

文章编号: 1000-8055(2023)10-2545-16

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20220052

基于递归 Gibbs-Appell 的柔性空间机器人 建模与特性分析

张福礼, 袁朝辉

(西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘 要: 利用递归 Gibbs-Appell 方法研究了多重柔性的空间机器人动力学建模与特性分析。首先, 根据 Timoshenko beam theory 与集中刚度分别对连杆与关节进行柔性描述, 其次, 利用旋转矩阵 $R_{3 \times 3}$ 与平移向量 $L_{1 \times 3}$ 的简化了齐次变换矩阵 $T_{4 \times 4}$ 以降低递推运动学难度, 利用递归 Gibbs 函数与势能函数推导了柔性空间机器人的逆向动力学模型, 再次, 利用反向递归法获取了惯量矩阵与耦合矩阵, 并构建了正向动力学模型。最后数值仿真结果表明, Matlab 与 Adams 的仿真结果相对偏差不超过 0.1%, Z 弯曲变形相对于 X 剪切变形与 Y 扭转变形数量级超过了 10^3 , 这验证所建模型的正确性。在一定范围内, 关节刚度增加 50 N·m/rad 时, 连杆最大变形增量不超过 1.5×10^{-3} m, 关节摩擦成 5 倍增长时, 连杆最大变形增量不超过 2×10^{-3} m, 帆板的增量变形具有相同变化趋势。

关 键 词: 空间机器人; 柔性机械臂; 递归 Gibbs-Appell; 多体动力学建模; 特性分析

中图分类号: V414.2

文献标志码: A

Flexible space robot modeling and characteristic analysis based on recursive Gibbs-Appell

ZHANG Fuli, YUAN Zhaohui

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Dynamic modeling and characteristic analysis of space robots with multiple flexible factors were studied by Recursive Gibbs-Appell modeling method. Firstly, the deformation of link and joints was described by concentrated stiffness and Timoshenko beam theory. Secondly, the homogeneous transformation matrix $T_{4 \times 4}$ was simplified by using the rotation matrix $R_{3 \times 3}$ and the translation vector $L_{1 \times 3}$, and the difficulty of recursive kinematics was reduced. The inverse dynamics model of the flexible space robot was derived by using the recursive Gibbs function and the potential energy function. Thirdly, the mass inertia matrix and coupling matrix were obtained by inverse recursive method. The forward dynamic model of the space robot was obtained. The numerical simulation results showed that the relative deviation between Matlab and Adams simulation results did not exceed 0.1%, and the Z bending deformation was more than 10^3 orders of magnitude relative to the X shear deformation and Y torsional deformation, which verified the correctness of the model. Within a certain range, when the joint stiffness increased by 50 N·m/rad, the maximum deformation increment of the connecting rod did not exceed 1.5×10^{-3} m, and when the joint friction increased by 5 times, the maximum deformation increment of the link did not exceed 2×10^{-3} m, the incremental deformation of the windsurfing board had the same trend.

收稿日期: 2022-01-31

基金项目: 国家自然科学基金(51505381)

作者简介: 张福礼(1986—), 男, 博士生, 主要从事空间机器人动力学建模与控制方法研究。E-mail: zhangfuli2007@sina.com

引用格式: 张福礼, 袁朝辉. 基于递归 Gibbs-Appell 的柔性空间机器人建模与特性分析[J]. 航空动力学报, 2023, 38(10): 2545-2560. ZHANG Fuli, YUAN Zhaohui. Flexible space robot modeling and characteristic analysis based on recursive Gibbs-Appell[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(10): 2545-2560.

Keywords: space robot; flexible manipulator; recursive Gibbs-Appell; multi-body dynamics modeling; characteristic analysis

空间机器人由于其工作环境的特殊性, 使得其成为一类与地面机器人迥然相异的机器人系统^[1], 该类系统包括航天器本体、多自由度机械臂与柔性附件等多个子结构, 每个子结构都是独特设计, 但他们是相互耦合的系统^[2]。首先, 机械臂安装于卫星或星际探测器上, 基座将处于自由漂浮或者飞行状态, 使得系统耦合特性及复杂度都更高; 其次, 机械臂本体具有轻质结构, 这使得机械臂在运行中具有一定的变形特性, 进而影响了机器人的控制与定位^[3]; 同样, 关节驱动部件大都含有为谐波减速器、减速结构与传感器等柔性部件, 同样其关节具有一定柔性变形^[4]。此外, 太阳帆板为空间机器人的持续运行或执行任务提供所需能量, 但由于尺寸较大, 其振动也影响了空间机器人整体系统^[5]。空间柔性机器人的动力学本质上是多体刚柔耦合的动力学系统^[6]。基座、太阳帆板、柔机械臂等三者之间的耦合使得机器人动力学建模更为复杂, 进一步影响了其控制难度^[7]。

迄今为止, 对于具有柔性附件或者本体柔性的空间机器人已经开展了许多研究。文献 [8-11] 对二维空间柔性机器人的动力学进行了不断层次递进深入研究, 并基于动力学进行了多种控制方法的研究。虽然空间机器人的结构简单且无帆板结构, 但对于系统且符合实际动力学建模与控制研究是极为有益的。福州大学的陈力等以漂浮基二维空间机器人为对象, 利用动量守恒定理, 构建了一系列的动力学模型。首先, 以 Spong 提出的关节集中刚度为基础, 假设机械臂关节处具有扭转弹簧结构, 即漂浮基柔性关节空间机器人动力学被构建^[8], 该模型进一步假设基座与机械臂之间存在集中柔性结构, 构建了柔性基-柔性关节的空间机器人的动力学模型^[9], 同时, 利用 Lagrange 方法构建柔性基、柔性关节与柔性连杆的多重柔性的空间机器人动力学模型^[10]。潘冬^[11] 基于 Lagrange 法和模态综合法建立了柔性空间机械臂动力学模型, 以 3 自由度空间机器人为算例验证了动力学的可行性。它分析了漂浮基的柔性体空间机械臂的动力学特性分析。余章卫^[12] 利用递推组集的方法, 构建了带帆板的 6 自由度空间刚性机器人动力学模型, 对比 Adams 模型验证了模型的有效性, 并进一步讨论帆板柔性对系统

动力学特性的影响。杜严锋^[13] 以带柔性帆板与柔性二连杆的空间机器人为对象, 通过集中质量方法与有限元软件 NASTRAN, 构建了其空间机器人的耦合动力学。Rastegari 等^[14] 构建了柔性帆板与柔性关节的空间机器人动力学模型, 并进一步分析了柔性帆板和柔性关节的弹性振动对机器人载体的影响。Gouliaev 等^[15] 基于 Euler-Lagrange 和第二类 Lagrange 方法分别建立了考虑柔性关节和摩擦的空间机器人的动力学方程。综合以上的研究可知, 当前空间机器人的动力学建模的研究已经取得了丰富成果, 但涉及动力学研究时, 现有研究空间机器人多集中于平面问题而非空间问题。其次, 柔性关节刚度与摩擦对空间机器人系统研究影响是相对较少的。因此, 建立较为准确的其系统的动力学模型来进行计算分析是必不可少的, 这为后续控制与抓碰撞分析等工作提供了基础。

本文对多重柔性的空间机器人动力学建模问题进行了研究。主要贡献是利用递归 Gibbs-Appell 公式和 Timoshenko beam theory (TBT) 构建了具有柔性关节的柔性机械臂的动力学模型。与相关研究(文献 [16-17])相比, 利用 TBT 描述了机械臂本体变形, 利用旋转矩阵 $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ 与平移向量 $\mathbf{L}_{1 \times 3}$ 代替矩阵 $\mathbf{T}_{4 \times 4}$ 的简化了递推运动学。此外, 关节模型考虑了关节柔度、摩擦和侧向间隙的影响, 利用递归进而详细介绍了逆动力学方程和正动力学方程。最后, 利用数值仿真验证所建模型的正确性, 并进一步进行不同因素的特性分析。

1 机器人结构与柔性描述

1.1 空间柔性机器人结构

空间柔性机器人的结构包括: 基座、机械臂与帆板等。基座具有集中质量 m_b 与惯性量 $\mathbf{J}_b$ 等; 机械臂则由 n 自由度柔性关节-柔性连杆机械臂而构成, 它是串行独立驱动的; 柔性帆板被等效简化为较大平面帆板结构, 具体如图 1 所示。图中不仅显示机械臂部分的单体 i 的运动学关系, 还给出了相邻两物体 $i-1$ 与 i 的之间的运动学关系。关节转子与轮廓之间具有柔性机构, 该机构等效为集中弹性阻尼机构, 而其余部分被假定为刚性。当连杆受纵向、横向和扭转等振动影响,

无论是运动学还是动力学建立均需要先建立机器人坐标系,在图 1 中,首先描述了空间机器人各部分坐标系,选定地球为全局坐标系 $O_0-x_0y_0z_0$,基座质心坐标系为 $O_b-x_by_bz_b$,机械臂被固定在载体正上方,机械臂关节 1 的坐标系为 $O_1-x_1y_1z_1$,机械臂末端关节坐标系为 $O_n-x_ny_nz_n$,相邻两刚体坐标系分别为 $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ 与 $O_i-x_iy_iz_i$,对于任意 i 的柔性体坐标系采用坐标系 $\hat{O}_i-\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$ 表示,在每个臂上均用刚体运动和柔性变形用两个坐标系表示。此外,将坐标系 $i-1$ 固定在转动关节上,以确定第 i 连杆的刚体运动和扭转方向。坐标系 $O_i-x_iy_iz_i$ 表示连杆末端的连杆变形和往复运动。太阳帆板被

