

文章编号: 1000-8055(2023)10-2527-09

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20230065

不确定转子系统非参数建模与散度参数识别

刘彦旭¹, 刘保国^{1,2}, 张震¹, 冯伟^{1,2}, 张瑞丰¹

(1. 河南工业大学 机电工程学院, 郑州 450001;

2. 河南工业大学 河南省超硬磨料磨削装备重点实验室, 郑州 450001)

摘 要: 针对具有不确定性的转子系统, 提出了基于非参数建模和矩阵极分解理论的不确定动力学建模方法, 并提出了适用于不确定转子系统非参数动力学模型散度参数识别的方法。利用所搭建的转子实验台对该方法进行了实验验证。结果表明: 在转子系统的 4 个观测点处, 转子转速不超过 3 000 r/min 时, 非参数模型结果的均值和确定性模型几乎重合; 但转速接近 1 阶临界转速时, 采用非参数不确定动力学计算模型所得到的结果均值与实测结果更为接近。该研究可为研究具有模型不确定性的双转子或多转子系统的非参数建模方法及对应的散度参数识别方法研究提供参考。

关 键 词: 非参数建模; 模型不确定; 转子系统; 散度参数; 振动响应

中图分类号: V233.1

文献标志码: A

Nonparametric modeling and dispersion parameter identification for uncertain rotor systems

LIU Yanxu¹, LIU Baoguo^{1,2}, ZHANG Zhen¹, FENG Wei^{1,2}, ZHANG Ruifeng¹

(1. School of Electromechanical Engineering,

Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China;

2. Henan Key Laboratory for Superabrasive Grinding Equipment,

Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: For rotor systems with uncertainty, an uncertain dynamic modeling method based on nonparametric modeling and matrix polar decomposition theory was proposed, and a method for identifying the dispersion parameters of the nonparametric dynamic model of the uncertain rotor system was also proposed. The nonparametric modeling method was verified by utilizing the rotor experimental platform. The results showed that at four observation points of the rotor system, when the rotor speed did not exceed 3 000 r/min, the mean value of the results of the nonparametric model almost coincided with the deterministic model. However, when the speed was close to the first critical speed, the mean value of the results obtained by the nonparametric uncertain dynamic calculation model was closer to the measured results. This study can provide a reference for the study of nonparametric modeling methods and corresponding dispersion parameter identification methods of two-rotor or multi-rotor systems with model uncertainty.

Keywords: nonparametric modeling; model uncertainty; rotor system; dispersion parameter; vibration response

收稿日期: 2023-02-09

基金项目: 国家自然科学基金(12072106)

作者简介: 刘彦旭(1990—), 男, 博士生, 主要从事转子动力学研究。E-mail: yanxuli2010@sina.com

通信作者: 刘保国(1962—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事转子动力学、随机振动研究。E-mail: bgliu1978@sina.com

引用格式: 刘彦旭, 刘保国, 张震, 等. 不确定转子系统非参数建模与散度参数识别[J]. 航空动力学报, 2023, 38(10): 2527-2535. LIU Yanxu, LIU Baoguo, ZHANG Zhen, et al. Nonparametric modeling and dispersion parameter identification for uncertain rotor systems[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(10): 2527-2535.

航空发动机、发电动机等旋转机械的制造加工、安装及运行过程中存在各种不同程度的不确定因素,比如高温环境会引起转子系统支承刚度的不确定性,转子系统运行过程中磨损引起的几何尺寸不确定性,外力干扰引起的载荷不确定性等^[1-6]。在对转子系统进行动力学建模与分析计算时,不确定性在动力学方程中具体表现为系统的质量矩阵、陀螺矩阵、刚度矩阵及阻尼矩阵的不确定性。采用传递矩阵法或有限元法构建系统动力学响应的确定性计算模型时,实际上是忽略了不确定性因素对计算结果的影响,但为了得到合理的分析计算结果,需要考虑不确定性的影响^[7-8]。

目前,国内外针对不确定转子系统的振动问题进行了广泛的研究。在实际工程的问题中,针对支承刚度、圆盘质量、偏心距、转轴弹性模量等具体物理参数的不确定性,广泛采用的研究方法主要有蒙特卡罗模拟(MCS)方法^[9]、扰动方法(PM)^[10]、多项式混沌展开(PCE)方法^[11-12]、广义多项式(gPC)方法^[13]等。Li等^[14]采用MCS方法研究了涡轮膨胀机转子系统在液滴不确定撞击下的动力学行为。Yang等^[15]采用PCE法来描述含不确定横向裂纹的空心转子,并研究了含横向裂纹转子系统的建模及动力学方程的求解方法。Fu等^[16]将PCE法和切比雪夫替代方法(CSM)相结合,研究了在随机参数和不确定但有界参数下转子系统的加速瞬态振动问题。Ma等^[17]为了考虑联接头处结点参数的不确定性,采用基于切比雪夫包含函数和直接迭代算法的区间分析方法,建立了模拟界面上结点动力学特性的改进薄层单元法,并通过与MCS方法比较,证明了该方法的有效性。文献[18]对这一方法进行了改进,使计算的临界转速上下限与实测结果更为接近。Wei等^[19]为了研究不确定激励作用下风力发电机组齿轮系统的动态响应,基于多维谐波平衡法和切比雪夫包含函数推导出了区间多维谐波平衡法,并通过仿真计算验证了该方法的准确性。

实际上对具体转子系统进行动力学建模时,不仅存在载荷及系统物理结构参数不确定性,还存在一些难以用明确的数学或物理语言描述的不确定性,即模型不确定性,比如将三维连续转轴简单离散为一维集总化模型^[20-21]。在转子系统结构参数都确定的情况下,如果不考虑测量误差,理论与实验结果之间的误差主要由模型不确定性引起。文献[22]首先提出将基于随机矩阵理论的非参数方法用于处理结构动力学系统建模过程

产生的模型不确定性,研究了对称正定的质量矩阵、刚度矩阵的非参数随机建模方法。针对不确定转子-支承系统,为了在不具有对称正定性质的随机陀螺矩阵、随机刚度矩阵及随机阻尼矩阵中考虑模型不确定性,在文献[23]中介绍了一种一般矩阵的非参数建模方法。研究表明,在对不确定转子系统临界转速、动力学响应、系统可靠性等进行预测或分析时,将模型不确定性考虑在内更符合实际情况^[24]。

