹簧-阻尼单元代替复杂的连接结构和接触行为的简化方法,将结构之间的接触表面建立控制点,并在控制点之间建立单元以模拟连接关系^[19-21]。在早期 Lee 等^[22]采用双线性弹簧和间隙弹簧模拟 CF-18 飞行器的非线性连接刚度,基于描述函数法和地面试验获得了折叠处铰链力矩与外机翼转角曲线,为连接建模方法提供了指导。近期,王博等^[23]采用直接参数估计方法建立基础激励下含间隙折叠舵系统的辨识模型,利用相对速度和相对位移的多项式表征非线性系统的恢复力。何昊南等^[24-25]

采用非线性扭转弹簧来模拟折叠转轴连接处的接触和间隙特性,并基于该模型对含间隙折叠舵开展不同激励量级和间隙值组合的振动试验分析和热气弹特性理论研究。

现有锁紧机构建模主要采用等效弹簧方法,基于唯象模型确定弹簧的刚度形式,再采用振动试验结果和模型辨识手段解算未知参数。对于强非线性问题,结构连接刚度模型与结构的具体形式、承载状态存在强关联^[26],若在辨识模型中未正确选取反映物理特征的参数(如载荷、配合间隙、接触表面特性等),则采用模型修正方法获取的刚度数据将在一定程度上缺乏泛化能力。这意味着探求结构物理特征与连接刚度的解析关系对判定刚度非线性类型、数学表达式以及正确开展模型修正方法仍具有重要作用,即只有正确认识并建立模型,辨识后获得的结果才更具有理论意义。此外,在分析流程方面,模型修正方法需要先开展实物试验,再进行理论分析,这也导致了单纯采用辨识方法难以在飞行器结构研制初期(例如方案阶段)提供有效设计准则和模态评估手段。因此,尽管已有大量关于等效弹簧法的建模和辨识方法研究,但是如何从具体的结构形式出发,正向建立实际工程结构的物理特征与刚度的解析表达式的问题仍未真正得到解决。

圆柱转动副和滑动锁销的内部间隙接触问题是折叠翼面铰接/锁紧机构建模的难点,长期以来,针对间隙运动副的接触分析方法得到了快速发展,这为解决折叠翼的插-拔式铰接/锁紧机构连接刚度的正向建模问题开辟了新途径^[27-30]。Zhuang 等^[31]建立了考虑配合间隙和库伦摩擦的平面滑动副分析模型,提出了滑块与轨道的接触检测方法,并针对摆杆-滑块多体机构开展动力学分析,但是该模型中假设滑块与导轨均为刚体。Zhang 等^[32]对 Zhuang 提出的模型进行改进和发展,将滑块与导轨视为弹性接触,并采用罚函数方法建立了滑块与导轨的接触求解策略,并应用该模型对平面曲柄连杆机构的动力学问题进行研究。Liu 等^[33]采用绝对节点坐标法建立了含轴向和径向多间隙转动副的分析模型,并给出了含间隙转动副的刚柔多体模型的控制方法。基于已有研究成果分析可知,目前对运动副的接触分析多局限在机构运动状态,而关于机构到位锁紧后的研究非常有限。事实上在航空航天工程领域,运动副存在作动和锁紧两种状态,如航天器太阳能电池阵铰链、飞

行器舵面伺服传动机构等。对可折叠翼面飞行器而言, 折叠机构的作动状态对应飞行器变形过程, 主要影响飞行器翼面展开时的瞬态性能; 而折叠机构的锁紧状态则对应飞行器的巡航和机动过程, 锁紧条件下连接部位的力学性能对全程飞行品质具有至关重要的影响。此外, 正确建立锁紧条件下的连接刚度模型也是可折叠翼面在复杂飞行条件下力学响应分析的前提。

综合上述原因, 为了探求结构尺寸与连接刚度的解析关系, 解决正向建立含间隙锁紧机构连接刚度模型的难题, 本文针对折叠翼面插-拔式锁紧机构开展研究, 采用平面应变假设和叠加原理进行简化, 将连接结构中立方孔与销的三维接触问题转化为平面矩形孔与销的接触变形问题。在力学模型中对基体结构采用准刚体假定, 将锁销简化为弹性梁, 基体与锁销的接触区域采用平

面弹性力学基本解计算出等效接触刚度, 并采用静力学分析计算锁销的弹性变形, 对方法的适用性进行了讨论, 并进一步阐述参数的影响。

1 折叠翼

1.1 结构模型

高速折叠翼面采用翼根部折叠方式, 主要由外翼、内翼、铰接/锁紧机构组成, 如图 1 所示。整体采用高温合金钢材料以保证高速气动加热下强度和刚度特性, 翼型剖面为高速梯形翼, 内翼通过两定位块与飞行器机体固支。内翼和外翼采用铰接/锁紧机构进行连接, 将转轴柱插入内、外翼的圆柱孔以限制外翼的平动自由度和除绕转轴方向外的转动自由度, 并通过控制外翼的方形锁销插入内翼面方孔, 以实现外翼展开到位后的锁定。内翼与外翼之间的弯矩载荷由锁销传递。

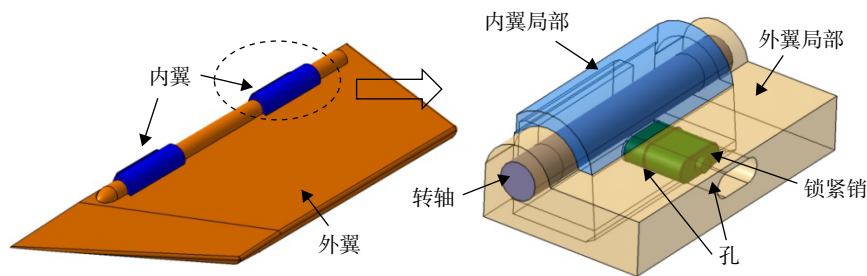


图 1 折叠翼与铰接/锁紧机构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of folding wing and hinged-locking mechanisms

1.2 简化模型

由于飞行器连接件需要快速迭代设计, 因此高计算量、长耗时的复杂建模手段难以接受, 需要建立合理的简化分析模型。由于锁销和内翼的孔壁、外翼面的孔壁接触特性相近, 因此选择锁销与内翼孔作为研究对象, 采用如下假定对模型进行简化。

1.2.1 接触假设与简化

为了保证锁紧机构能够正常工作, 避免锁销在孔内非工作位置卡滞, 需要在结构设计中预留间隙, 因此锁销与孔壁为非协调表面接触。采用有限元方法对锁销与孔壁的接触问题进行试算。由于接触区集中应力受翼面本体结构形状的影响较小, 将局部接触部分从铰接/锁紧机构的整体模型中切出, 对锁销施加载荷以模拟内外翼面之间的弯矩, 载荷范围为 $20 \sim 50 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