理想地认为固定于载体卫星之上,其坐标系为 $O_{spi}-x_{spi}y_{spi}z_{spi}$ ($i=1, 2$),其相应的柔性变形坐标系 $\hat{O}_{spi}-\hat{x}_{spi}\hat{y}_{spi}\hat{z}_{spi}$ ($i=1, 2$),对实际坐标系与浮动坐标系的具体确定如表 1 所示。根据坐标系的建立,可获取广义坐标 $q=[q_b, q_{mr}, q_r, q_\varepsilon]$,其中,载体基座位姿 $q_b=[r_b, \theta_b]^T \in R^{1 \times 6}$, $r_b \in R^{1 \times 3}$ 与 $\theta_b \in R^{1 \times 3}$ 表示载体质心的位置与姿态角, $q_{mr} \in R^{1 \times n}$ 为 n 关节的转子角度, $q_r \in R^{1 \times n}$ 为 n 连杆的关节转角, $q_\varepsilon \in R^{1 \times n_i n_{ei}}$ 为柔性变形的广义变量, R 表示数据空间, n_i 为柔性连杆数, n_{ei} 为第 i 柔性连杆变形的广义变量数, n_{espi} 为柔性帆板的变形广义变量数。整体系统的总自由为 $6+2n+n_i n_{ei}+n_{espi}$ 。

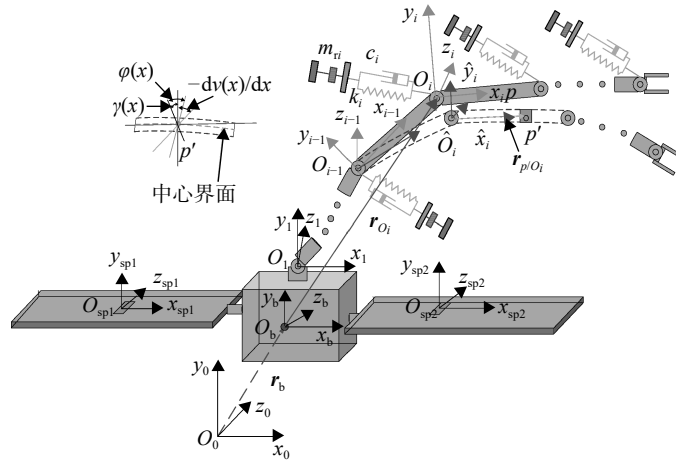


图 1 柔性空间机器人的结构与变形描述

Fig. 1 Structure and deformation description of flexible space robot

表 1 坐标系的意义

Table 1 Significance of coordinate systems

名称	实际坐标 x_i, y_i, z_i	浮动坐标 $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$
说明	轴 X 与关节轮毂平行, 并与 $(i+1)$ 关节轮毂方向平行; Z 轴与平行电动机轴转动关节; Y 轴由右手定律决定	轴 $\hat{x}$ 与变形连杆平行, 并与 $(i+1)$ 关节的轮毂方向平行; $\hat{z}$ 轴与平行电动机轴转动关节; $\hat{y}$ 轴由右手定律决定

图 1 中 k, c, m_r 分别表示等效刚度、等效阻尼和转子质量, r 表示坐标系空间内的位置向量, p' 表示考虑柔性后相对点 p 的位置点, r_{p/O_i} 表示在关节 O_i 坐标系中点 p 的位置向量, φ 为连杆中间面法线的旋转角度, γ 为切应变, v 为沿着中心界

面法线方向的小变形。

1.2 柔性体描述

在图 1 中, 关节结构包含转子质量 m_{ri} 、等效刚度 k_i 与等效阻尼 c_i ; 刚性关节角为 q , 柔性体上一点 p' 相对未变形前点 p 的三维变形描述为

$$A = \left[\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}(\eta_j') \delta_{ij}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}(\eta_j') \delta_{ij}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_i} z_{ij}(\eta_j') \delta_{ij}(t) \right]^T \quad (1)$$

其中 η_j 为连杆中性轴任意一点的位置, x_{ij}, y_{ij} 与 z_{ij} 为本征函数, 它为第 i 个连杆的第 j 个纵、横模态振型, δ_{ij} 是第 i 杆的第 j 个模态广义坐标。这些振型是根据边界条件与 assumed modes method (AMM)

梁来确定的, 若考虑转动惯量和剪切变形的影响, 则需要 TBT 计算。图 1 为具有 TBT 的柔性杆模型, 在这一理论中, 剪切角和位移是独立考虑与评估的。

$$\begin{cases} \varphi_t = \varphi_{ty} + \varphi_{tz} \\ \varphi_{ty}(\eta'_i) = \gamma_t(\eta'_i) - d\gamma_t(\eta'_i)/d\eta'_i \\ \varphi_{tz}(\eta'_i) = \gamma_t(\eta'_i) - d\omega_i(\eta'_i)/d\eta'_i \\ \gamma_t(\eta'_i) = T_t(\eta'_i)/G\kappa A_s(\eta'_i) \end{cases} \quad (2)$$

其中 θ_{ij} 是特征函数向量, 其元素为第 i 个连杆的 j 阶模态。式(1)与式(3)中, 变形角 θ_i 和 Δ 位移共用相同模态广义坐标。

2 系统运动学与动力学

2.1 空间柔性机器人广义变量

系统广义坐标由三大类组成:

- 1) 基座具有 3 自由度位置向量 $\mathbf{p}_b = [x_b, y_b, z_b]^T$, 3 自由度姿态向量为 $\mathbf{q}_b = [q_{bx}, q_{by}, q_{bz}]^T$ 。
- 2) 第 i 杆的角度 $\mathbf{q}_i^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 。
- 3) 第 i 杆的柔性广义坐标 $\boldsymbol{\eta}_i = [\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in}]^T$ 。
- 4) 电动机广义坐标 $\mathbf{q}_n^T = [q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn}]^T$, 关节柔性变形的广义坐标表示为 $\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{q}_n^T/N_{ni} - \mathbf{q}_i^T$ 。
- 5) 若机械臂的自由度为 n , 总自由度为 $6+2n+\sum_n m(i) + \sum_2 m_\varepsilon(i)$ 。

2.2 空间柔性机器人运动学

系统 Gibbs 函数包含连杆 ($\mathbf{S}_{li}$) 和关节 ($\mathbf{S}_{ji}$) 两个分量。对于微单元 p , 连杆的 Gibbs 函数需要先计算线性和角的加速度, 关节 i 在绝对坐标系中的位置、速度与加速度为

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{r}_{O_i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\mathbf{r}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\mathbf{r}_{O_i/O_{i-1}}) \\ {}^i\dot{\mathbf{r}}_{O_i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\dot{\mathbf{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\dot{\mathbf{r}}_{O_i/O_{i-1}}) \\ {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[{}^{i-1}\ddot{\mathbf{r}}_{O_{i-1}} + 2({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\ddot{\mathbf{r}}_{O_i/O_{i-1}}) + \right. \\ \left. {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\dot{\mathbf{r}}_{O_i/O_{i-1}}) \right] \end{cases} \quad (4)$$

其中 ${}^i\mathbf{r}_{O_i}$ 为关节向量。基于 R-W 图论法^[18], 将空间机器人系统视为多分支的链路树形结构, 利用关联矩阵 $\mathbf{S}_{O_i}$, 各链路的运动学是建立在关联矩阵的基础上, 即 $\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{S}_{O_i}$, $\mathbf{R}$ 为链路上刚性关节旋转矩阵。

根据图 1 的位置向量求导来计算其线性加速度和角加速度。第 i 杆和第 $i-1$ 杆的递推矩阵包括第 i 关节的旋转矩阵 $\mathbf{A}_i$ 与连杆弹性引起的旋转矩阵 $\mathbf{E}_i$ ^[18]。第 i 杆上任意第 i 微单元 p_i 的位置、速度以及加速度分别为

其中 φ 为连杆中间面法线的旋转角度, γ 为剪应变, G 为切变模量, κ 为 Timoshenko 梁截面剪切系数, A_s 为连杆的修正截面面积。

若 Δ 为小变形值, θ 几乎等于该方向上的弯曲角, 利用 AMM 来计算弯曲角为

$${}^i\boldsymbol{\theta}_i = \left[\sum_{j=1}^{m_i} \theta_{xij}(\eta') \delta_{ij}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{yij}(\eta') \delta_{ij}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{zij}(\eta') \delta_{ij}(t) \right] \quad (3)$$

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{r}_{p_i} = {}^i\mathbf{r}_{O_i} + {}^i\mathbf{r}_{p_i/O_i} \\ {}^i\dot{\mathbf{r}}_{p_i} = {}^i\dot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^i\dot{\mathbf{r}}_{p_i/O_i} + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{r}_{p_i/O_i} \\ {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{p_i} = {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{p_i/O_i} + 2{}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\dot{\mathbf{r}}_{p_i/O_i} + \\ {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{r}_{p_i/O_i} + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{r}_{p_i/O_i}) \end{cases} \quad (5)$$

相邻两机械臂的之间的转角 ${}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ 关系为

$$\begin{cases} {}^i\boldsymbol{\omega}_i = {}^i\mathbf{z}_i\dot{\theta}_i + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[{}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(L_{i-1}) \right] \\ {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = {}^i\mathbf{z}_i\ddot{\theta}_i + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[{}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + {}^{i-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(L_{i-1}) + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \right. \\ \left. {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(L_{i-1}) \right] + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[{}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}(L_{i-1}) \right] \times {}^i\mathbf{z}_i\dot{\theta}_i \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{z}$ 为关节轴的位置向量, $\mathbf{R}$ 为关节的旋转矩阵。

3 空间柔性机器人系统动力学

3.1 系统逆向动力学方程

系统 Gibbs 函数具有以下几部分: 柔性连杆的 Gibbs 函数为 $\mathbf{S}_m$ 、关节的 Gibbs 函数为 $\mathbf{S}_r$ 、载体卫星的 Gibbs 函数为 $\mathbf{S}_b$, 具体如下所示:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{S}_m + \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_b \\ \mathbf{S}_r = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_{ri} (\ddot{\mathbf{q}}_{m_i})^2 \\ \mathbf{S}_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \mathbf{m}_{ei}(\eta') ({}^i\ddot{\mathbf{r}}_{Q_i}^T {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{Q_i}) + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \mathbf{I}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i d\eta \\ \mathbf{S}_b = \frac{1}{2} [\mathbf{m}_b (\dot{\mathbf{v}}_b^T \dot{\mathbf{v}}_b) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_b^T \mathbf{I}_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_b] \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{m}_{ei}(\eta')$ 为第 i 连杆单位长度质量矩阵, $\mathbf{I}_i$ 为第 i 连杆转动惯量。 $\mathbf{S}_m$ 的计算和符号含义参考文献 [19]; I_{ri} 为转子转动惯量, $\mathbf{m}_b$ 与 $\mathbf{I}_b$ 分别为基座的集中质量与转动惯量。