本文针对不确定转子-支承系统,提出基于非参数建模和矩阵极分解理论的不确定系统动力学计算模型建模方法,给出模型不确定转子-支承系统动力学计算模型中不确定质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵散度参数的估计方法,并利用转子实验台,通过具体实验数据对以上理论方法进行实验验证。

本文的结构安排如下:第1节描述不确定转子系统的非参数动力学建模方法,该方法由3部分组成,即确定性矩阵的极分解、不确定矩阵的构建和非参数动力学模型的构建;第2节给出散度参数的识别方法;第3节利用实测数据验证了本文方法的合理性;第4节对本文进行了总结。

1 非参数动力学建模方法

对于不确定转子-支承系统,采用非参数方法建立系统随机质量矩阵、随机刚度矩阵和随机阻尼矩阵的重要前提是:将以上矩阵表示为含有对称正定矩阵因子的乘积形式,或者这些随机矩阵本身具有对称正定的性质。在简单的转子-支承系统中,为了简化计算,会将各向异性表现不明显的刚度矩阵处理为对称形式,使其具有对称正定的性质;但在复杂转子系统中,可能需要在刚度矩阵中考虑支承刚度的各向异性,这将使刚度矩阵本身失去对称正定的性质,这种情况下可采用矩阵的极分解方法将其表示为1个正交矩阵和1个正定矩阵相乘的形式。

1.1 刚度矩阵和阻尼矩阵的极分解方法

设 $\mathbf{A}_d$ 为一 $n \times n$ 的满秩不对称实数确定性矩阵,其对应的随机矩阵记为 $\mathbf{A}_r$,具有和 $\mathbf{A}_d$ 相同的性质。 $\mathbf{A}_d$ 和 $\mathbf{A}_r$ 满足

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{E}(\mathbf{A}_r) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}(\mathbf{A}_r)$ 表示求随机矩阵 $\mathbf{A}_r$ 的均值矩阵。根据文献[25],对矩阵 $\mathbf{A}_d$ 进行极分解:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{U}\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2\mathbf{U} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{U}$ 为矩阵 $\mathbf{A}_d$ 的正交矩阵因子; $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 分别为 $\mathbf{A}_d$ 的右极正定矩阵因子和左极正定矩阵因子。由式(2)可将不满足对称正定性质的刚度矩阵和阻尼矩阵分别表示为

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{H}_{K_r} \mathbf{U}_{K_r} \quad (3)$$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{H}_{C_r} \mathbf{U}_{C_r} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{H}_{K_r}$ 和 $\mathbf{U}_{K_r}$ 分别为刚度矩阵的对称正定矩阵因子和正交矩阵因子; $\mathbf{H}_{C_r}$ 和 $\mathbf{U}_{C_r}$ 分别为阻尼矩阵的对称正定矩阵因子和正交矩阵因子。式(3)和式(4)分别将不具有对称正定性质的刚度矩阵和阻尼矩阵表示为对称正定矩阵和正定矩阵相乘的形式。质量矩阵本身具有对称正定的性质, 因此不需要进行分解。

1.2 不确定刚度矩阵和不确定阻尼矩阵的非参数建模方法

采用非参数方法构建转子系统不确定刚度矩阵和不确定阻尼矩阵的核心是利用最大熵原理得到具有最大熵的随机矩阵 $\mathbf{H}_{K_r}$ 和 $\mathbf{H}_{C_r}$, 对称正定实数随机矩阵 $\mathbf{H}$ 满足式(5)时熵最大^[26]。

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_H^T \mathbf{G} \mathbf{U}_H \quad (5)$$

式中 $\mathbf{H}$ 表示确定性矩阵 $\mathbf{H}_d$ 对应的随机矩阵 $\mathbf{H}_{K_r}$ 或 $\mathbf{H}_{C_r}$; $\mathbf{U}_H$ 为上三角实数矩阵, 是对 $\mathbf{H}_d$ 进行乔列斯基分解得到的, 即

$$\mathbf{H}_d = \mathbf{U}_H^T \mathbf{U}_H \quad (6)$$

式(5)中 $\mathbf{G}$ 为 Wishart 随机矩阵, 其均值矩阵为单位矩阵, $\mathbf{G}$ 也可表示为

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_G^T \mathbf{U}_G \quad (7)$$

式中 $\mathbf{U}_G$ 为上三角实数随机矩阵, 其各元素 u_{ij} 是统计独立的, 根据 Wishart 随机矩阵的性质, 分解得到的矩阵 $\mathbf{U}_G$ 主对角线上的元素和非主对角线上的元素具有不同的概率分布: 当 $i > j$ 时, $u_{ij} = 0$; 当 $i < j$ 时, u_{ij} 为高斯随机变量, 其均值为 0, 方差为 $\delta^2(n+1)^{-1}$, 其中 δ 为散度参数, 用于表示 u_{ij} 的离散水平; 当 $i = j$ 时, $u_{ij} = [2\delta^2 w_i / (n+1)]^{1/2}$, w_i 是伽马随机变量, 其概率密度函数为^[22]

$$p_{w_i}(w) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(w) \frac{1}{e^w \Gamma(a_{n,i})} w^{a_{n,i}-1} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(w)$ 为指示函数, 当 $w \in \mathbf{R}^+$ 时, $\mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(w) = 1$; 当 $w \notin \mathbf{R}^+$ 时, $\mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(w) = 0$ 。 $a_{n,i} = (2\delta^2)^{-1}[\delta^2(1-i) + n+1]$, Γ 为伽马函数:

$$\Gamma(a_{n,i}) = \int_0^{+\infty} x^{a_{n,i}-1} e^{-x} dx \quad (9)$$

式(5)~式(9)表明, 通过模拟上三角实数随机矩阵 $\mathbf{U}_G$ 可间接得到 $\mathbf{H}$ 的随机模型, 由于 $\mathbf{U}_G$ 中非零元素的分布实际上均取决于散度参数 δ , 因此随机刚度矩阵 $\mathbf{K}_r$ 和随机阻尼矩阵 $\mathbf{C}_r$ 的不确定性水平也取决于 δ 。采用与文献[27]相类似的方法, 利用不确定系统最低阶临界转速的实验数据可得到 δ 的估计值。将式(7)代入式(5), 分别用 $\mathbf{K}_r$ 和 $\mathbf{C}_r$ 替换随机矩阵 $\mathbf{H}$, 并带入式(3)和式(4)便得到 $\mathbf{K}_r$ 和 $\mathbf{C}_r$ 的非参数模型:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{U}_{H_K}^T \mathbf{U}_{G_K}^T \mathbf{U}_{G_K} \mathbf{U}_{H_K} \mathbf{U}_{K_r} \quad (10)$$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{U}_{H_C}^T \mathbf{U}_{G_C}^T \mathbf{U}_{G_C} \mathbf{U}_{H_C} \mathbf{U}_{C_r} \quad (11)$$

1.3 不确定转子-支承系统的非参数动力学计算模型

利用基于随机矩阵理论的非参数方法构建不确定转子-支承系统动力学模型的本质是将确定性动力学模型中的确定性质量矩阵、刚度矩阵、陀螺矩阵和阻尼矩阵替换为对应的随机矩阵。以图1所示转子-支承系统为例, 支承位置在点 P_2 和点 P_6 处, 轮盘位置在点 P_3 和点 P_5 处。

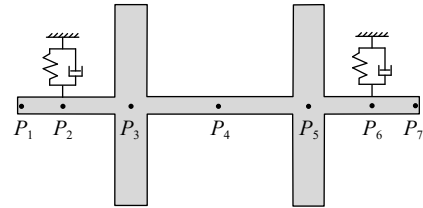


图1 转子-支承系统

Fig. 1 System of the rotor-support

按照图1的转子-支承系统, 在支承处考虑支承刚度和阻尼, 在轮盘处考虑陀螺效应, 将其余单元处考虑为集中质量, 系统计算模型如图2所示。

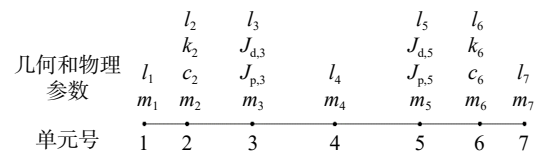


图2 转子-支承系统计算模型

Fig. 2 Computational model of the system of rotor-support

图2所示的计算模型中, m_i 、 c_i 、 k_i 、 $J_{d,i}$ 和 $J_{p,i}$ 分别为第 i 个节点处的质量、支承阻尼、支承刚度、直径转动惯量和极转动惯量。 l_i 为第 i 个节点右侧的轴段单元长度。根据图2所示的计算模型, 可采用有限元法写出其对应的确定性动力学计算模型:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (12)$$

式中 $\bar{\mathbf{M}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}$ 分别为确定性动力学模型的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和不平衡力向量。

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\bar{\mathbf{Q}}_1, \bar{\mathbf{Q}}_2)^T = \Omega^2 [(m_1 e_1 \cos \varphi_1, 0, \dots, m_N e_N \cos \varphi_N, 0)^T, (m_1 e_1 \sin \varphi_1, 0, \dots, m_N e_N \sin \varphi_N, 0)^T] \quad (16)$$

式(13)~式(16)中 $\bar{\mathbf{M}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{G}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{K}}_1$ 分别为确定性整体质量矩阵、陀螺矩阵和转轴刚度矩阵, $\bar{\mathbf{K}}_{11}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{12}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{21}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}_{22}$ 为支承作用产生的刚度矩阵, $\bar{\mathbf{C}}_{11}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}_{12}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}_{21}$ 和 $\bar{\mathbf{C}}_{22}$ 为支承作用产生的阻尼矩阵, Ω 为转子转速, e_i 为第 i 个单元处的轮盘偏心距, φ_i 为偏心幅角。支承刚度和阻尼的各向异性会使式(12)中的 $\bar{\mathbf{C}}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}$ 不具有对称正定的性质, 根据文中第1.2节的非参数建模方法, 将式(12)中的确定性矩阵 $\bar{\mathbf{M}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 和 $\bar{\mathbf{K}}$ 替换为随机矩阵 $\mathbf{M}_r$ 、 $\mathbf{C}_r$ 和 $\mathbf{K}_r$, 可以构建出系统的不确定动力学计算模型:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{z}_r = \bar{\mathbf{Q}} \quad (17)$$

式中随机矩阵 $\mathbf{M}_r$ 、 $\mathbf{C}_r$ 和 $\mathbf{K}_r$ 分别为

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{U}_{H_M}^T \mathbf{U}_{G_M}^T \mathbf{U}_{G_M} \mathbf{U}_{H_M} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{U}_{H_C}^T \mathbf{U}_{G_C}^T \mathbf{U}_{G_C} \mathbf{U}_{H_C} \mathbf{U}_{C_r} \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{U}_{H_K}^T \mathbf{U}_{G_K}^T \mathbf{U}_{G_K} \mathbf{U}_{H_K} \mathbf{U}_{K_r} \quad (20)$$

式(18)~式(20)中上三角实数矩阵 $\mathbf{U}_{H_M}$ 、 $\mathbf{U}_{H_C}$ 和 $\mathbf{U}_{H_K}$ 分别满足

$$\mathbf{U}_{H_M}^T \mathbf{U}_{H_M} = \bar{\mathbf{M}} \quad (21)$$

$$\mathbf{U}_{H_C}^T \mathbf{U}_{H_C} = \bar{\mathbf{C}} \quad (22)$$

$$\mathbf{U}_{H_K}^T \mathbf{U}_{H_K} = \bar{\mathbf{K}} \quad (23)$$

根据式(7)中Wishart随机矩阵 $\mathbf{G}$ 的性质, 上三角实数矩阵 $\mathbf{U}_{G_M}$ 、 $\mathbf{U}_{G_C}$ 和 $\mathbf{U}_{G_K}$ 满足