图 2 给出了模型及应力结果。锁销上表面和下棱边与孔壁存在两处接触区, 在初始条件下锁

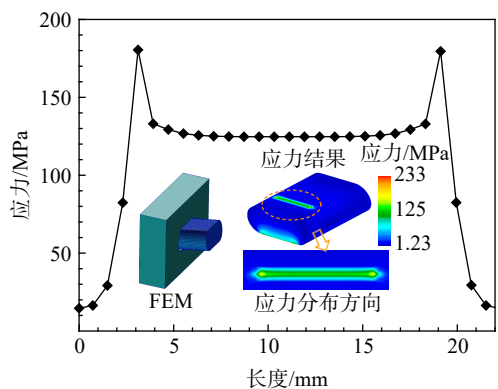
销与孔壁为线接触, 随载荷增大, 承载区呈现细长的窄带形状。图 2(a) 和图 2(b) 给出了沿上表面窄带接触区的长度方向和宽度方向的 Von Mises 应力分布。

由图 2 中曲线可知:

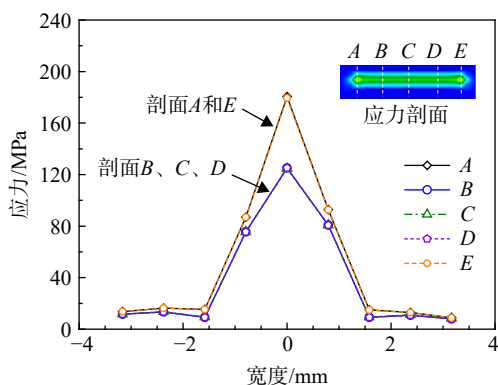
1) 沿区域长度方向应力存在边缘效应, 两端点位置应力最大, 中间区域应力分布较为均匀, 在不考虑端部应力集中的条件下, 可近似认为接触载荷沿窄带长度方向不变。

2) 研究接触区域宽度方向应力分布特点, 在窄带区域切出 5 剖面 (A~E), 其中剖面 B、C 和 D 内沿窄带的宽度方向表面应力分布形式一致, 中心处最大, 边缘迅速衰减, 即沿窄带宽度方向应力显著变化。

3) 沿窄带宽度方向, 将应力为峰值应力 10% 的宽度范围定义为应力集中宽度, 在本例中应力集中宽度与锁销宽度的比值为 0.107, 可认为应力集中宽度远小于锁销宽度。



(a) 接触区Von Mises应力沿窄带长度方向分布



(b) 接触区Von Mises应力沿窄带宽度方向分布

图2 有限元模型及 Von Mises 应力结果

Fig. 2 Finite element model and Von Mises stress results

因此,考虑上述原因,可以将三维接触问题简化为二维平面应变问题,将锁销与孔壁的面-面接触转为线-线接触。需要指出的是,由接触理论可知:棱角部位的斜率不连续,在接触边界上将引起无穷大的压强。因此,在锁销和孔壁设计中通常会留有半径约为 0.5 mm 倒角,在几何分析中可近似忽略,但在接触分析中不应对倒角进行简化。

1.2.2 结构假设与简化

对于非协调接触问题,接触区的尺寸与物体的本身尺寸相比较小,接触应力构成接触区局部应力集中,并与物体远离接触区的内部应力无关。因此,局部接触不影响锁销的宏观变形模式,可采用梁模型对锁销进行简化,类似的简化思想及精度已在文献 [34] 中进行讨论。此外,在本文限定的小载荷范围内,结构的变形足够小,不考虑几何非线性特性;锁销与孔壁间的接触应力在材料的弹性范围内,不考虑塑性应力和塑性变形的影响。

图3给出了简化后的锁销与孔壁等效分析模型,其中 F_{n1} 和 F_{n2} 为锁销与孔壁接触点的法向力, F_{t1} 和 F_{t2} 为锁销与孔壁接触点的切向力, K_1 和 K_2 为接触刚度, M 为内、外翼面之间的力矩(即外翼载荷相对折叠轴的力矩)。

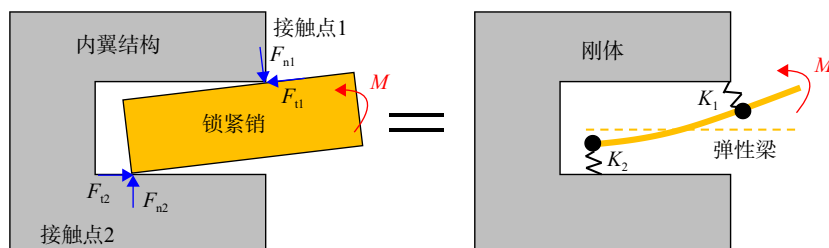


图3 锁销-孔等效接触分析模型

Fig. 3 Equivalent model of pin and hole for contact analysis

2 模型求解

将折叠翼铰接/锁紧机构的连接刚度定义为:外翼面载荷对转动轴的力矩与外翼面根部转角的关系曲线斜率。外翼绕轴转角的计算需要考虑锁销接触点的接触变形和锁销自身弯曲变形两部分贡献量。

2.1 接触刚度

对于锁销与孔壁的非协调接触问题,采用接触理论预测接触变形量,忽略锁销和孔壁之间滑动行为和碰撞效应。需要指出的是,对于两个互不协调的物体法向接触,当材料的弹性常数不同时,交界面的切向力会对接触特性产生影响,但

本文中各部件采用相同材料,因此在接触模型中忽略切向摩擦力对接触变形的影响,仅考虑法向载荷作用下的弹性体接触变形。根据赫兹理论^[35],均布线载荷 P 作用下(见图4),圆柱与半无限大空间体的接触问题解为:

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2)$$

$$a_c = \sqrt{\frac{8PR_{eq}}{\pi E_{eq}}} \quad (3)$$

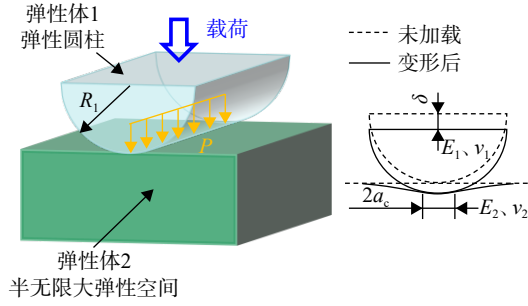


图 4 Hertz 接触模型

Fig. 4 Hertz contact model

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{\pi a_c} \quad (4)$$

$$\delta = \frac{4P(1-\nu_1^2)}{\pi E_{\text{eq}}} \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{4R_{\text{eq}}}{a_c} \right) \quad (5)$$