柔性连杆的 Gibbs 函数为 $\mathbf{S}_m$, 计算公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_m = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{0i}^i \ddot{\mathbf{r}}_{O_i}^T \times {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i}^T \times {}^i\mathbf{B}_{1i} - 2{}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i}^T \times \mathbf{B}_{2i}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \\ & {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times \mathbf{B}_{3i}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i}^T \times {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{B}_{3i}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{4i} - 2{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times {}^i\mathbf{B}_{5i} + \\ & {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times {}^i\mathbf{B}_{6i} - {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times {}^i\mathbf{B}_{7i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + 2{}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times \mathbf{B}_{8i}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \\ & \frac{1}{2} {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times \mathbf{B}_{9i}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^T \times {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{B}_{9i}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{10i} + f(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 ${}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ 是与 ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$ 相关的斜对称张量, $f(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\omega}})$ 的函数与拟加速度无关, 式(8)由系数 $\mathbf{B}$ 组成。同时, 它

们由相关的时变系数组成。

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0i} = \int_0^{L_i} m_{ei}(\eta) d\eta \\ B_{1i} = \ddot{\eta}_i \int_0^{L_i} m_{ei}(\eta) d\eta + \sum_{j=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ij} c_{1ij} \\ B_{2i} = \dot{\eta}_i \int_0^{L_i} m_{ei}(\eta) d\eta + \sum_{j=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ij} \tilde{c}_{1ij} \\ B_{3i} = c_{2i} + \sum_{j=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ij} \tilde{c}_{1ij} \\ B_{4i} = \ddot{\eta}_i^2 \int_0^{L_i} m_{ei}(\eta) d\eta + \sum_{j=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ij} \left(2\ddot{\eta}_i c_{3ij} + \sum_{k=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ik} c_{4ijk} \right) \\ B_{5i} = \sum_{j=1}^{m(i)} \left[(\dot{\delta}_{ij} \ddot{\eta}_i - \ddot{\delta}_{ij} \dot{\eta}_i) c_{5ij} + \sum_{k=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ik} \delta_{ik} c_{6ijk} \right] \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{6i} = \sum_{j=1}^{m(i)} (\dot{\delta}_{ij} \alpha_{ij} - \delta_{ij} \ddot{\eta}_i c_{5ij}) \\ B_{7i} = \sum_{j=1}^{m(i)} [\ddot{\eta}_i (\dot{\delta}_{ij} c_{8ij}^T + c_{7i}) + \ddot{\delta}_{ij} \beta_{ij}] \\ B_{8i} = \sum_{j=1}^{m(i)} [\ddot{\eta}_i (\dot{\delta}_{ij} c_{8ij}^T + c_{7i}) + \dot{\delta}_{ij} \beta_{ij}] \\ B_{9i} = c'_{7i} + \sum_{j=1}^{m(i)} \delta_{ij} (c_{8ij}^T + \beta_{ij}) \\ B_{10i} = \sum_{j=1}^{m(i)} \sum_{k=1}^{m(i)} \ddot{\delta}_{ij} \ddot{\delta}_{ik} c_{10ijk} \\ \alpha_{ij} = c'_{5ij} + \sum_{k=1}^{m(i)} \delta_{ik} c_{4ijk} \\ \beta_{ij} = c'_{8ij} + \sum_{k=1}^{m(i)} \delta_{ik} c_{9ijk} \end{array} \right. \quad (10)$$

其中 m_i 为连杆第 i 单元, $\tilde{c}$ 为 c 斜对称矩阵, 系数 c 定义为

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1ij} = \int_0^{L_i} m_{ei} r_{ij} d\eta_i \\ \tilde{c}_{1ij} = \int_0^{L_i} m_{ei} \tilde{r}_{ij} d\eta_i \\ c_{2i} = \int_0^{L_i} m_{ei} \dot{\eta}_i^i x_i d\eta_i \\ c_{3ij} = \int_0^{L_i} m_{ei}^i x_i r_{ij} d\eta_i \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{4ijk} = \int_0^{L_i} m_{ei} r_{ij}^T r_{ik} d\eta_i \\ c_{5ij} = \int_0^{L_i} m_{ei}^i \tilde{x}_i r_{ij} d\eta_i \\ c'_{5ij} = \int_0^{L_i} m_{ei} \dot{\eta}_i^i \tilde{x}_i r_{ij} d\eta_i \\ c_{6ijk} = \int_0^{L_i} m_{ei} \tilde{r}_{ij} r_{ik} d\eta_i \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{7i} = \int_0^{L_i} m_{ei} \eta_i^i \tilde{x}_i^T \tilde{x}_i d\eta_i \\ c'_{7i} = \int_0^{L_i} m_{ei} \eta_i^{2i} \tilde{x}_i^T \tilde{x}_i d\eta_i \\ c_{8ij} = \int_0^{L_i} m_{ei} \eta_i^i \tilde{x}_i^T \tilde{r}_{ij} d\eta_i \\ c'_{8ij} = \int_0^{L_i} m_{ei} \eta_i^i \tilde{x}_i^T \tilde{r}_{ij} d\eta_i \\ c_{9ijk} = \int_0^{L_i} m_{ei} \tilde{r}_{ij} r_{ik} d\eta_i \\ c_{10ijk} = \int_0^{L_i} \theta_{ij} J_i \theta_{ik} d\eta_i \end{array} \right. \quad (13)$$

机械臂关节的动态效应、柔性和阻尼表示为连杆与电动机之间的线性和扭转状态的函数。此外, 根据 Wu 等^[20], 间隙和摩擦被视为一个连续函数。由于连杆材料不同, 内部阻尼效应包括在瑞利耗散函数中。该系统势能由关节柔性(V_l)和弹性变形(V_r)组成:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{m_i} \eta_{ij}(t) \eta_{ik}(t) K_{ijk} \\ K_{ijk} = \int_0^{L_i} \left[k A_{si} G_i (\eta_{yij} \eta_{yik} + \eta_{zij} \eta_{zik}) + E_i I_{yi} \frac{\partial \theta_{yij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \theta_{yik}}{\partial x_i} + E_i I_{zi} \frac{\partial \theta_{zij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \theta_{zik}}{\partial x_i} + E_i A_{si} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_i} + G_i I_{xi} \frac{\partial \theta_{xij}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \theta_{xik}}{\partial x_i} \right] dx_i \end{array} \right. \quad (14)$$

利用集中刚度 K_{ri} , 得到关节弹性势能为

$$V_r = \sum_{i=1}^n K_{ri} (q_{ri}/N_{ri} - q_i)^2 / 2 \quad (15)$$

其中 N_{ri} 为关节减速比。

采用黏滞阻尼假设方法来分析机械臂连杆耗散力, 柔性连杆的耗散能(D_l)为

$$\left\{ \begin{array}{l} D_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i(i)} \sum_{k=1}^{m_i(i)} \dot{\eta}_{ij}(t) \dot{\eta}_{ik}(t) D_{ijk} \\ D_{ijk} = \int_0^{L_i} C_{vi} \left(I_{zi} \frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 y_{ik}}{\partial \eta^2} + I_{yi} \frac{\partial^2 z_{ij}}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 z_{ik}}{\partial \eta^2} \right) d\eta \end{array} \right. \quad (16)$$

其中 C_{vi} 为第 i 连杆的 Kelvin-Voigt 阻尼系数, 其值为 250 kg·s/m。

将扭转阻尼器(C_{ri})用于关节耗散分析, 由此得到相关耗散函数(D_r)为

$$D_r = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} C_{ri} \left(\frac{\dot{q}_{ri}}{N_{ri}} - \dot{q}_i \right)^2 \quad (17)$$

摩擦和间隙是复杂的非线性现象, 其结果影响稳态跟踪误差, 关节间隙动力学模型如下:

$$\begin{cases} \tau_{pi} = k_{pi} f(q_{pi}, l_{cri}) \\ f = q_{pi} - \delta_i - \alpha_1 \left\{ \frac{1 + \exp[-r_i(q_{pi} - \delta_i)]}{1 - \exp[-r_i(q_{pi} - \delta_i)]} \right\} \end{cases} \quad (18)$$

其中 q_{pi} 为含关节间隙的转角, τ_{pi} 为转子与连杆间的弹性扭矩, k_p 为等效刚度, l_{cri} 为关节间隙宽度, $\alpha_1 = l_{cr}/2$ [17]。

摩擦动力学模型如下:

$$\tau_{ri} = 2 \left[F_c + (F_s - F_c) \exp(-\dot{q}_{ri}/\theta_s) \right] \arctan(k_r \dot{q}_{ri}) / \pi + C_r \dot{q}_{ri} \quad (19)$$

其中 F_c 为库仑摩擦力, F_s 为静摩擦力, θ_s 为 Stribeck 速度, ς 为经验常数 [20], 一般取值为 2, C_r 为黏性阻尼系数。

系统逆动力学模型: 定义 $\Theta = [q_b, q_r, q, \eta]^T$, 其中 $q = [q_r, \delta]$, q_r 为刚性关节变量, 转动关节广义力为 τ_i , 假设广义力在偏转方程中为零。对连杆 Gibbs 函数、耗散函数和势能分别对准加速度、准速度和准坐标求导, 得到系统逆动力学模型:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\Theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\Theta}} + \frac{\partial V}{\partial \Theta} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{q}_{ri}}{\partial \dot{\Theta}} \tau_i \quad (20)$$