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}_{G_M}^T \mathbf{U}_{G_M}) = \mathbf{E}(\mathbf{U}_{G_C}^T \mathbf{U}_{G_C}) = \mathbf{E}(\mathbf{U}_{G_K}^T \mathbf{U}_{G_K}) = \mathbf{I} \quad (24)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。需要指出的是, 由于矩阵 $\bar{\mathbf{G}}_1$ 中的非零元素是与对称正定实数矩阵 $\bar{\mathbf{M}}_1$ 相互关联的, 因此利用非参数建模方法得到 $\bar{\mathbf{M}}_1$ 对应的随机矩阵 $\mathbf{M}_1$ 后, 可通过 $\bar{\mathbf{G}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{M}}_1$ 的关系得到随机矩阵 $\mathbf{G}_1$ 。

2 非参数动力学计算模型散度参数的识别方法

在利用这种基于随机矩阵理论的非参数方法

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{G}}_1 \\ -\bar{\mathbf{G}}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{11} & \bar{\mathbf{C}}_{12} \\ \bar{\mathbf{C}}_{21} & \bar{\mathbf{C}}_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

构建不确定转子-支承系统的动力学计算模型时, 用于表征随机矩阵 $\mathbf{M}_r$ 、 $\mathbf{C}_r$ 和 $\mathbf{K}_r$ 不确定性水平的散度参数 δ_M 、 δ_C 和 δ_K 是未知的。在没有具体的实验数据时, 可以利用模拟数据进行识别; 在能够获取实际不确定系统具体低阶临界转速及振型实验数据的情况下, 可以利用这些实验数据对散度参数进行识别, 具体步骤如下:

1) 通过实验得到实际不确定系统的最低阶临界转速的具体数据 ω_1 , 利用确定性动力学模型计算出最低阶临界转速 ω_1^d (在实验装置能够得到系统更高阶临界转速的情况下, 可通过实验获取前 b 阶临界转速, 即 $\omega_1 \leq \dots \leq \omega_b$, 这些临界转速依次对应于确定性动力学模型的前 b 阶临界转速 $\omega_1^d \leq \dots \leq \omega_b^d$)。

2) 通过实验得到前 b 阶临界转速对应的振型矩阵 $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_b]$, 其列向量 $\boldsymbol{\psi}_i$ ($1 \leq i \leq b$) 为第 i 阶临界转速对应的振型。利用确定性系统的动力学计算模型得到前 b 阶临界转速对应的振型矩阵 $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1^d, \dots, \boldsymbol{\phi}_b^d]$ 。

3) 利用文献[28]的方法, 根据 $\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 推导出实际质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 和 $\tilde{\mathbf{K}}$ 。假设 $\mathbf{u}$ 为实验得到的广义坐标列向量, $\mathbf{u}^d$ 为确定性动力学计算模型的广义坐标列向量, 有

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{u}^d \quad (25)$$

对式(25)进行矩阵变换, 在等式的两边分别左乘矩阵 $(\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T$, 则 $\mathbf{u}$ 可表示为

$$\mathbf{u} = (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\phi} \mathbf{u}^d \quad (26)$$

利用式(26)所表示的矩阵变换对 $\tilde{\mathbf{M}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 和 $\tilde{\mathbf{K}}$ 进行变换, 记 $\mathbf{S} = (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\phi}$, 令 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为 $\tilde{\mathbf{M}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 或 $\tilde{\mathbf{K}}$, 有

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{S} \quad (27)$$

引入矩阵 $\tilde{\mathbf{G}}_A$, 使其满足 $\mathbf{A} = \mathbf{U}_A^T \tilde{\mathbf{G}}_A \mathbf{U}_A$, 其中上三角实数矩阵 $\mathbf{U}_A$ 与式(5)中的上三角矩阵性质相同, 满足 $\mathbf{U}_A^T \mathbf{U}_A = \mathbf{A}_d$ 。因此 $\tilde{\mathbf{G}}_A$ 可表示为

$$\tilde{\mathbf{G}}_A = \mathbf{U}_A^{-T} \mathbf{A} \mathbf{U}_A^{-1} \quad (28)$$

结合式(5)矩阵的 $\mathbf{G}$ 的性质,用以上实验数据得到的 $\tilde{\mathbf{G}}_A$ 对散度参数进行识别^[29]:

$$\delta_A \approx n^{-1/2} \|\tilde{\mathbf{G}}_A - \mathbf{I}\|_F \quad (29)$$

式中 $\|\tilde{\mathbf{G}}_A - \mathbf{I}\|_F$ 表示求 $\tilde{\mathbf{G}}_A - \mathbf{I}$ 的弗罗贝尼乌斯范数(Frobenius norm),利用式(29)可分别识别出 δ_M 、 δ_C 和 δ_K 。

3 非参数建模与散度参数识别方法的实验验证

3.1 实验验证步骤

为了验证本文的不确定转子-支承系统非参数动力学建模理论和散度参数识别方法的有效性,在图3所示转子实验平台上进行实验验证。第1步是对图3所示转子系统进行确定性动力学建模,并计算出其最低阶临界转速和主振型;第2步是利用第2节的方法识别出散度参数值;第3步是利用第1节的方法所建立的不确定系统非参数动力学计算模型,计算出0~2 000 r/min范围内的不平衡响应预测结果,并将其和确定性动力学模型所计算的振动响应进行对比分析。

图3转子实验台的具体物理与几何参数如表1所示。

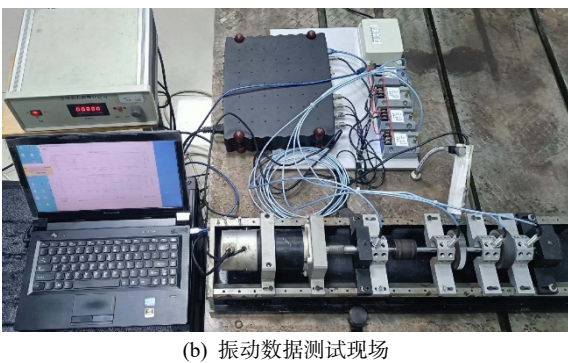
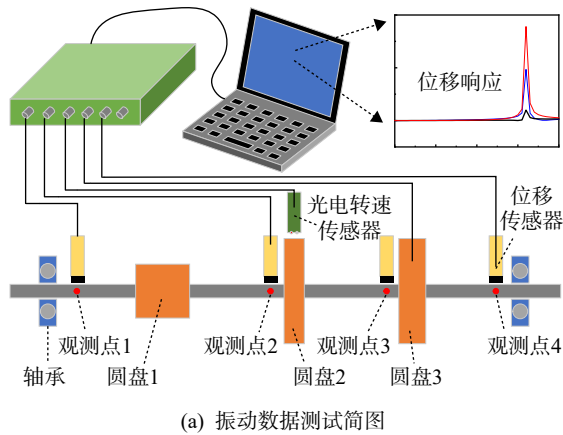