式中 E_{eq} 和 R_{eq} 分别为等效弹性模量和等效半径; E_1 、 E_2 、 ν_1 、 ν_2 、 R_1 和 R_2 分别为圆柱和半无限大体的弹性模量、泊松比和曲率半径; a_c 为半接触宽度; $\sigma_{\max}$ 为中心接触点的法向应力; δ 为圆柱与空间体的距离改变量, 数值上等于接触区中心线处圆柱与平面变形量总和。

2.2 弯曲刚度

图 5 给出了铰接/锁紧机构平面模型, 其中 a 为锁销插入深度 (此处定义为: 上孔壁与锁销接触点到锁销端部的距离), b 为锁销宽度, L 为锁销长度, d_c 为锁销平放时上表面与孔壁的间隙值, θ 为锁销与孔壁之间的夹角, β 为外翼面根部与内翼面之间的夹角。

$$M(x) = \begin{cases} (F_{n2} \cos \theta - F_{t2} \sin \theta)x - (F_{n2} \sin \theta + F_{t2} \cos \theta) \frac{b}{2} & 0 < x \leq a \\ (F_{n2} \cos \theta - F_{t2} \sin \theta - F_{n1})x + F_{n1}a + F_{t1} \frac{b}{2} - (F_{n2} \sin \theta + F_{t2} \cos \theta) \frac{b}{2} & a < x \leq L \end{cases} \quad (8)$$

写出系统的约束方程, 其中接触约束方程如下:

$$\begin{cases} F_{ni} \geq 0 \\ |F_{ti}| \leq \mu_{mi} F_{ni} \end{cases} \quad i \in 1, 2, 3 \quad (9)$$

式中 μ_{mi} 为各接触点的最大静摩擦因数。

外翼平衡约束方程可由力矩平衡得到:

$$f(F_{n3}, F_{t3}) = 0 \quad (10)$$

锁销平衡约束方程如下:

$$F_{n1} \sin \theta - F_{n3} \sin \beta + F_{t1} \cos \theta + F_{t2} + F_{t3} \cos \beta = 0 \quad (11)$$

$$F_{n1} \cos \theta - F_{n2} - F_{n3} \cos \beta - F_{t1} \sin \theta - F_{t3} \sin \beta = 0 \quad (12)$$

$$F_{n1}a + F_{t1}b - F_{n3}L \cos(\beta - \theta) - F_{t3}L \sin(\beta - \theta) = 0 \quad (13)$$

由于势能函数式(6)为非线性方程, 为求解在

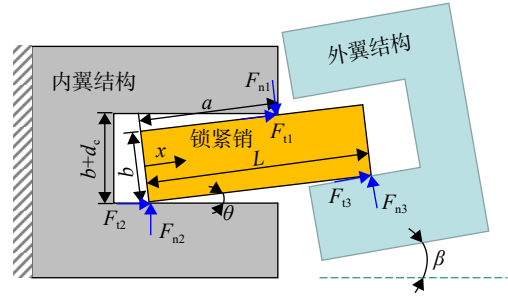


图 5 铰接/锁紧机构平面模型

Fig. 5 Plane model of hinged-locking mechanism

针对接触摩擦非静定系统, 真实的接触力应使系统势能函数最小^[36], 因此求解接触法向力和切向力转化为含不等式约束的函数条件极值问题。系统势能函数由锁销的弯曲、剪切变形能和接触弹性势能组成, 其表达式如下:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\chi \frac{T^2(x)}{GA(x)} + \frac{M^2(x)}{EI(x)} \right] dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{F_{ni}} F_{ni} \delta_i(F_{ni}) dF_{ni} \quad (6)$$

式中 x 为锁销长度方向坐标, χ 为锁销的截面剪切系数, E 为弹性模量, G 为切变模量, A 为横截面积, I 为截面对中性轴的惯性矩, $T(x)$ 和 $M(x)$ 分别为梁假设下的锁销的剪力和弯矩, 其表达式如下:

$$T(x) = \begin{cases} F_{n2} \cos \theta - F_{t2} \sin \theta & 0 < x \leq a \\ F_{n2} \cos \theta - F_{t2} \sin \theta - F_{n1} & a < x \leq L \end{cases} \quad (7)$$

满足不等式约束(式(9)~式(13))条件下势能函数的极小值, 需要采用非线性优化算法。将启发式全局搜索算法和局部梯度算法相结合的多约束非线性优化方法^[37]是解决此类复杂问题的有效手段, 通过在约束域内进行散点搜索, 并建立评价函数选取可能局部最优点, 再采用梯度方法精细计算局部最优点极值, 最终获得全局的最优解。目前该方法已集成于 Matlab 软件全局优化模块^[38], 其伪代码如下:

```
gs = GlobalSearch;
opts = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','interior-point');
Ussystem = @(x)(系统势能函数);
problem = createOptimProblem('fmincon','x0',[接触力优
```

化初值], 'objective', Ussystem, 'lb', [接触力下边界], 'ub', [接触力上边界], 'Aineq', [摩擦力不等式约束], 'bineq', [0], 'Aeq', [平衡方程约束], 'beq', [外翼面载荷], 'options', opts);
[xming, fming, flagg, outptg, manyming] = run(gs, problem)

采用上述优化方法获取锁销各接触力后, 进一步采用梁方程求解变形。由能量法^[39]可知, 锁销接触点的横向挠度分量表达式为:

$$\begin{cases} w_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{n1}} \\ w_2 = \frac{\partial U}{\partial F_{n2}} \cos \theta \\ w_3 = \frac{\partial U}{\partial F_{n3}} \cos (\beta - \theta) \end{cases} \quad (14)$$

将接触力带入式(5)可计算得到接触点的接触变形 δ_1 、 δ_2 和 δ_3 , 由更新后的几何关系计算外翼转角改变量 $\Delta\beta$ 。

3 算 例

3.1 验证算例

为了验证本文所采用的基于势能极值求解静不定模型受力的方法, 针对工程力学分析中典型的“梯-墙”模型, 将本文理论解与文献[40]提供的试验结果进行对比。斜梯的结构形式如图6所示,

主要尺寸为: 长度 $L=2.44$ m, 重力 $W=84.07$ N(在计算中需转化为均匀分布力), 斜梯与地面夹角为 68° , 最大静摩擦因数 $\mu_m=0.29$, 法向和切向力分别为 F_{R1} 和 F_{R2} , 与墙面的法向和切向力分别为 F_{R3} 和 F_{R4} , 在距离斜梯底端 ηL 距离处施加铅垂方向的集中载荷 P_{lad} 。