其中 τ_i 为作用在第 i 个转动关节上的力矩。将式 (20) 中的加速度项保留在等式的左边, 而其余项放置等式的右边, 得到正向动力学模型。

在 Gibbs 函数中, 变量 ${}^i \ddot{r}_{O_i}$ 、 ${}^i \dot{\omega}_i$ 与 B 为准加速度 ($\ddot{q}_j$ 、 $\dot{\eta}_{jf}$ 和 $\ddot{q}_b$) 的函数, η_{jf} 为第 j 连杆的第 f 阶的广义变量, 并引入如下的两个中间向量:

$$\begin{cases} {}^i S_i = B_{0i}^i \ddot{r}_{O_i} - 2B_{2i}^i \dot{\omega}_i - B_{3i}^i \dot{\omega}_i - {}^i \tilde{\omega}_i B_{3i}^i \omega_i \\ {}^i T_i = B_{3i}^i \ddot{r}_{O_i} + 2B_{8i}^i \dot{\omega}_i + B_{9i}^i \dot{\omega}_i + {}^i \tilde{\omega}_i B_{9i}^i \omega_i \end{cases} \quad (21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial {}^i \ddot{r}_{O_i}^T}{\partial \ddot{q}_i} \right) ({}^i S_i) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{q}_i} ({}^i T_i) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{bi}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \dot{v}_b^T}{\partial \ddot{q}_{bi}} \right) \dot{v}_b + \left(\frac{\partial \dot{v}_b^T}{\partial \ddot{q}_{bi}} \right) \dot{v}_b^T \right] + \\ &\quad \left(\frac{\partial \dot{\omega}_b^T}{\partial \ddot{q}_{bi}} \right) \dot{\omega}_b + \left(\frac{\partial \dot{\omega}_b^T}{\partial \ddot{q}_{bi}} \right) \dot{\omega}_b^T \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{ri}} = \frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_{ri}} = \sum_{i=1}^n I_{ri} \ddot{q}_{ri} \quad (24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_{jf}} = \sum_{i=j+1}^n \frac{\partial {}^i \ddot{r}_{O_i}^T}{\partial \ddot{\eta}_{jf}} ({}^i S_i) + \sum_{i=j+1}^n \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i^T}{\partial \ddot{\eta}_{jf}} ({}^i T_i) + {}^j \dot{\omega}_j^T \alpha_{jf} +$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m_j} \eta_{jk} (c_{4jfk} + c_{10jfk}) - {}^j \dot{\omega}_j^T B_{jf}^j \omega_j + {}^j \ddot{r}_{O_j}^T c_{1jf} + \\ &2 {}^j \dot{\omega}_j^T \left(\dot{\delta}_j c_{5jff} - \sum_{k=1}^{m_j} \dot{\eta}_{jk} c_{4jfk} \right) + \ddot{\delta}_j c_{3jff} \end{aligned} \quad (25)$$

瑞利耗散函数对广义速度的导数: 在广义速

度中, 连杆的耗散函数依赖于 $\dot{\eta}$ 。转子的瑞利函数是 $\dot{q}_j$, $\dot{\delta}_j$ 与 $\dot{q}_{rj}$ 的函数。因此, 其导数为

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\eta}_{jf}} = \sum_{k=1}^{m_j} \dot{\eta}_{jk} D_{jfk} \quad (26)$$

因此, 联立式 (21) ~ 式 (26), 可得出 4 个耦合系统的逆动力学方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_b} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_b} + \frac{\partial V}{\partial q_b} = [\tau_b \quad F_b]^T \\ \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = \tau - F_\delta \\ \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial V}{\partial q} + F_\delta = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\eta}} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

3.2 系统正向动力学方程

根据逆动力学方程式 (27), 将广义坐标 2 阶导数项及关联系数置于左侧形成系统惯性矩阵 ($I_m(\Theta, \dot{\Theta})$), 其余项移到右边形成力的矢量和剩余项, 因此, 矢量 $R_e(\Theta, \dot{\Theta})$ 和输入力矩矢量 τ 构成正向动力学方程的右侧项。力矩和力应作为执行器的输入, 得到连杆的加速度、速度和位置。因此, 广义坐标的 2 阶导数分组在方程左侧为未知数, 将式 (27) 的其他项移到右侧为

$$I_m(\Theta, \dot{\Theta}) \ddot{\Theta} = R_e(\Theta, \dot{\Theta}) + \tau \quad (28)$$

式 (28) 中惯性矩阵的元素是由前连杆运动变量函数组成的。式 (6)、式 (7) 和式 (8) 中准广义加速度项 $\ddot{r}_i$ 和 $\dot{\omega}_i$ 被分离为 $\ddot{r}_{O_{s,i}}$ 和 $\dot{\omega}_{O_{s,i}}$, 从递归形式中提取并重写为求和形式如下:

$$\begin{cases} {}^i \ddot{r}_{O_{s,i}} = \sum_{k=1}^{i-1} {}^i R_k ({}^k \ddot{r}_{O_{k+1}/O_k} + {}^k \dot{\omega}_{O_{s,k}} \times {}^k r_{O_{k+1}/O_k}) \\ {}^i \dot{\omega}_{O_{s,i}} = \sum_{k=1}^{i-1} {}^i R_k {}^k \dot{\omega}_{O_k} + \sum_{k=1}^{i-1} {}^i R_k {}^k \dot{\theta}_k L_k \end{cases} \quad (29)$$

在下述中, $r_{O_{s,i}}$ 和 $\omega_{O_{s,i}}$ 对准加速度与准速度求导来替换惯性矩阵元素。

$$\begin{cases} \frac{\partial {}^i \ddot{r}_i}{\partial \ddot{\eta}_j} = {}^i R_j^j z_j + {}^i r_{O_i/O_j} \\ \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{\eta}_j} = {}^i R_j r_{jf}(L_i) + {}^i R_j \theta_j(L_i) \times {}^i r_{O_i/O_j} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{\theta}_j} = {}^i \dot{R}_j^j z_j \\ \frac{\partial {}^i \dot{\omega}_i}{\partial \ddot{\eta}_j} = {}^i R_j \theta_{jf}(L_i) \end{cases} \quad (31)$$

式(30)与式(31)为加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 与 ω 对 $\dot{\theta}$ 与 $\dot{\delta}$ 求导, 同理需要速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 与 ω 对 $\dot{\theta}$ 与 $\dot{\delta}$ 求导。

系统惯性矩阵($\mathbf{I}_m(\theta, \theta)$): 将式(31)~式(34)

代入式(27)后, 将逆动力学方程式(27)的左边写为递归形式, 根据准加速系数分组, 得到系统惯性矩阵。关节方程的准加速度系数:

$$\begin{cases} H_m = \sum_{k=1}^n {}^j \mathbf{z}_j^T \left(\sum_{i=\max(k,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k + \sum_{i=\max(k,j+1)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \times {}^j \mathbf{r}_{O_i/O_j} \right) {}^k \mathbf{z}_k - \\ \sum_{k=1}^n {}^j \mathbf{z}_j^T \times {}^k \mathbf{U}_k^T \mathbf{z}_k \left(\sum_{i=\max(k,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k + \sum_{i=\max(k,j+1)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \times {}^j \mathbf{r}_{O_i/O_j} \right) {}^k \mathbf{z}_k \\ {}^k \mathbf{U}_k = \sum_{t=k}^{n-1} \left(\sum_{i=\max(t+1,j+1)}^n \mathbf{B}_{0i}^i \mathbf{R}_t \times {}^j \mathbf{r}_{O_t/O_j} + \sum_{i=\max(t+1,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_t \right) \times {}^t \mathbf{r}_{O_{t+1}/O_t} {}^t \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} H_\eta = & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{m(i)} {}^j \mathbf{z}_j^T \times \left(\sum_{i=\max(k+1,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k + \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \times {}^j \mathbf{r}_{O_i/O_j} \right) \theta_{kt} + \\ & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{m(i)} {}^j \mathbf{z}_j^T \times \left(\sum_{i=\max(t+1,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_t - \sum_{i=\max(t+1,j+1)}^n \mathbf{B}_{0i}^i \mathbf{R}_k \times {}^j \mathbf{r}_{O_i/O_j} \right) \mathbf{r}_{kt} - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{t=1}^{m(i)} {}^j \mathbf{z}_j^T \times {}^j \bar{\mathbf{U}}_k \theta_{kt} + \\ & \sum_{k=j+1}^n \sum_{t=1}^{m(i)} {}^j \mathbf{z}_j^T \times ({}^i \mathbf{R}_k \mathbf{c}_{1kt} \times {}^j \mathbf{r}_{O_k/O_j}) - \sum_{k=j}^n \sum_{t=1}^{m(i)} {}^j \mathbf{z}_j^T \times {}^i \mathbf{R}_k \alpha_{1kt} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} H_\theta = & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m(i)} \theta_{jf}^T \times \left(\sum_{i=\max(k+1,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k + \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \times {}^j \mathbf{r}_{O_i/O_j} \right) + \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{j=1}^{m(i)} \alpha_{jf}^T \times {}^j \mathbf{R}_k - \\ & \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{t=1}^{m(i)} \theta_{jf}^T \times {}^j \bar{\mathbf{U}}_k \theta_{kt} - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{r}_{jf}^T \times \left[\sum_{t=k+1}^{n-1} \left(\sum_{i=\max(t+1,j+1)}^n \mathbf{B}_{0i}^i \mathbf{R}_t \mathbf{R}_k \right) \times {}^t \mathbf{r}_{O_{t+1}/O_t} + \left(\sum_{t=k+1}^{n-1} \sum_{i=\max(t+1,j+1)}^n \mathbf{B}_{0i}^i \mathbf{R}_t \right) \times {}^t \mathbf{r}_{O_{t+1}/O_t} \right] - \\ & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m(i)} \mathbf{r}_{jf}^T \times \left(\sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \right) - \sum_{k=1}^{j-2} \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{c}_{1jf}^T \times \left(\sum_{t=k+1}^{j-1} {}^j \mathbf{R}_t \mathbf{R}_k \times {}^t \mathbf{r}_{O_{t+1}/O_t} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