图3 转子实验平台

Fig. 3 Rotor experimental bench

表1 转子实验台参数

Table 1 Parameters of the rotor experimental bench

参数	数值
转轴半径 r/m	0.005
转轴弹性模量 $E/10^{11} (\text{N/m}^2)$	2.060
轴长度 l/m	0.408
各轮盘质量 m_i/kg	0.670, 0.500, 0.340
各轮盘的直径 d_i/m	0.039, 0.039, 0.020
支承刚度 $k_1/10^7 (\text{N/m})$	6.0
支承刚度 $k_2/10^7 (\text{N/m})$	6.0
各观测点距轴左端距离/ m	0.058, 0.193, 0.278, 0.343
盘2上的不平衡质量 m_u/g	0.359
不平衡质量的偏心距 e/m	0.03

3.2 识别散度参数 δ_M 和 δ_K

根据式(12)描述的转子-支承系统确定性动力学计算模型,可得到其对应的齐次表达式

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}} + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{z}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (30)$$

结合表1的具体参数,可得到式(13)~式(15)中的矩阵 $\overline{\mathbf{M}}_1$ 、 $\overline{\mathbf{G}}_1$ 、 $\overline{\mathbf{K}}_1$ 、 $\overline{\mathbf{K}}_{11}$ 、 $\overline{\mathbf{K}}_{12}$ 、 $\overline{\mathbf{K}}_{21}$ 、 $\overline{\mathbf{K}}_{22}$ 、 $\overline{\mathbf{C}}_{11}$ 、 $\overline{\mathbf{C}}_{12}$ 、 $\overline{\mathbf{C}}_{21}$ 和 $\overline{\mathbf{C}}_{22}$ 。利用确定性动力学计算模型可得到转子系统的坎贝尔图,如图4所示,图中 ω_{b1} 、 ω_{f1} 分别为1阶反、正进动速度, ω_{b2} 、 ω_{f2} 分别为2阶反、正进动速度。

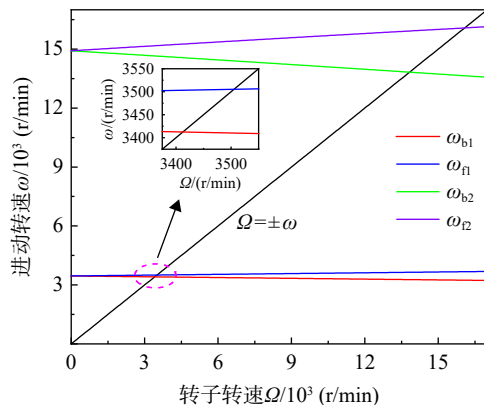


图4 确定性动力学计算模型的坎贝尔图

Fig. 4 Campbell diagram of the deterministic dynamic model

根据图4可知,确定性系统的1阶反、正进动临界转速分别为 $\omega_{bc1} = 3\,409 \text{ r/min}$ 和 $\omega_{fc1} = 3\,507 \text{ r/min}$ 。实际上由于系统中不平衡质量激励的存在,转子的同步涡动为正向涡动,因此这里选用1阶正进动临界转速 $\omega_{fc1} = 3\,507 \text{ r/min}$ 来计算确定性系统的1阶振型 ϕ_1^d ,结果如图5所示。

利用图3所示转子实验台,采用升降速的方法可得到系统的1阶临界转速,为了减小电动机

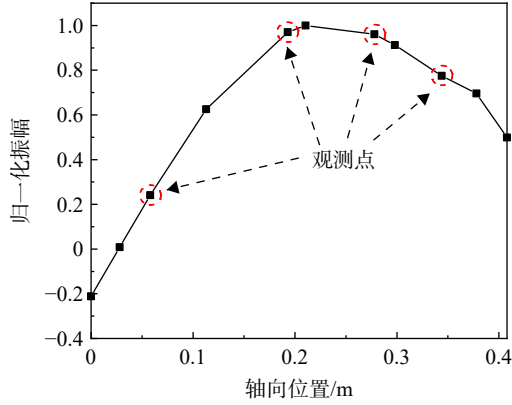


图5 确定性动力学计算模型的1阶振型

Fig. 5 First order vibration mode of deterministic dynamic model

功率波动对实验结果的影响,一般采用降速的方式得到临界转速与振型,本节同样采用降速的方式获取临界转速与振型。得到1阶振型 ψ_1 ,图6展示了确定性计算模型得到的 ϕ_1^d 和通过实验得到的 ψ_1 。

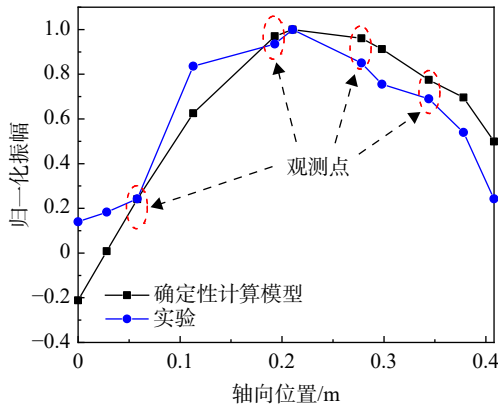


图6 转子系统的1阶振型

Fig. 6 First order vibration mode of the rotor system

$$\begin{cases} \text{对 } \forall i > j, & u_{ij,M} = 0, u_{ij,K} = 0 \\ \text{对 } \forall i < j, & u_{ij,M} \sim N[0, \delta(n+1)^{-1/2}], u_{ij,K} \sim N[0, \delta(n+1)^{-1/2}] \\ \text{对 } \forall i = j, & u_{ij,M} = [2\delta^2 w_i / (n+1)]^{1/2}, u_{ij,K} = [2\delta^2 w_i / (n+1)]^{1/2} \end{cases} \quad (34)$$