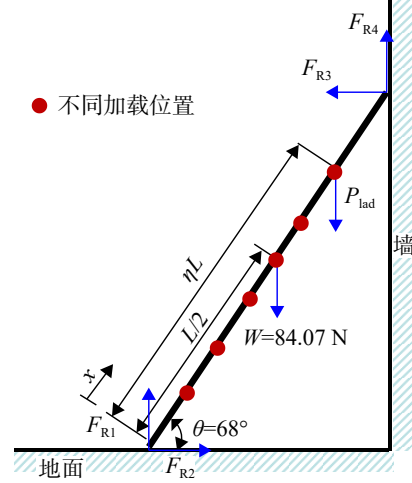


图6 “梯-墙”接触模型及几何参数

Fig. 6 Ladder-wall contact model and geometry parameters

考虑式(6)势能函数中的弯矩势能, 忽略剪切势能和接触势能。在梁假设下, 斜梯的弯矩表达式为:

$$M(x) = \begin{cases} (F_{R3} \sin \theta + F_{R4} \cos \theta)(L-x) - \frac{W \cos \theta}{2L}(L-x)^2 - P_{lad} \cos \theta(\eta L - x) & 0 \leq x < \eta L \\ (F_{R3} \sin \theta + F_{R4} \cos \theta)(L-x) - \frac{W \cos \theta}{2L}(L-x)^2 & \eta L \leq x \leq L \end{cases} \quad (15)$$

弯曲势能函数表达式如下:

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx \quad (16)$$

接触约束方程为:

$$\begin{cases} F_{R1} \geq 0 \\ 0 \leq F_{R2} \leq \mu_m F_{R1} \\ F_{R3} \geq 0 \\ 0 \leq F_{R4} \leq \mu_m F_{R3} \end{cases} \quad (17)$$

斜梯平衡约束方程为:

$$F_{R1} + F_{R4} = W + P_{lad} \quad (18)$$

$$F_{R2} - F_{R3} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{W \cos \theta}{L} x \right) dx + P_{lad} \eta L \cos \theta - \\ F_{R3} L \sin \theta - F_{R4} L \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

为了分析载荷作用的位置和数值对接触力的

影响, 并与文献中的试验工况保持一致, 共设置了4种载荷条件: P_{lad} 为 111.13、222.26、333.39、444.52 N 和 6种加载位置: η 为 0.131、0.254、0.377、0.500、0.623、0.746。

图7和图8分别给出了法向接触力 F_{R1} 和切向接触力 F_{R2} 的理论计算结果与文献[40]的试验结果。表1给出了具体数值和相对误差, 表1中的下标T代表理论值, 下标E代表试验值, 定义相对误差为 $\varepsilon = (F_{RT} - F_{RE}) / F_{RE}$ 。

图7和图8中, 不同载荷作用下采用本文方法获得的理论曲线与对应试验结果趋势吻合。表1中数据表明, 在多工况下理论结果与试验结果相对误差均在10%以内, 数据一致性良好。其中最大相对误差为23.67%, 对应于 $\eta=0.25$, $P_{lad}=111.13$ N 时的切向力 F_{R2} , 根据图8中曲线趋势判断该误差可能源于试验奇异点。因此, 基于势能极值方法能够有效预测静不定结构的支反力, 验

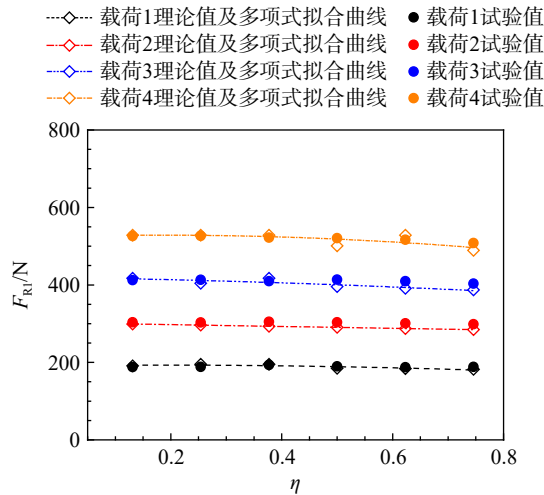


图 7 法向力 F_{R1} 的理论值与试验值

Fig. 7 Theoretical and experimental results of F_{R1}

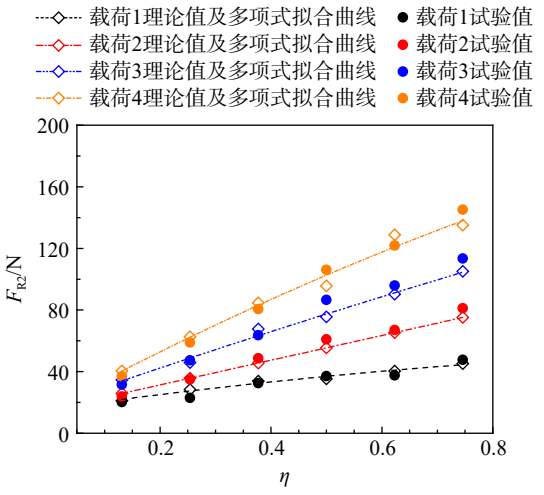


图 8 切向力 F_{R2} 的理论值与试验值

Fig. 8 Theoretical and experimental results of F_{R2}

表 1 不同载荷下的支反力理论值与试验值

Table 1 Theoretical and experimental values of the support reaction force under different loads

η	$F_{R1} (P_{\text{lad}}=111.13 \text{ N})$			$F_{R1} (P_{\text{lad}}=444.52 \text{ N})$			$F_{R2} (P_{\text{lad}}=111.13 \text{ N})$			$F_{R2} (P_{\text{lad}}=444.52 \text{ N})$		
	F_{R1T}/N	F_{R1E}/N	$\varepsilon/\%$	F_{R1T}/N	F_{R1E}/N	$\varepsilon/\%$	F_{R2T}/N	F_{R2E}/N	$\varepsilon/\%$	F_{R2T}/N	F_{R2E}/N	$\varepsilon/\%$
0.13	190.92	188.01	1.55	528.50	526.04	0.47	21.14	20.19	4.72	40.50	37.00	9.46
0.25	195.08	188.54	3.47	528.48	526.67	0.34	28.34	22.92	23.67	62.57	58.86	6.31
0.38	195.15	193.31	0.95	528.49	522.06	1.23	33.89	32.47	4.38	84.66	80.60	5.04
0.50	184.99	189.95	-2.61	501.04	520.52	-3.74	35.31	37.15	-4.96	95.65	106.12	-9.86
0.62	183.71	187.31	-1.92	528.59	516.84	2.27	40.31	37.50	7.50	128.86	121.87	5.74
0.75	182.24	188.50	-3.32	489.41	508.11	-3.68	45.24	47.62	-5.00	135.11	145.17	-6.93