其中 ${}^j \bar{\mathbf{U}}_k$ 与 ${}^k \mathbf{U}_k$ 具有相同的形式, 需要将变量 k 用 j 代替, 而 ${}^j \bar{\mathbf{U}}_k$ 的求和第一项为 $\mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k$ 。

$$\begin{aligned} H_g = & \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{c}_{4kft} + \mathbf{c}_{10kft} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{m(i)} \theta_{jf}^T \times \left(\sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k + \sum_{i=\max(k+1,j)}^n {}^j \mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \right) \mathbf{r}_{kt} + \\ & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{r}_{jf}^T \times {}^j \lambda_k \mathbf{r}_{kt} + \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{c}_{1jf}^T \times {}^j \mathbf{R}_k \mathbf{r}_{kt} + \sum_{k=j+1}^n \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{r}_{1jf}^T \times {}^j \mathbf{R}_k \mathbf{c}_{1kt} + \\ & \sum_{k=j+1}^n \sum_{t=1}^{m(i)} \mathbf{r}_{1jf}^T \times {}^j \mathbf{R}_k \mathbf{c}_{1kt} + \sum_{k=j+1}^n \sum_{t=1}^{m(i)} \theta_{jf}^T \times {}^j \mathbf{R}_k \alpha_{kt} - \sum_{k=j+2}^n \sum_{t=1}^{m(i)} \theta_{1jf}^T \times ({}^j \mathbf{R}_k \mathbf{c}_{1kt} \times {}^j \mathbf{r}_{O_i/O_j}) \end{aligned} \quad (35)$$

在第 j 个关节转子方程中 $\mathbf{I}_v(q_v)$ 为准加速度函数, 其系数采用递推算算法计算, 如文中第2节所示。

外力矩和剩余动态项向量($\mathbf{R}_e$): 式(27)左侧项为非准加速度函数项, 而右侧项包含保守力和非保守力函数, 因此, ${}^i \mathbf{S}_i$ 和 ${}^i \mathbf{T}_i$ 的每一个中间向量都分割成两个向量。通过含有指数 v 与剩余项 s 表示准速度的非线性函数, 并利用递归形式(如式(36))以评估 ${}^i \mathbf{S}_i^v$ 和 ${}^i \mathbf{T}_i^s$ 并加以推导式(29)右侧的广义力与剩余向量。

$$\begin{cases} {}^j \boldsymbol{\varphi}_j = {}^j \mathbf{R}_{j+1} ({}^{j+1} \mathbf{S}_{j+1}^v + {}^{j+1} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}) \\ {}^j \boldsymbol{\chi}_j = {}^j \mathbf{T}_j^v + {}^j \boldsymbol{\varphi}_j \times {}^j \mathbf{r}_{O_{j+1}/O_j} + {}^{j+1} \boldsymbol{\chi}_{j+1} \end{cases} \quad (36)$$

$$\mathbf{R}_{eqj} = \mathbf{K}_j^T (\mathbf{q}_{mj}^T - \mathbf{q}_j) + \mathbf{C}_j^T (\dot{\mathbf{q}}_{mj}^T - \dot{\mathbf{q}}_j) - {}^j \mathbf{z}_j^T \times {}^j \boldsymbol{\chi}_j \quad (37)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{ejj} = \mathbf{Q}_{jf} - \mathbf{r}_{jf}^T \times {}^j \boldsymbol{\varphi}_j - \mathbf{r}_{jf}^T \times {}^j \mathbf{R}_{j+1}^T \boldsymbol{\chi}_{j+1} \\ \mathbf{Q}_{jf} = - \sum_{k=1}^m \eta_{jk} \mathbf{K}_{jkf} - 2 {}^j \boldsymbol{\omega}_j^T \times \left(\dot{\mathbf{c}}_{5jf} - \sum_{k=1}^m \dot{\eta}_{jk} \mathbf{c}_{6jfk} \right) + \\ {}^j \boldsymbol{\omega}_j^T \times {}^j \boldsymbol{\beta}_{jf}^T \boldsymbol{\omega}_j - {}^j \ddot{\mathbf{r}}_{O_{v,j}}^T \times \mathbf{c}_{1jf} - {}^j \dot{\boldsymbol{\omega}}_{v,j}^T \times \alpha_{jf} \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_e = [\mathbf{C}_{fj}^p(\dot{\mathbf{q}}_{mj}^p - \delta_j) + \mathbf{K}_{pj}(\mathbf{q}_{mj}^r - \delta_j)] + \mathbf{Q}'_j - {}^j\mathbf{x}_j^T \times {}^j\boldsymbol{\varphi}_j \\ \mathbf{Q}'_j = -{}^j\mathbf{x}_j^T \times \mathbf{B}_{0j}^j \mathbf{r}_{O_{sj}} + 2{}^j\boldsymbol{\omega}_j^T \times \left(\sum_{k=1}^m \dot{\eta}_{jk} \mathbf{c}_{5jk} \right) + 2{}^j\boldsymbol{\omega}_{O_{sj}}^T \times \\ \left(\sum_{k=1}^m \eta_{jk} \mathbf{c}_{5jk} \right) + {}^j\boldsymbol{\omega}_j^T \times \left(\sum_{k=1}^m \dot{\eta}_{jk} \mathbf{c}_{8jk}^T + \mathbf{c}_{7j} \right) {}^j\boldsymbol{\omega}_j \\ \mathbf{R}_{eq_{rj}} = -\mathbf{K}_{rj}(\mathbf{q}_{rj} - \mathbf{q}_j) - \mathbf{C}_{rj}(\dot{\mathbf{q}}_{rj} - \dot{\mathbf{q}}_j) \end{cases} \quad (39)$$

至此,正向动力学方程被推导完毕。但由于惯性矩阵较大,其逆矩阵是较复杂的,因此在下一小节,利用递归方法求解惯性的质量矩阵。

4 动力学构建算法流程

根据文中前 3 节的运动学与动力学,进行空间柔性机器人的模型构建算法流程,具体如图 2 所示。

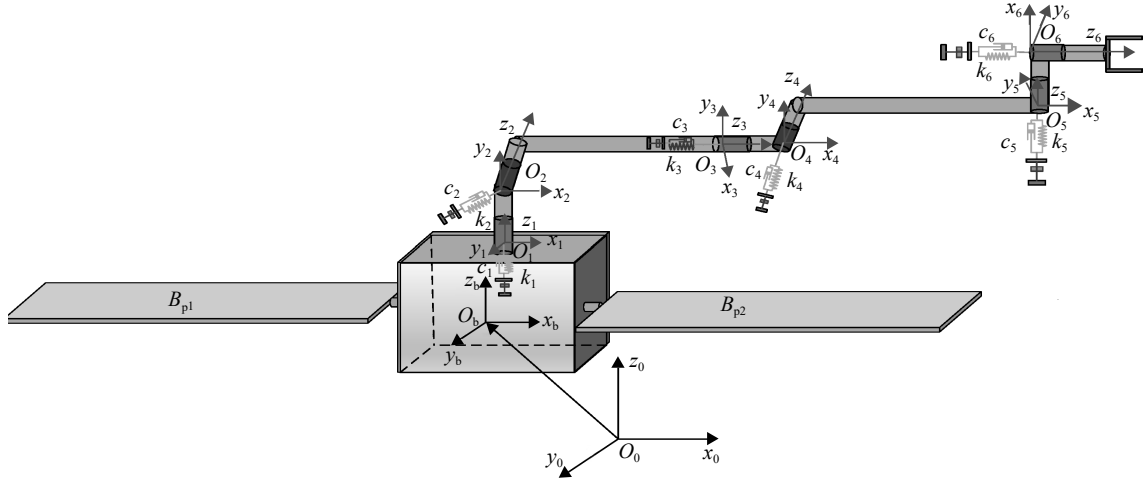


图 2 空间柔性机器人整体系统结构

Fig. 2 The system structure of space flexible robot

步骤 1 旋转矩阵的计算

$$\begin{cases} {}^{i-1}\mathbf{R}_i = \mathbf{E}_{i-1}\mathbf{A}_i \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T \end{cases} \quad (40)$$

其中 i 为运算次数, $i=1:1:n$, n 为系统自由度。

步骤 2 对微变形单元 v 的 ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$ 、 ${}^i\boldsymbol{\omega}_{v,i}$ 与 ${}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_{v,i}}$ 进行计算,其初始条件与递归计算式为

$$\begin{cases} {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\mathbf{z}_1\dot{\mathbf{q}}_1 \\ {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{v,1} = [\ddot{q}_{x_b} \quad \ddot{q}_{y_b} \quad \ddot{q}_{z_b}]^T \\ {}^1\ddot{\mathbf{r}}_{O_{v,1}} = {}^1\mathbf{R}_v[\ddot{x}_b \quad \ddot{y}_b \quad \ddot{z}_b]^T \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} {}^i\boldsymbol{\omega}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}L_{i-1}) + {}^i\mathbf{z}_i\dot{\mathbf{q}}_i \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_{v,i} = {}^i\mathbf{R}_{i-1}[{}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{v,i-1} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1} \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \\ {}^{i-1}\mathbf{R}_i \times ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{i-1}) {}^i\mathbf{z}_i\dot{\mathbf{q}}_i] \\ {}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_{v,i}} = {}^i\mathbf{R}_{i-1}[{}^{i-1}\ddot{\mathbf{r}}_{O_{v,i-1}} + {}^{i-1}\mathbf{r}_{O_i/O_{i-1}} \times {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{v,i-1} + \\ 2{}^{i-1}\dot{\mathbf{r}}_{O_i/O_{i-1}} + ({}^{i-1}\mathbf{r}_{O_i/O_{i-1}} \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{v,i-1}) \times {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{v,i-1}] \end{cases} \quad (42)$$