式中 w_i 是伽马随机变量,其概率密度函数用式(8)表示。利用式(34)构建出矩阵 U_{G_M} 和 U_{G_K} ,将其带入式(33)可得随机矩阵 G_M 和 G_K ,将矩阵 G_M 、 G_K 代入式(18)和式(20)可得随机矩阵 M_r 和 K_r ,将这两个随机矩阵代入式(17)所示的不确定动力学计算模型,求解这一非齐次方程组,可得不确定动力学计算模型的振动响应预测结果,如图7所示。

图7(a)~图7(d)展示了非参数动力学计算模型对4个观测点处振动响应的预测结果。结果

如果能够得到更高阶振型的实验数据,后面散度参数的识别结果会更准确,但由于所采用的转子实验平台允许的最高转速为10 000 r/min,难以通过实验采集到高阶振动数据,因此这里仅利用1阶振型来识别散度参数。

根据 ϕ_1^d 和 ψ_1 ,利用第2节给出的散度参数识别方法可得到 ϕ 和 ψ :

$$\begin{cases} \phi = \phi_1^d \\ \psi = \psi_1 \end{cases} \quad (31)$$

由 ϕ 和 ψ 可推导出矩阵 S :

$$S = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T \phi \quad (32)$$

将矩阵 S 代入式(27)~式(29),识别出的散度参数为 $\delta_M = 0.1277$, $\delta_K = 0.2157$ 。

3.3 散度参数识别结果的实验验证

为了验证文中第3.2节散度参数 δ_M 和 δ_K 识别结果的合理性,需要利用文中第1节的非参数动力学计算模型得到4个观测点处在0~3 800 r/min转速范围内的振动响应预测结果,并利用图3所示转子实验台得到实际振动响应,与预测结果进行比较分析。

3.3.1 非参数动力学计算模型的振动响应预测

利用识别得到的 δ_M 和 δ_K 的值可得到随机矩阵 G_M 和 G_K :

$$\begin{cases} G_M = U_{G_M}^T U_{G_M} \\ G_K = U_{G_K}^T U_{G_K} \end{cases} \quad (33)$$

根据第1.2节对式(7)~式(8)的描述可知,式(33)中 U_{G_M} 和 U_{G_K} 均为上三角实数随机矩阵,且矩阵 U_{G_M} 的元素 $u_{ij,M}$ 及矩阵 U_{G_K} 的元素 $u_{ij,K}$ 满足

表明,在转子转速 $\Omega = 0 \sim 2\,500$ r/min范围内,非参数不确定动力学计算模型得到的振幅均值和确定性动力学计算模型的计算结果几乎重合;但在临界转速附近,两者差异较大。其主要原因是前者考虑了模型不确定性,而在临界转速附近,模型不确定性对系统振动响应的影响与较低转速区间相比更大。