证了所提方法的可用性和正确性。

3.2 三点接触算例

对于真实折叠翼结构,在不同的转动副间隙和锁销-孔壁间隙的组合条件下,可能导致锁销与孔壁存在多种接触模式,且各类接触模式之间包含过渡接触模式。定义锁销与内翼面孔壁两点接触,与外翼面孔壁单点接触为三点接触模式(见图 9),以下针对三点接触模式进行刚度求解。

给定结构尺寸如下: $a=15 \text{ mm}$, $b=10 \text{ mm}$, $L=25 \text{ mm}$, $d_c=0.4 \text{ mm}$, 外翼绕转轴的回转半径 $R_o=$

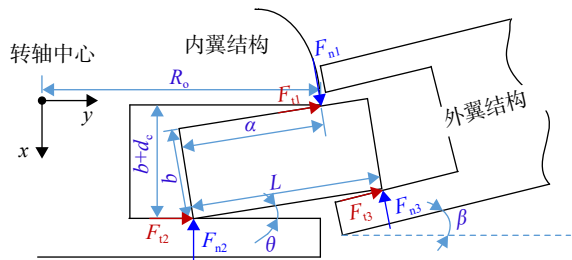


图 9 锁销三点接触模型及几何参数

Fig. 9 Three-point contact model and geometric parameters of locking pin

24 mm, 锁销厚度 $l=16 \text{ mm}$, 倒角为 0.5 mm, 内外孔的宽度尺寸相等。锁销和翼面材料参数为: $E_1=E_2=210 \text{ GPa}$, $\nu_1=\nu_2=0.3$, $\mu_{m1}=\mu_{m2}=\mu_{m3}=0.7$, $\chi=1.2$, 外翼面施加的弯矩载荷为 $M=20 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

采用未变形时的结构尺寸参数计算锁销初始倾角 θ , 表达式如下:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{d_c + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (21)$$

采用 Matlab 软件解算系统势能方程极值, 获得法向和切向接触力分别为: $F_{n1}=862.3 \text{ N}$, $F_{n2}=374.1 \text{ N}$, $F_{n3}=483.7 \text{ N}$, $F_{t1}=-90.3 \text{ N}$, $F_{t2}=-261.9 \text{ N}$, $F_{t3}=338.6 \text{ N}$ 。在获得法向和切向接触力后, 采用梁模型计算锁销的挠度变形结果, $w_1=-0.351 \mu\text{m}$, $w_2=4.83 \mu\text{m}$, Hertz 理论计算的接触变形结果为 $\delta_1=1.38 \mu\text{m}$, $\delta_2=0.65 \mu\text{m}$, $\delta_3=0.82 \mu\text{m}$ 。其中锁销在接触点 1、2 的横向挠度 w_1 和 w_2 为相对量, 以接触点 3 为参考点, 即已减去接触点 3 的挠度。接触区造成的变形与弹性销自身弯曲造成的变形量级相近, 因此在三点接触条件下, 分析锁销结构

在内翼与外翼间承载变形时,需要考虑两者共同影响。计算得到接触变形和梁弯曲变形造成的外翼转角改变量为 1.47×10^{-4} rad, 连接刚度为 1.36×10^5 N·m/rad。

为了进一步分析载荷和间隙对连接刚度的影响, 设置 11 种载荷条件 ($M=20 \sim 50$ N·m) 和 5 种不同孔-销间隙值 ($d_c=0.4 \sim 2$ mm), 图 10 和图 11 给出了计算得到不同工况条件下的力矩-转角关系曲线以及力矩-连接刚度关系曲线, 表 2 给出了具体的计算结果。

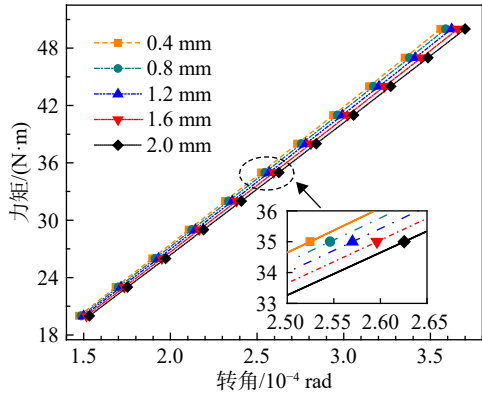


图 10 三点接触时不同间隙下的力矩-转角关系曲线

Fig. 10 Moment vs. rotation angle curve under different clearances for three-point contact type

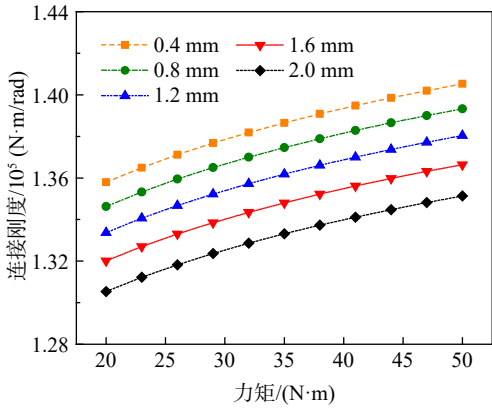


图 11 三点接触时不同间隙下的力矩-刚度关系曲线

Fig. 11 Moment vs. rotation connection stiffness curve under different clearances for three-point contact type

由数据分析可知:

1) 保持间隙为 0.4 mm 不变, 在不同载荷作用下, 各组连接刚度均呈现增大趋势, 但趋势逐渐变缓, 说明当载荷达到一定值时刚度将稳定在恒值; 若以 20 N·m 载荷为基值, 在最大载荷 50 N·m 条件下连接刚度增加了 3%, 即存在“渐刚性”非线性效应。

表 2 三点接触时不同载荷和间隙下的连接刚度

Table 2 Connection stiffness under different loads and clearances for three-point contact type

$M/(\text{N} \cdot \text{m})$	间隙 d_c/mm				
	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
20	135 793	134 629	133 371	132 009	130 537
23	136 496	135 328	134 064	132 697	131 220
26	137 119	135 946	134 677	133 306	131 825
29	137 678	136 501	135 228	133 853	132 367
32	138 185	137 004	135 728	134 350	132 860
35	138 650	137 466	136 187	134 805	133 312
38	139 079	137 892	136 609	135 224	133 728
41	139 478	138 288	137 002	135 614	134 116
44	139 850	138 657	137 369	135 979	134 477
47	140 199	139 004	137 714	136 321	134 817
50	140 528	139 331	138 038	136 643	135 136