其中 $i=7:1:n$ 。

步骤 3 ${}^i\mathbf{S}_i^v$ 和 ${}^i\mathbf{T}_i^v$ 的递归计算

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{S}_i^v = \mathbf{B}_{0i}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} - 2\mathbf{B}_{2i}^i\boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{B}_{3i}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i - {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\mathbf{B}_{3i}^i\boldsymbol{\omega}_i \\ {}^i\mathbf{T}_i^v = \mathbf{B}_{3i}^i\ddot{\mathbf{r}}_{O_i} + 2\mathbf{B}_{8i}^i\boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{B}_{9i}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\mathbf{B}_{9i}^i\boldsymbol{\omega}_i \end{cases} \quad (43)$$

步骤 4 ${}^i\boldsymbol{\varphi}_i$ 和 ${}^i\boldsymbol{\chi}_j$ 初始条件与递归计算式为

$$\begin{cases} {}^n\boldsymbol{\varphi}_n = [0 \quad 0 \quad 0]^T \\ {}^n\boldsymbol{\chi}_n = {}^n\mathbf{T}_n \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} {}^j\boldsymbol{\varphi}_j = {}^j\mathbf{R}_{j+1}({}^{j+1}\mathbf{S}_{j+1}^v + {}^{j+1}\boldsymbol{\varphi}_{j+1}) \\ {}^j\boldsymbol{\chi}_j = {}^j\mathbf{T}_j^v + {}^j\boldsymbol{\varphi}_j \times {}^j\mathbf{r}_{O_{j+1}/O_j} + {}^{j+1}\boldsymbol{\chi}_{j+1} \end{cases} \quad (45)$$

其中 $j=n-1:-1:1$ 。

步骤 5 剩余动态向量 $\mathbf{R}_e$ 项的计算

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{eq_{rj}} = -\mathbf{K}_{rj}(\mathbf{q}_{rj} - \mathbf{q}_j) - \mathbf{C}_{rj}(\dot{\mathbf{q}}_{rj} - \dot{\mathbf{q}}_j) \\ \mathbf{R}_{eq_j} = \mathbf{K}_{rj}(\mathbf{q}_{rj} - \mathbf{q}_j) + \mathbf{C}_{rj}(\dot{\mathbf{q}}_{rj} - \dot{\mathbf{q}}_j) - {}^j\mathbf{z}_j^T \times {}^j\boldsymbol{\chi}_j \\ \mathbf{R}_e = \mathbf{C}_{pj}(\dot{\mathbf{q}}_{pj} - \delta_j) + \mathbf{K}_{pj}(\mathbf{q}_{pj} - \delta_j) - {}^j\mathbf{x}_j^T \times {}^j\boldsymbol{\varphi}_j \\ \mathbf{R}_{eq_{jff}} = \mathbf{Q}_{jff} - \mathbf{r}_{jff}^T \times {}^j\boldsymbol{\varphi}_j - \mathbf{r}_{jff}^T \times {}^j\mathbf{R}_{j+1}^{j+1}\boldsymbol{\chi}_{j+1} \end{cases} \quad (46)$$

其中 $j=1:1:n$, $f=1:1:m_j$ 。

步骤 6 间隙与摩擦力

$$\tau_{pi} = k_{pi} \left(q_{pi} - \delta_i - \alpha_1 \left\{ \frac{1 + \exp[-r_i(q_{pi} - \delta_i)]}{1 - \exp[-r_i(q_{pi} - \delta_i)]} \right\} \right) \quad (47)$$

$$\tau_{ri} = 2 \left[F_c + (F_s - F_c) \exp(-\dot{q}_{ri}/\dot{\theta}_s) \right] \cdot \arctan(k_i\dot{q}_{ri})/\pi + C_i\dot{q}_{ri} \quad (48)$$

其中 $i=1:1:n+6$ 。

步骤 7 计算 ${}^i\mathbf{r}_{O_j/O_i}$

$$\begin{cases} {}^j\mathbf{r}_{O_{i+1}/O_i} = {}^j\mathbf{R}_{j+1}^{j+1} {}^j\mathbf{r}_{O_{j+1}/O_i} \\ {}^i\mathbf{r}_{O_j/O_i} = {}^i\mathbf{r}_{O_{j-1}/O_i} + {}^i\mathbf{r}_{O_j/O_{j-1}} \end{cases} \quad (49)$$

其中 $i=2:1:n-2, j=i+2:-1:1$ 。

步骤 8 惯性矩阵中变量求和形式的计算

式(31)中叠加项为 ${}^j\sigma_k$ 与 ${}^j\xi_k$

$$\begin{cases} {}^j\sigma_k = \sum_{i=\max(k,j)}^n {}^j\mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k \\ {}^j\xi_k = \sum_{i=\max(k,j)}^n {}^j\mathbf{R}_i \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (50)$$

其中 $k=n:-1:1, j=k:-1:1$ 。

若 $k=j$ 且 $k=n$

$$\begin{cases} {}^n\sigma_n = \mathbf{B}_{9n} \\ {}^n\xi_n = \mathbf{B}_{3n} \end{cases} \quad (51)$$

若 $k=j$ 且 $k \neq n$

$$\begin{cases} {}^k\sigma_k = \mathbf{B}_{9k} + {}^k\sigma_{k+1}^k \mathbf{R}_k \\ {}^k\xi_k = \mathbf{B}_{3k} + {}^k\xi_{k+1}^k \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (52)$$

式(31)中的叠加项提取为

$$\begin{cases} {}^j\sigma_k = {}^j\mathbf{R}_{j+1}^{j+1} \sigma_k \\ {}^j\xi_k = {}^j\mathbf{R}_{j+1}^{j+1} \xi_k \\ {}^j\psi_k = \sum_{i=\max(k,j+1)}^n {}^j\mathbf{R}_i \times {}^j\mathbf{r}_{O_i/O_j} \mathbf{B}_{3i}^i \mathbf{R}_k \\ {}^j\psi_k = {}^j\psi_{k+1}^k \mathbf{R}_k - {}^j\mathbf{R}_k \times {}^j\mathbf{r}_{O_k/O_j} \mathbf{B}_{3k}^j \psi_n \end{cases} \quad (53)$$

其中 $j=k=n-1:-1:1$ 。

式(32)的叠加项提取为

$$\begin{cases} {}^j\lambda_k = \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n \mathbf{B}_{0i}^i \mathbf{R}_k \\ {}^j\mathbf{V}_k = \sum_{t=k}^{n-1} {}^j\lambda_t^t \mathbf{R}_k \times {}^t\mathbf{r}_{O_{t+1}/O_t} \\ {}^j\gamma_k = \sum_{i=\max(k,j+2)}^n \mathbf{B}_{0i} \times {}^j\mathbf{r}_{O_i/O_j} {}^i\mathbf{R}_t \\ {}^j\mathbf{U}_k = \sum_{t=k}^{n-1} ({}^j\gamma_t + {}^j\xi_t) {}^t\mathbf{R}_k \times {}^t\mathbf{r}_{O_{t+1}/O_t} \end{cases} \quad (54)$$

针对 ${}^j\lambda_k$ 项的递推式, 若 $k=j$ 且 $k=n-1$

$$\begin{cases} {}^{n-1}\lambda_{n-1} = \mathbf{B}_{0n} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ {}^k\lambda_k = \mathbf{B}_{0k+1} \mathbf{I}_{3 \times 3} + {}^{k+1}\lambda_{k+1} \end{cases} \quad (55)$$

若 $k=j$ 且 $k \neq n$

$${}^j\lambda_k = {}^j\mathbf{R}_{j+1}^{j+1} \lambda_k \quad (56)$$

其中 $j=k:-1:1, k=n-1:-1:1$ 。

针对叠加项 ${}^j\gamma_k$ 的递推式, 若 $k < j$, 则

$${}^j\gamma_k = {}^{k+1}\gamma_k^{k+1} \mathbf{R}_k \quad (57)$$

其中 $j=n-1:-1:1, k=n-1:-1:1$ 。

针对叠加项 ${}^j\mathbf{U}_k$ 的递推式:

$$\begin{cases} {}^j\mathbf{U}_{n-1} = {}^j\mathbf{r}_{O_{n+1}/O_n} \times ({}^j\gamma_{n-1} + {}^j\xi_{n-1}) \\ {}^j\mathbf{U}_k = {}^k\mathbf{r}_{O_{k+1}/O_k} \times ({}^j\gamma_k + {}^j\xi_k) + {}^{k+1}\mathbf{R}_k {}^j\mathbf{U}_{k+1} \end{cases} \quad (58)$$

其中 $j=1:1:n, k=n-2:-1:1$ 。

针对叠加项 ${}^j\mathbf{V}_k$ 的递推式:

$$\begin{cases} {}^j\mathbf{V}_{n-2} = -{}^j\lambda_{n-1}^{n-1} \mathbf{R}_{n-1} \times {}^{n-1}\mathbf{r}_{O_{n-1}/O_n} \\ {}^j\mathbf{V}_k = -{}^j\lambda_{k+1}^{k+1} \mathbf{R}_k \times {}^{k+1}\mathbf{r}_{O_{k+2}/O_{k+1}} + {}^j\mathbf{V}_{k+1}^{k+1} \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (59)$$

其中 $j=1:1:n-1, k=n-3:-1:1$ 。

针对式(34)与式(35)中叠加提取项 ${}^j\sigma_k$ 为

$$\begin{cases} {}^j\sigma_k = \sum_{i=\max(k,j)}^n {}^j\mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k \\ {}^{j^+}\sigma_{k^+} = \sum_{i=\max(k+1,j+1)}^n {}^j\mathbf{R}_i \mathbf{B}_{9i}^i \mathbf{R}_k \end{cases} \quad (60)$$

其中 $j=1:1:n, k=1:1:n-3$ 。

针对叠加项 ${}^j\sigma_k$ 与 ${}^{j^+}\sigma_{k^+}$ 的递推式:

$$\begin{cases} {}^j\sigma_k = {}^j\sigma_k^k \mathbf{R}_k \\ {}^{j^+}\sigma_{k^+} = {}^j\mathbf{R}_{j+1}^{j+1} \sigma_{k^+} \end{cases} \quad (61)$$