图7(a)~图7(d)中,非参数不确定动力学计算模型预测结果均值的峰值与确定性计算模型相比更小,而且峰值所对应的转速也比确定性计算

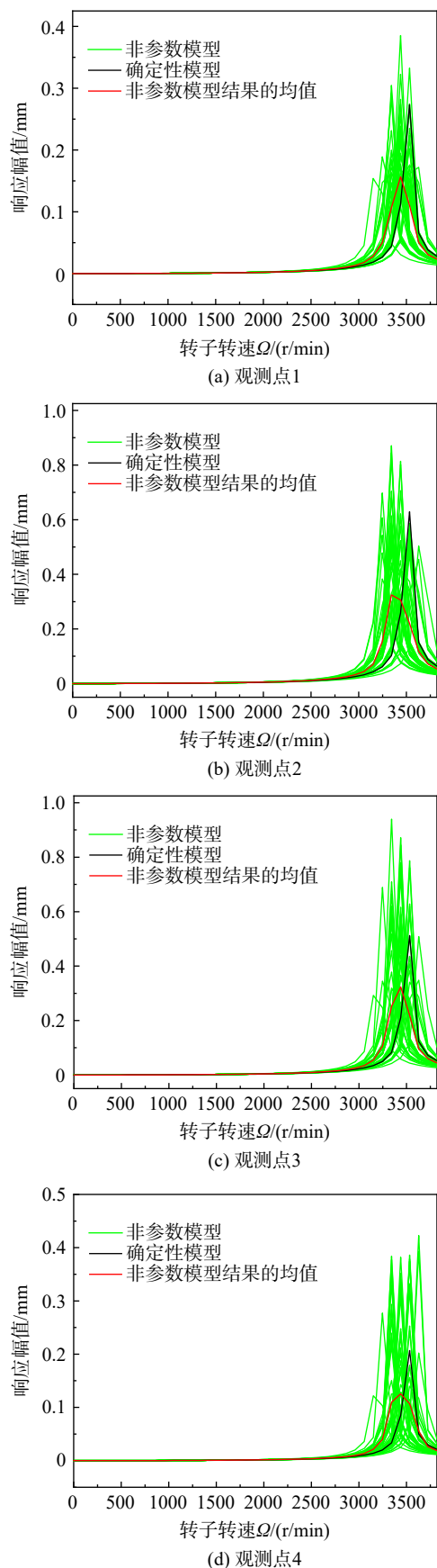


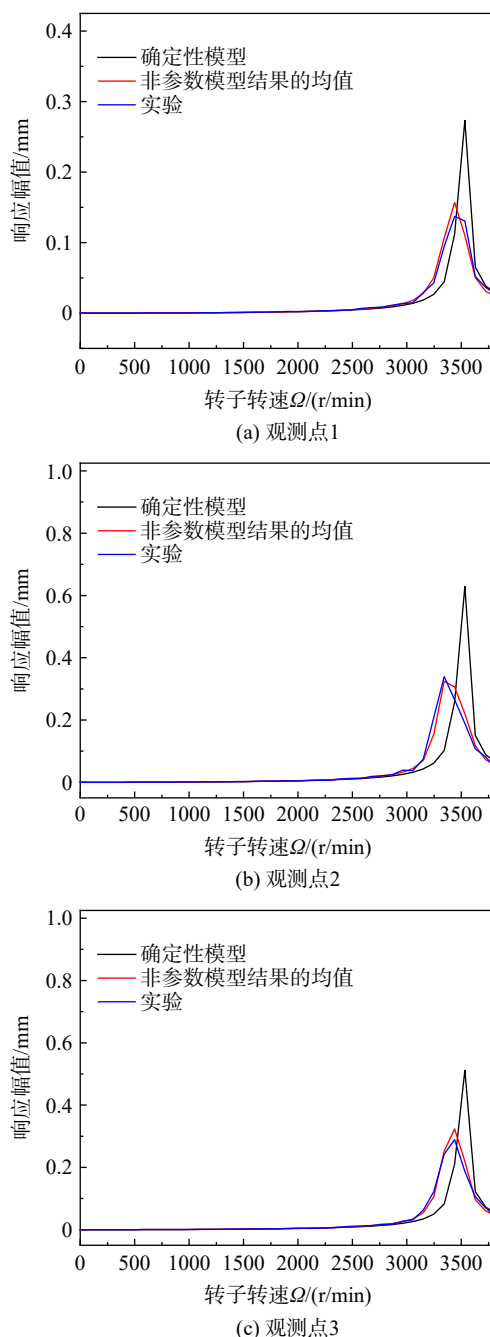
图 7 不确定动力学计算模型振动响应预测

Fig. 7 Vibration response prediction of the uncertain dynamic calculation model

模型的小,这意味着在转子转速 Ω 与系统 1 阶临界转速相等时,以上 4 个观测点处的实际振幅可能比确定性计算模型得到的振幅小,需要指出的是,这只是理论计算所得出的结论。

3.3.2 实验验证

文中第 3.3.1 节采用非参数不确定动力学计算模型对图 3(a)中 4 个观测点处的振动响应结果进行了预测,为了验证这一计算模型建立的合理性,利用图 3(b)所示转子实验台进行实验,得到在 $\Omega=0\sim 3\,500$ r/min 范围内 4 个观测点处的振动响应,图 8 为实验结果与非参数不确定动力学计算模型预测结果的对比。



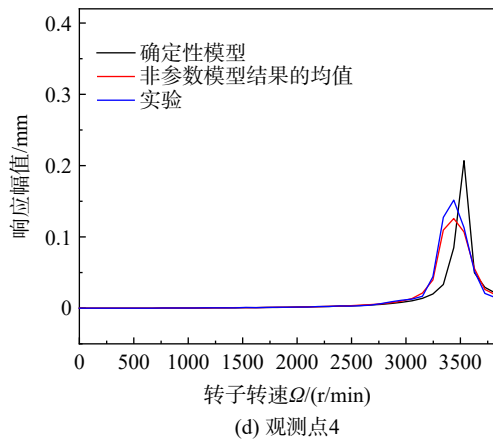


图8 振动响应实测结果与非参数动力学模型预测的对比
Fig. 8 Comparison between the measured results of vibration response and the prediction of nonparametric dynamic model

图8结果表明,在 $\Omega=0\sim 3\,000\text{ r/min}$ 范围内,实测振动响应曲线、确定性计算模型和非参数不确定动力学计算模型所得到的振动响应曲线几乎重合。但在 $\Omega=3\,000\sim 3\,800\text{ r/min}$ 转速范围内,与确定性动力学计算模型相比,非参数动力学计算模型预测的均值曲线更接近于实测振动响应曲线。 $\Omega=3\,342\text{ r/min}$ 时,由确定性和不确定动力学计算模型得到的观测点1处的振动响应幅值分别为 $4.43\times 10^{-5}\text{ m}$ 和 $1.07\times 10^{-4}\text{ m}$,与实测结果 $9.47\times 10^{-5}\text{ m}$ 的偏差分别为53.22%和12.99%,与确定性计算模型相比,非参数计算模型的预测结果明显更接近于实测结果。对观测点2,由两计算模型得到的振动响应幅值分别为 $1.01\times 10^{-4}\text{ m}$ 和 $3.23\times 10^{-4}\text{ m}$,与实测结果 $3.39\times 10^{-4}\text{ m}$ 的偏差分别为70.21%和4.72%。对观测点3,由两计算模型得到的振动响应幅值分别为 $8.26\times 10^{-5}\text{ m}$ 和 $2.55\times 10^{-4}\text{ m}$,与实测结果 $2.43\times 10^{-4}\text{ m}$ 的偏差分别为66.01%和4.94%。对观测点4,由两计算模型得到的振动响应幅值分别为 $3.42\times 10^{-5}\text{ m}$ 和 $1.09\times 10^{-4}\text{ m}$,与实测结果 $1.28\times 10^{-4}\text{ m}$ 的偏差分别为73.28%和14.84%。通过以上对这4个观测点处振动响应数据的分析可知,利用非参数动力学计算模型得到的均值结果与实测结果更接近,这表明文中第1节提出的建模方法与确定性建模方法相比更为合理,而且第3.2节所计算的散度参数 $\delta_M=0.1277$, $\delta_K=0.2157$ 也是相对准确的。

4 结 论

1) 将非参数建模方法与矩阵极分解方法相

结合,能够建立具有模型不确定性的转子系统动力学计算模型,并可用于计算不确定系统的振动响应。

2) 在 $0\sim 3\,000\text{ r/min}$ 转子转速范围内,由确定性动力学模型和不确定动力学计算模型得到的振动响应均与实测结果相近,但在 $3\,000\sim 3\,800\text{ r/min}$ 范围内,与确定性动力学模型相比,不确定动力学计算模型的平均结果更接近于实测结果,也就是说,在计算模型中考虑模型不确定性是更为合理的。

3) 实验得到的最低阶临界转速和振型数据可以用于识别不确定动力学模型的散度参数。

参考文献:

- [1] 雷冰龙,李超,何康,等.共用支承-转子系统耦合振动分析及试验[J].航空动力学报,2020,35(11):2293-2305.
LEI Binglong, LI Chao, HE Kang, et al. Coupling vibration characteristics analysis and experiment of shared support-rotors system[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(11): 2293-2305. (in Chinese)
- [2] 章健,张大义,王永锋,等.共用支承-转子结构系统振动耦合特性分析[J].北京航空航天大学学报,2019,45(9):1902-1910.
ZHANG Jian, ZHANG Dayi, WANG Yongfeng, et al. Coupling vibration characteristics analysis of shared support-rotors system[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(9): 1902-1910. (in Chinese)
- [3] CAPIEZ-LERNOUT E, SOIZE C. Nonlinear stochastic dynamics of detuned bladed-disks with uncertain mistuning and detuning optimization using a probabilistic machine learning tool[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2022, 143: 104023.
- [4] CAPIEZ-LERNOUT E, SOIZE C. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2004, 126(3): 610-618.
- [5] SINHA A. Reduced-order model of a bladed rotor with geometric mistuning[J]. Journal of Turbomachinery, 2009, 131(3): 031007.1-031007.7.
- [6] MADDEN A, EPUREANU B I, FILIPPI S. Reduced-order modeling approach for blisks with large mass, stiffness, and geometric mistuning[J]. AIAA Journal, 2012, 50(2): 366-374.
- [7] GAN Chunbiao, WANG Yuehua, YANG Shixi. Nonparametric modeling on random uncertainty and reliability analysis of a dual-span rotor[J]. Journal of Zhejiang University: Science A (Applied Physics & Engineering), 2018, 19(3): 189-202.
- [8] WANG Xiaojun, QIU Zhiping. Interval finite element analysis of wing flutter[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(2): 134-140.
- [9] ZHANG Hongyan, BAI Changqing, MAO Yijun. Stochastic finite element modeling and response analysis of rotor systems with random properties under random loads[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015, 29(8): 3083-3090.
- [10] 刘保国,梁国珍,苏林林,等.基于摄动法的随机参数转子系统动力响应的概率密度分析[J].机械强度,2013,35(4):400-405.
LIU Baoguo, LIANG Guozhen, SU Linlin, et al. Probability densi-

- ty analysis of the dynamic response of random parametrical rotor system based on the perturbation method[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2013, 35(4): 400-405. (in Chinese)
- [11] 王存. 基于切比雪夫多项式展开的转子动力特性区间分析[J]. *航空动力学报*, 2020, 35(4): 757-765.
WANG Cun. Interval analysis of rotor dynamic characteristics based on Chebyshev polynomials expansion[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2020, 35(4): 757-765. (in Chinese)
- [12] SOIZE C. Polynomial chaos expansion of a multimodal random vector[J]. *ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2015, 3(1): 34-60.
- [13] SNOUN C, BERGEOT B, BERGER S. Prediction of the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to nonlinear energy sinks using a multi-element generalized polynomial chaos approach[J]. *European Journal of Mechanics: A Solids*, 2020, 80: 103917.
- [14] LI Hongguang, LI Ming, ZHOU Shengtong, et al. Rotor dynamics behavior of turbo-expander involving droplet impact[J]. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2016, 22(5): 444-462.
- [15] YANG Yongfeng, WU Qinyu, WANG Yanlin, et al. Dynamic characteristics of cracked uncertain hollow-shaft[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 124: 36-48.
- [16] FU Chao, XU Yuandong, YANG Yongfeng, et al. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 466: 115047.
- [17] MA Yanhong, WANG Yongfeng, WANG Cun, et al. Nonlinear interval analysis of rotor response with joints under uncertainties[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(1): 205-218.
- [18] MA Yanhong, WANG Yongfeng, WANG Cun, et al. Interval analysis of rotor dynamic response based on Chebyshev polynomials[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(9): 2342-2356.
- [19] WEI Sha, HAN Qinkai, PENG Zhike, et al. Dynamic analysis of parametrically excited system under uncertainties and multi-frequency excitations[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 72/73: 762-784.
- [20] 冯伟, 刘保国, 丁浩, 等. 非参数不确定动力学建模研究综述[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(5): 1-9.
- FENG Wei, LIU Baoguo, DING Hao, et al. Review of uncertain nonparametric dynamic modeling[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(5): 1-9. (in Chinese)
- [21] 刘彦旭, 刘保国, 冯伟, 等. 不确定双圆盘转子系统振动响应分析[J]. *航空动力学报*, 2021, 36(3): 488-497.
LIU Yanxu, LIU Baoguo, FENG Wei, et al. Vibration responses analysis for double disks rotor system with uncertainties[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(3): 488-497. (in Chinese)
- [22] SOIZE C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2000, 15(3): 277-294.
- [23] MURTHY R, MIGNOLET M P, EL-SHAFAI A. Nonparametric stochastic modeling of uncertainty in rotordynamics: Part I formulation[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2010, 132(9): 092501.1-092501.7.
- [24] GAN Chunbiao, GUO Shuangquan, LEI Hua, et al. Random uncertainty modeling and vibration analysis of a straight pipe conveying fluid[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(3): 503-519.
- [25] 陈佳. 半正定内积下的矩阵极分解研究[D]. 成都: 成都理工大学, 2021.
CHEN Jia. Research on polar decomposition of matrices with respect to positive semi-definite inner product[D]. Chengdu: Chengdu University of Technology, 2021. (in Chinese)
- [26] MIGNOLET M P, SOIZE C. Nonparametric stochastic modeling of linear systems with prescribed variance of several natural frequencies[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2008, 23(2/3): 267-278.
- [27] CAPIEZ-LERNOUT E, PELLISSETTI M, PRADLWARTER H, et al. Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295(3/4/5): 923-938.
- [28] SOIZE C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288(3): 623-652.
- [29] PASCUAL B, ADHIKARI S. Combined parametric-nonparametric uncertainty quantification using random matrix theory and polynomial chaos expansion[J]. *Computers & Structures*, 2012, 112/113: 364-379.

(编辑: 陈 越)