2) 保持载荷不变, 随间隙增大, 连接刚度呈现下降趋势, 在 20 N·m 的弯矩载荷下, 0.4 mm 间隙对应的连接刚度为 135 793 N·m/rad, 2.0 mm 间隙对应的连接刚度为 130 537 N·m/rad, 相比下降了 4%, 这是由于随配合尺寸改变, 锁销与孔壁姿态改变, 一方面影响接触力的分配, 间隙越大, 锁销的法向接触力分量越大, 因此弯曲和接触变形更加明显, 外翼的转角改变量增大; 另一方面, 锁销姿态对外翼变形存在“杆臂效应”, 即在相同的法向接触变形时, 间隙越大, 锁销的初始倾角 θ 越大, 外翼的转角改变量越大, 这两方面因素共同地加剧了连接刚度下降。

3.3 四点接触算例

定义锁销与内翼面孔壁两点接触, 与外翼面孔壁两点接触, 为锁销四点接触模式(见图 12), 以下针对四点接触模式进行连接刚度求解。考虑转轴处的间隙足够大, 外翼绕转轴的约束取消, 外翼转动角度将由外翼孔与锁销的双点接触进行

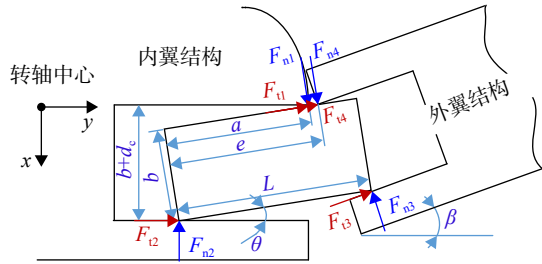


图 12 锁销四点接触模型及几何参数

Fig. 12 Four-point contact model and geometric parameters of locking pin

控制, 外翼载荷垂向合力 F_{out} 和绕折叠轴力矩 M 完全由 F_{n3} 、 F_{t3} 、 F_{n4} 和 F_{t4} 平衡, 如图 12 所示。四点接触的结构参数与三点算例相同, 并添加外翼位置补充条件: 锁销上表面与内孔、外孔的接触点间距为 2 mm, 即 F_{t4} 作用点距弹性锁销左端距离为 $e=17$ mm。外翼承受铅垂向上载荷 50 N, 载荷对转轴的转矩为 20 N·m, 该载荷条件与三点接触算例相同。

锁销四点接触时, 系统约束方程如下:

接触约束方程为

$$\begin{cases} F_{ni} \geq 0 \\ |F_{ti}| \leq \mu_{mi} F_{ni} \end{cases} \quad i \in 1, 2, 3, 4 \quad (22)$$

$$F_{n1} \sin \theta + F_{t1} \cos \theta + F_{n4} \sin \theta + F_{t4} \cos \theta - F_{n3} \sin \beta + F_{t3} \cos \beta + F_{t2} = 0 \quad (26)$$

$$F_{n1} \cos \theta - F_{t1} \sin \theta + F_{n4} \cos \theta - F_{t4} \sin \theta - F_{n2} - F_{n3} \cos \beta - F_{t3} \sin \beta = 0 \quad (27)$$

$$F_{n1}a + F_{t1}b + F_{n4}e + F_{t4}b - F_{n3}L \cos(\beta - \theta) - F_{t3}L \sin(\beta - \theta) = 0 \quad (28)$$

通过求解势能极值获得法向和切向接触力分别为: $F_{n1}=921.5$ N, $F_{n2}=855.7$ N, $F_{n3}=1\,282.6$ N, $F_{n4}=1\,276.2$ N, $F_{t1}=571.4$ N, $F_{t2}=-596.0$ N, $F_{t3}=876.5$ N, $F_{t4}=-807.7$ N, 挠度结果为 $w_1=-1.0$ μm , $w_2=12.2$ μm , $w_4=-0.34$ μm 。接触变形结果为 $\delta_1=1.46$ μm , $\delta_2=1.37$ μm , $\delta_3=1.97$ μm , $\delta_4=1.96$ μm 。进一步计算得到外翼转角改变量为 0.001 4 rad, 连接刚度为 1.4×10^4 N·m/rad。

为了分析载荷和间隙对连接刚度的影响, 采用与三点算例相同的载荷条件 ($M=20 \sim 50$ N·m) 和孔-销间隙值 ($d_c=0.4 \sim 2$ mm)。计算获得不同工况条件下的力矩-转角关系曲线以及力矩-连接刚度关系曲线, 如图 13 和图 14 所示。表 3 给出了具体的计算数值。

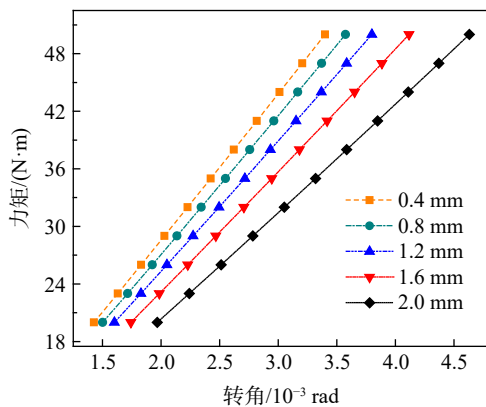


图 13 四点接触时不同间隙下的力矩-转角关系曲线

Fig. 13 Moment vs. rotation angle curve under different clearances for four-point contact type

外翼平衡约束方程为:

$$F_{n4} \cos \theta - F_{t4} \sin \theta - F_{n3} \cos \beta - F_{t3} \sin \beta = F_{outx} \quad (23)$$

$$F_{n4} \sin \theta + F_{t4} \cos \theta - F_{n3} \sin \beta + F_{t3} \cos \beta = F_{outy} \quad (24)$$

$$F_{n3}r_{n3} + F_{t3}r_{t3} - F_{n4}r_{n4} + F_{t4}r_{t4} = M \quad (25)$$

式中 F_{outx} 和 F_{outy} 分别为 F_{out} 在 x 轴和 y 轴方向的分量, r_{n3} 和 r_{t3} 分别为接触力 F_{n3} 和 F_{t3} 对折叠轴的力臂, r_{n4} 和 r_{t4} 分别为接触力 F_{n4} 和 F_{t4} 对折叠轴的力臂。

锁销平衡约束方程为

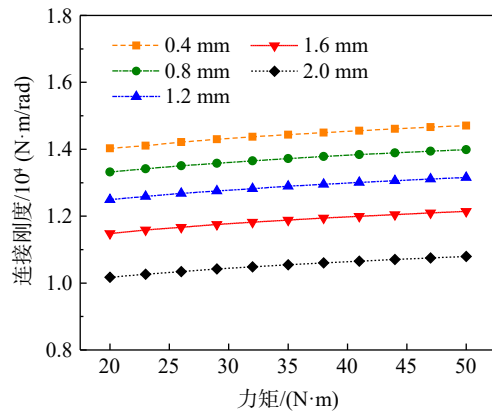


图 14 四点接触时不同间隙下的力矩-刚度关系曲线

Fig. 14 Moment vs. rotation connection stiffness curve under different clearances for four-point contact type