对式(33)与式(34)中的其他叠加项进行递推计算, 首先, 采用与 ${}^j\sigma_k$ 类似的递归算法, 对以下各项进行计算, 如 ${}^j\xi_{k^+}, {}^j\psi_{k^+}, {}^j\mathbf{U}_{k^+}, {}^{j^+}\xi_{k^+}$; 其次, 也可利用 ${}^{j^+}\sigma_{k^+}$ 实现的算法, 来计算 ${}^{j^+}\psi_{k^+}, {}^{j^+}\gamma_{k^+}, {}^{j^+}\mathbf{U}_{k^+}$ 。

系统惯性矩阵计算: 根据式(32)~式(35)可计算耦合的惯性矩阵与耦合矩阵。

5 数值仿真验证与特性分析

5.1 动力学模型的验证

为了验证空间柔性机器人的动力学有效性, 以柔性空间 6 自由度机器人为对象, 空间机器人的结构包括基座 B_0 , $B_{m1} \sim B_{m6}$ 为机械臂本体, 如图 2 所示, 机械臂 B_{m1} 固定安装在基座 B_0 的 z_0 的正方向上, 在基座坐标系上向量 $\mathbf{r}_a = [0, 0, 0.5 \text{ m}]^T$ 。 B_{p1} 与 B_{p2} 为薄板结构太阳帆板。若假设 $l_{cr} = 1 \times 10^{-5}$, 关节处参数如表 2 所示^[20], 该系统本体结构的物理参数如表 3 所示。

表 2 空间柔性机器人关节机构物理参数

Table 2 Physical parameters of joint mechanism of space flexible robot

关节	质量/kg	尺寸/m		惯量/(kg·m ²)			阻尼系数/ (N·m·s/rad)	刚度系数/ (N·m/rad)
		长度	半径	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}		
J_1, J_2	2.3	0.06	0.07	0.074 5	0.074 5	0.010 0	0.05	1 000
J_3, J_4, J_5, J_6	2.3	0.06	0.07	0.074 5	0.074 5	0.010 0	0.05	800

表 3 空间柔性机器人机构物理参数

Table 3 Physical parameters of spatial flexible robot mechanism

机械臂	质量/kg	尺寸/m			惯量/(kg·m ²)			弹性模量/ 10 ⁹ Pa
		长度	宽或半径	高	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	
B_0	1.58×10^3	1.5	1.5	1.5	1.481×10^3	1.481×10^3	0.592×10^3	210
B_1	10	0.256	0.063		0.074 5	0.074 5	0.039 7	210
B_2	17	1.774	0.063		4.492	0.067 5	4.492	70
B_3, B_5	5	0.128	0.063		0.033 1	0.033 1	0.039 7	210
B_4	16	1.604	0.063		3.462	0.063 5	3.462	70
B_6	7	0.294	0.063		0.064 3	0.064 3	0.027 8	210
B_p	162	4	1	0.02	9.000	56.456	47.627	0.37

利用软件 Soilworks 对空间机器人进行的结构设计, 关节连接部分采用接触面锁定来固结; 利用有限元 ANSYS 对空间柔性机器人的柔性部件进行预处理, 将其部件导入软件中获取利用模态分析模块获取其模态值。柔机械臂以简支端-简支端为边界条件, 柔性薄板以固定与自由度端为边界条件进行仿真, 由于柔性体振动中低阶模态起主要作用, 因此, 在仿真去掉刚体模态, 连杆前 2 阶振动频率为 11.25 Hz 和 30.93 Hz, 而柔性太阳帆板的前 4 阶振动频率为 2.322、11.253、14.491、36.122 Hz。将其导入 Adams 中进行仿真。在该仿真中 B_0 、 B_{m1} 、 B_{m3} 、 B_{m5} 与 B_{m6} 为刚体, B_{m2} 、 B_{m4} 、 B_{p1} 与 B_{p2} 为柔性体。 B_0 与 B_{p1} 、 B_{p2} 之间设置为固定副, 柔性连杆与关节轴间设置为固定连接, 同时将 ANSYS 得到的柔性机械臂和柔性太阳帆板的模态文件导入到 Adams 软件进行组装。在 $B_{m1} \sim B_{m6}$ 之间添加转动副, 并设置旋转扭簧阻尼器, 同时在转动副施加驱动力矩, 得到柔性空间机器人的虚拟样机。以机械臂各关节均与 z_0 平行作为参考, 定义瞬时顺时针方向为正, 载体基座的位置 $r_b = [0, 0, 0]^T$ (m), $\theta_b = [0, 0, 0]^T$ (°), 载体上输入力与力矩均为 0。机器人的初始角度选取为 $q = [0, 0, 0,$

$0, 0, 0]^T$ (°), 各个关节力矩为 $\tau = [10, 10, 10, 1, 1, 0.1]^T \sin(4\pi t)$ (N·m), 在 Simulation 模块中设置仿真时间为 10 s, 步长为 0.1 s, 进行仿真。

在本文仿真中, 载体基座与机械臂的初始值与 Adams 中初值、输入力矩以及仿真时间均相同, 利用求解算法 ode15 s 对其动力学进行仿真模拟, 以输出空间载体(基座)的平动位移、转动角度与机械臂关节角度等变量, 与本文中的动力学模型和求解算法的计算结果进行对比, 以验证了本文所建模型的正确性。为了更为清晰描述动力学建模与模拟, 给出建模流程图, 具体如图 3 所示。计算结果见图 4~图 8。图 4 为机器人载体的位姿变化; 图 5 为机械臂关节角度变化; 图 6 为机械臂关节柔性变化; 图 7 为机械臂末端的柔性变形, 图 8 为柔性帆板柔性变形。

根据图 4 与图 5 的曲线分析可知, 其载体位姿与机械臂关节变化是基本一致的, 这验证了所建模型的正确性。对比图 6 中曲线, 关节柔性变形是一致的, 进一步验证了本文模型有效性。

根据图 7 柔性连杆的变形可知, 关节对三维柔性变形振动, x 、 y 、 z 方向变形分别为剪切变形、

扭转变形与弯曲变形。根据其数量级变化可知, 柔性连杆的变形主要体现于弯曲变形上, 但该弯曲变形不只是平面意义上的二维弯曲变形, 它考虑轴向剪切与扭转变形的影响的耦合变形。同样,