由数据分析可知:

1) 保持间隙 0.4 mm 不变, 在不同的载荷作用下, 各组连接刚度均呈现增大趋势, 若以 20 N·m 载荷为基值, 在最大载荷 50 N·m 条件下连接刚度增加了 4.85%, 这与三点接触算例的规律一致。

2) 保持载荷不变, 随间隙增大, 连接刚度呈现下降趋势, 在 20 N·m 的弯矩载荷下, 0.4 mm 间隙对应刚度为 14 027 N·m/rad, 2.0 mm 间隙对应刚度为 10 171 N·m/rad, 相比下降了 27%, 这是由于随配合尺寸改变, 锁销与孔壁姿态改变, 进而影响接触力的分配与杆臂的放大效应, 其作用机理与三点接触算例相同。具体地, 当内外孔壁与锁销间隙尺寸 d_c 增大时, 夹角 θ 和 β 相应增大,

表3 四点接触时不同载荷和间隙下的连接刚度
Table 3 Connection stiffness under different loads and clearances for four-point contact type

$M/(N \cdot m)$	间隙 d_c/mm				
	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
20	14 027	13 320	12 493	11 479	10 171
23	14 107	13 419	12 587	11 590	10 266
26	14 215	13 506	12 680	11 669	10 345
29	14 299	13 580	12 756	11 750	10 419
32	14 371	13 656	12 824	11 820	10 486
35	14 437	13 722	12 893	11 883	10 547
38	14 498	13 783	12 954	11 942	10 603
41	14 556	13 840	13 010	11 997	10 656
44	14 609	13 893	13 062	12 049	10 705
47	14 659	13 943	13 111	12 097	10 752
50	14 707	13 990	13 158	12 143	10 796

由外翼平衡方程(式(23))可知,在相同外翼载荷时锁销承受接触力的法向分量更大,导致横向弯曲变形和局部接触变形加剧,进而使结构宏观连接刚度下降。

3) 与三点接触算例相比,在相同载荷和间隙尺寸下,锁销四点接触时的连接刚度显著小于锁销三点接触时的连接刚度。其原因为:在三点接触算例中转轴和锁销共同承受外翼载荷,而四点接触算例中锁销单独承受外翼载荷,受力显著大于三点接触情况,因此变形更加明显,相同载荷下的连接刚度更小。

4 结论与展望

本文建立了折叠翼锁紧机构的力学模型,在静态分析基础上,依据 Hertz 接触理论确定接触变形,依据梁模型假设计算锁销弯曲变形,最终获得了锁紧条件下内外翼面之间的连接刚度,并开展多算例比较研究,主要结论如下:

1) 针对“梯-墙”静不定结构验证算例,在多载荷工况条件下获得的理论曲线与对应试验结果趋势吻合,数据具有较好的一致性,说明基于势能极值方法能够有效预测静不定结构的支反力,验证了方法的可用性和正确性。

2) 锁销三点接触和四点接触算例结果表明,在三点接触条件下,接触变形与梁模型弯曲变形接近,结构整体刚度取决于两者共同影响;在四点接触条件下,锁销的最大接触变形小于梁模型最大弯曲变形,在近似分析时可以忽略。

3) 参数分析表明,随载荷增大,各组连接刚度均呈现增大趋势,存在“渐刚非线性”效应;随间隙增大,连接刚度呈现下降趋势,其主要原因为配合尺寸影响锁销与孔壁的相对姿态,进而改变接触力分配及锁销的杆臂效应,最终影响连接刚度。因此可以考虑合理设计各间隙尺寸,将连接刚度调整至理想范围,以进一步提高机构的连接性能。

针对锁紧条件下的实际折叠结构,并没有普适的力学分析方法,本文通过引入简化假设开展了初步分析,在此基础上针对更一般问题,作者认为以下两部分内容将作为后续研究重点:

1) 当载荷超出弹性范围后,锁销和孔壁出现大变形和局部屈服,接触区的尺寸迅速扩大,接触形式将转化为协调接触,后续将进一步构建非线性几何方程和弹塑性条件下的连接刚度解析关系。

2) 对于复杂载荷工况,锁销与孔壁将呈现三维相对运动,其力学特性也更加复杂。因此,后续将开展三维锁销与孔壁之间的接触分析,研究更一般承载情况下连接刚度特点,并建立相应分析方法。

参考文献:

- [1] YARYGINA M V, POPOV Y I. Development of the weight formula for a folding wing[J]. *Russian Aeronautics*, 2012, 55(2): 120-126.
- [2] DI CAPRIO F, SCIGLIANO R, FAUCI R, et al. Design optimization of interfacing attachments for the deployable wing of an unmanned re-entry vehicle[J]. *Algorithms*, 2021, 14(5): 141.
- [3] 宋慧心, 金磊. 折叠翼飞行器的动力学建模与稳定控制[J]. *力学学报*, 2020, 52(6): 1548-1559.
- SONG Huixin, JIN Lei. Dynamic modeling and stability control of folding wing aircraft[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(6): 1548-1559. (in Chinese)
- [4] SOFLA A Y N, MEGUID S A, TAN K T, et al. Shape morphing of aircraft wing: status and challenges[J]. *Materials & Design*, 2010, 31(3): 1284-1292.
- [5] 张立启, 岳承宇, 赵永辉. 变后掠翼的变气动弹性建模与分析[J]. *力学学报*, 2021, 53(11): 3134-3146.
- ZHANG Liqi, YUE Chengyu, ZHAO Yonghui. Parameter-varying aeroelastic modeling and analysis for a variable-sweep wing[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(11): 3134-3146. (in Chinese)
- [6] 刘芳, 丁千. 含间隙折叠舵面的主共振响应分析[J]. *航空动力学报*, 2016, 31(12): 2965-2971.
- LIU Fang, DING Qian. Primary resonance response analysis on folding rudder with gaps[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2016, 31(12): 2965-2971. (in Chinese)
- [7] YANG Ning, WANG Nan, ZHANG Xin, et al. Nonlinear flutter wind tunnel test and numerical analysis of folding fins with freeplay nonlinearities[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016, 29(1): 144-159.
- [8] 王强, 马志赛, 张欣, 等. 基于模态综合法的含间隙折叠舵

- 面动态特性分析[J]. 航空学报, 2020, 41(5): 223507.
- WANG Qiang, MA Zhisai, ZHANG Xin, et al. Dynamic characteristic analysis for a folding fin with freeplay nonlinearities based on mode synthesis method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(5): 223507. (in Chinese)
- [9] MENGA E, HERNANDEZ S, MOLEDO S, et al. Nonlinear dynamic analysis of assembled aircraft structures with concentrated nonlinearities[R]. Saint Petersburg, Russia: 16th International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2015.
- [10] 赵广, 王永泉, 赵向阳, 等. 盘鼓螺栓连接结构接触刚度建模与应用检验[J]. 航空动力学报, 2022, 37(1): 76-86.
- ZHAO Guang, WANG Yongquan, ZHAO Xiangyang, et al. Modeling and application test of contact stiffness of bolt connection structure of disk and drum[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2022, 37(1): 76-86. (in Chinese)
- [11] 黄俊, 宋保江, 宫钊成, 等. 锁销位置对折叠翼固有振动特性的影响分析[J]. 导弹与航天运载技术, 2018(6): 14-18.
- HUANG Jun, SONG Baojiang, GONG Yicheng, et al. Impacts of the pin position on inherent vibration characteristics of a folding wing[J]. *Missiles and Space Vehicles*, 2018(6): 14-18. (in Chinese)
- [12] AHLQUIST J R, CARREÑO J M, CLIMENT H, et al. Assessment of nonlinear structural response in A400M GVT[C]//Structural Dynamics: Volume 3. New York, US: Springer, 2011: 1147-1155.
- [13] LAXALDE D, THOUVEREZ F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: application to turbomachinery bladings with friction interfaces[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 322(4/5): 1009-1025.
- [14] BOGRAD S, REUSS P, SCHMIDT A, et al. Modeling the dynamics of mechanical joints[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25(8): 2801-2826.
- [15] MOUSAKHANI M, THOENI K, FITYUS S, et al. A novel and robust contact detection algorithm for arbitrarily shaped blocks[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, 140: 104430.
- [16] MAYER M H, GAUL L. Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21(2): 724-734.
- [17] 缪辉, 臧朝平, 罗欣洋, 等. 基于薄层单元的拉杆转子接触界面动力学建模及修正[J]. 航空动力学报, 2019, 34(9): 1927-1935.
- MIAO Hui, ZANG Chaoping, LUO Xinyang, et al. Dynamic modeling and updating for contact interface of rod fastening rotor based on thin-layer element[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(9): 1927-1935. (in Chinese)
- [18] LACAYO R M, ALLEN M S. Updating structural models containing nonlinear Iwan joints using quasi-static modal analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 118: 133-157.
- [19] HU Wei, YANG Zhichun, GU Yingsong. Aeroelastic study for folding wing during the morphing process[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 365: 216-229.
- [20] CASTRICHINI A, HODIGERE SIDDARAMAIAH V, CALDERON D E, et al. Nonlinear folding wing tips for gust loads alleviation[J]. *Journal of Aircraft*, 2016, 53(5): 1391-1399.
- [21] ATTAR P J, TANG Deman, DOWELL E H. Nonlinear aeroelastic study for folding wing structures[J]. *AIAA Journal*, 2010, 48(10): 2187-2195.
- [22] LEE B H K, TRON A. Effects of structural nonlinearities on flutter characteristics of the CF-18 aircraft[J]. *Journal of Aircraft*, 1989, 26(8): 781-786.
- [23] 王博, 马志赛, 丁千, 等. 基础激励下含间隙折叠舵面非线性系统辨识[J]. 振动与冲击, 2020, 39(4): 122-128, 135.
- WANG Bo, MA Zhisai, DING Qian, et al. System identification of folding rudders with freeplay nonlinearity under base excitation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(4): 122-128, 135. (in Chinese)
- [24] 何昊南, 于开平, 唐宏, 等. 有间隙折叠舵面的振动实验与非线性建模研究[J]. 力学学报, 2019, 51(5): 1476-1488.
- HE Haonan, YU Kaiping, TANG Hong, et al. Vibration experiment and nonlinear modelling research on the folding fin with freeplay[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(5): 1476-1488. (in Chinese)
- [25] HE Haonan, TANG Hong, YU Kaiping, et al. Nonlinear aeroelastic analysis of the folding fin with freeplay under thermal environment[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(9): 2357-2371.
- [26] NOËL J P, KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 83: 2-35.
- [27] 张静, 郭宏伟, 刘荣强, 等. 铰链对含铰结构非线性动力学特性影响分析[J]. 航空学报, 2014, 35(5): 1433-1445.
- ZHANG Jing, GUO Hongwei, LIU Rongqiang, et al. Influence analysis of joints on nonlinear dynamic characteristics of articulated structures[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(5): 1433-1445. (in Chinese)
- [28] GUO J, RANDALL R B, BORGESANI P, et al. A study on the effects of piston secondary motion in conjunction with clearance joints[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 149: 103824.
- [29] XIANG W, YAN Shaoze, WU Jianing. Dynamic analysis of planar mechanical systems considering stick-slip and Stribeck effect in revolute clearance joints[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(1): 321-341.
- [30] PI Ting, ZHANG Yunqing. Simulation of planar mechanisms with revolute clearance joints using the multipatch based isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 343: 453-489.
- [31] ZHUANG Fangfang, WANG Qi. Modeling and analysis of rigid multibody systems with driving constraints and frictional translation joints[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(3): 437-446.
- [32] ZHANG Jie, WANG Qi. Modeling and simulation of a frictional translational joint with a flexible slider and clearance[J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, 38(4): 367-389.
- [33] LIU Cheng, TIAN Qiang, HU Haiyan. Dynamics and control of a spatial rigid-flexible multibody system with multiple cylindrical clearance joints[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 52: 106-129.
- [34] CIRELLI M, VALENTINI P P, PENNASTRI E. A study of the nonlinear dynamic response of spur gear using a multibody contact based model with flexible teeth[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 445: 148-167.
- [35] ROARK R J, YOUNG W C. Formulas for stress and strain[M]. New York, US: McGraw-Hill, 1975.
- [36] SINHA P R. A contact stress model for determining forces in an equilibrium grasp[D]. Philadelphia, US: University of Pennsylvania, 1989: 1-59.
- [37] UGRAY Z, LASDON L, PLUMMER J, et al. Scatter search and local NLP solvers: a multistart framework for global optimization[J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2007, 19(3): 328-340.
- [38] GILAT A. MATLAB: an introduction with applications[M]. 4th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011.
- [39] 单辉祖. 材料力学: II[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [40] SILVERMAN M P. Reaction forces on a fixed ladder in static equilibrium: analysis and definitive experimental test of the ladder problem[J]. *World Journal of Mechanics*, 2018, 8(9): 311-342.