而图 8 中的曲线变化, 无论左帆板还是右帆板, 其弯曲变形相比于剪切与扭转变形是十分较明显的, 这与以往研究中变形是相符合的, 进一步证明了该动力学的正确性。

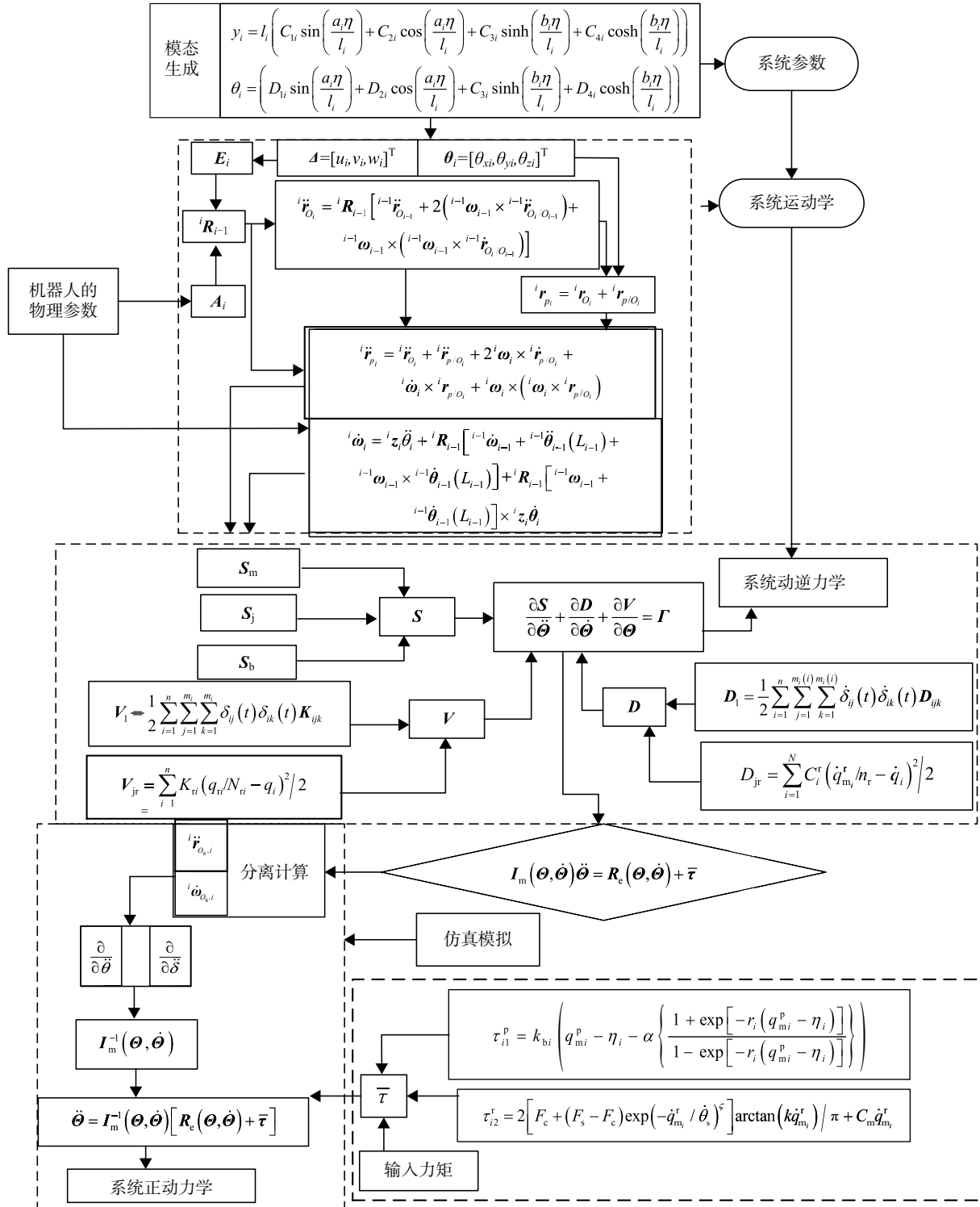


图 3 基于 Gibbs-Appell 的递归动力学计算流程

Fig. 3 Recursive dynamics calculation flow based on Gibbs-Appell

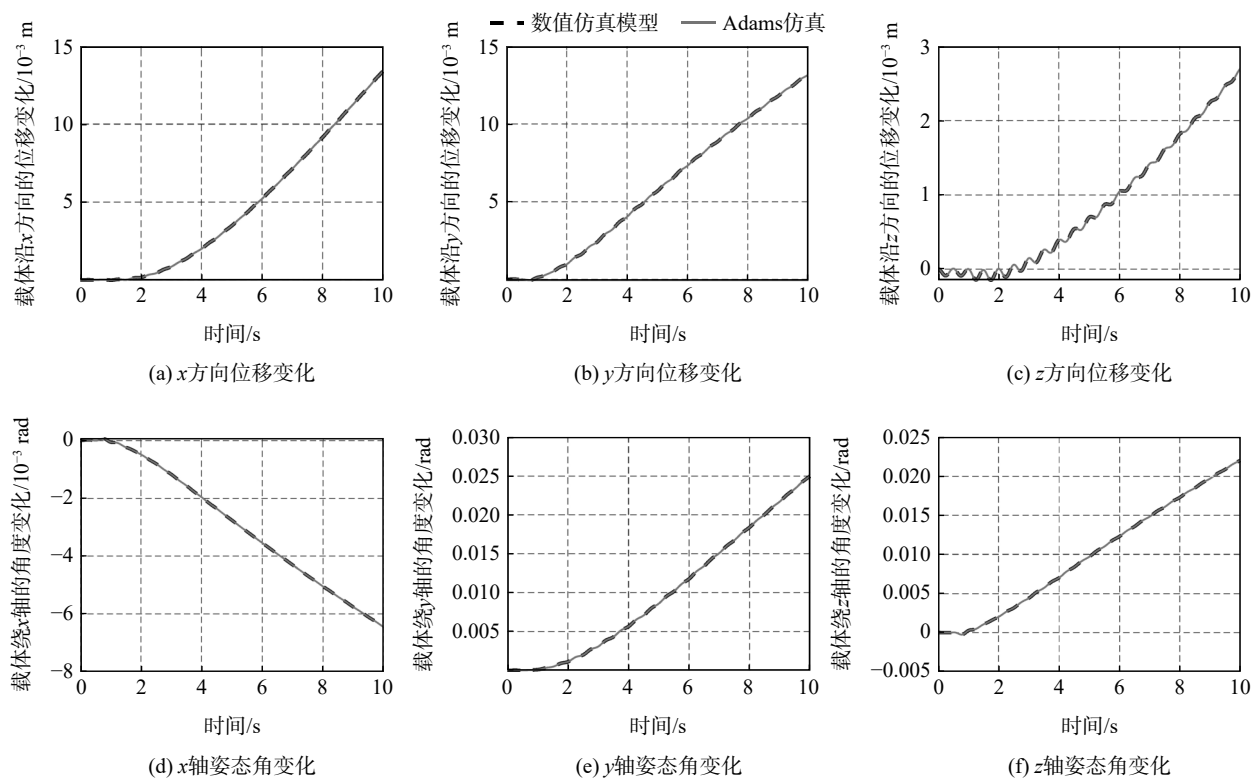


图4 载体的位姿变化

Fig. 4 Pose change of carrier

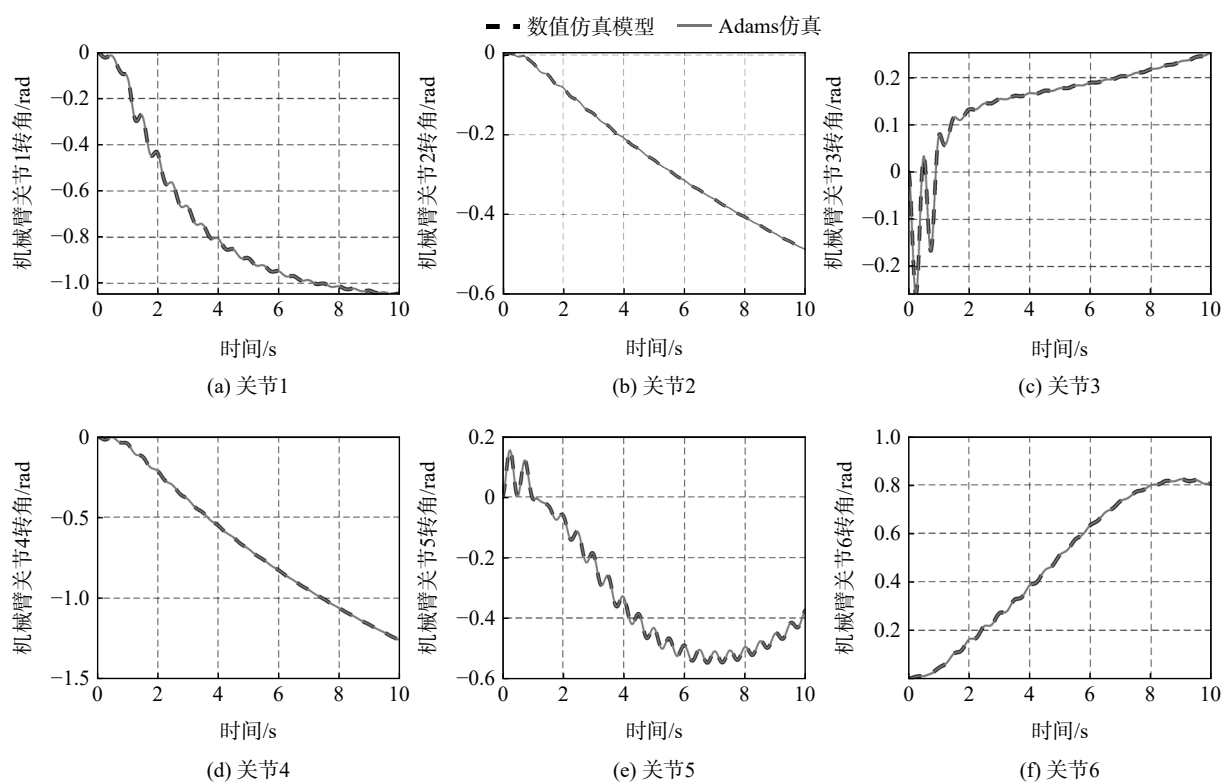


图5 机械臂关节角度变化

Fig. 5 Changes of joint angles

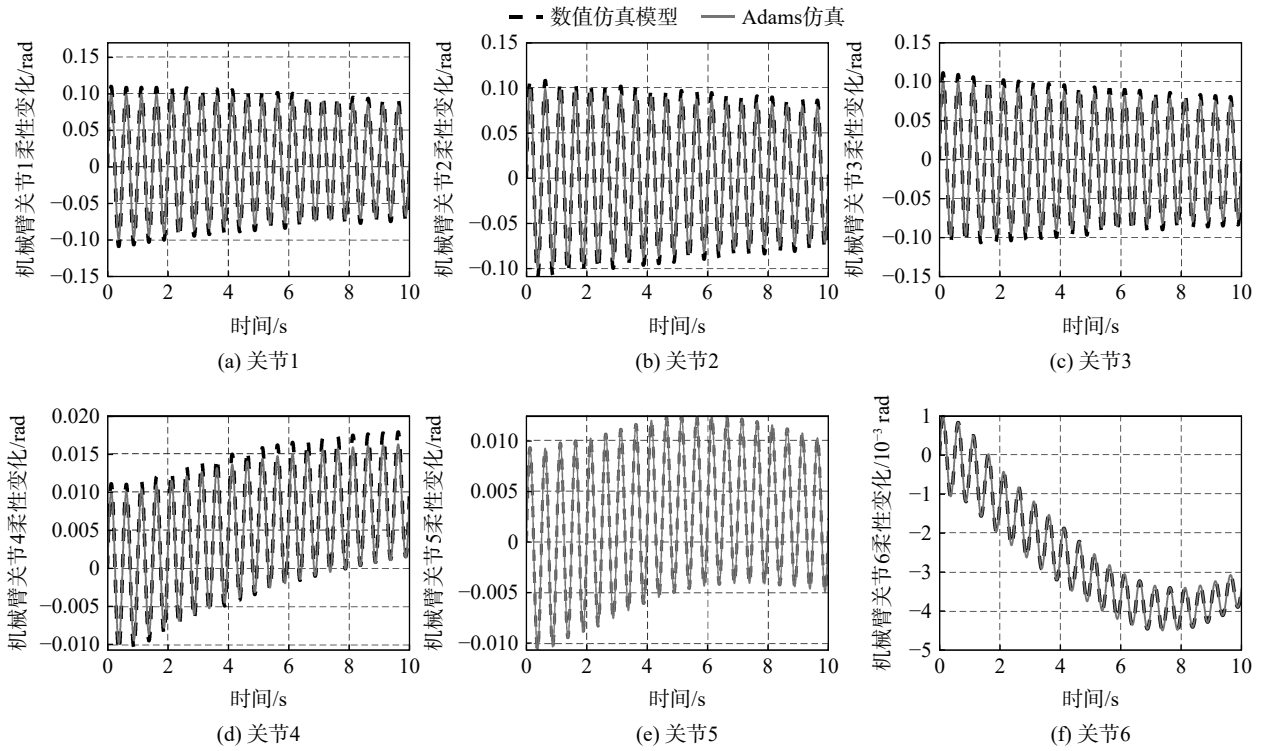


图 6 机械臂关节柔性变化

Fig. 6 Changes of joint flexibility

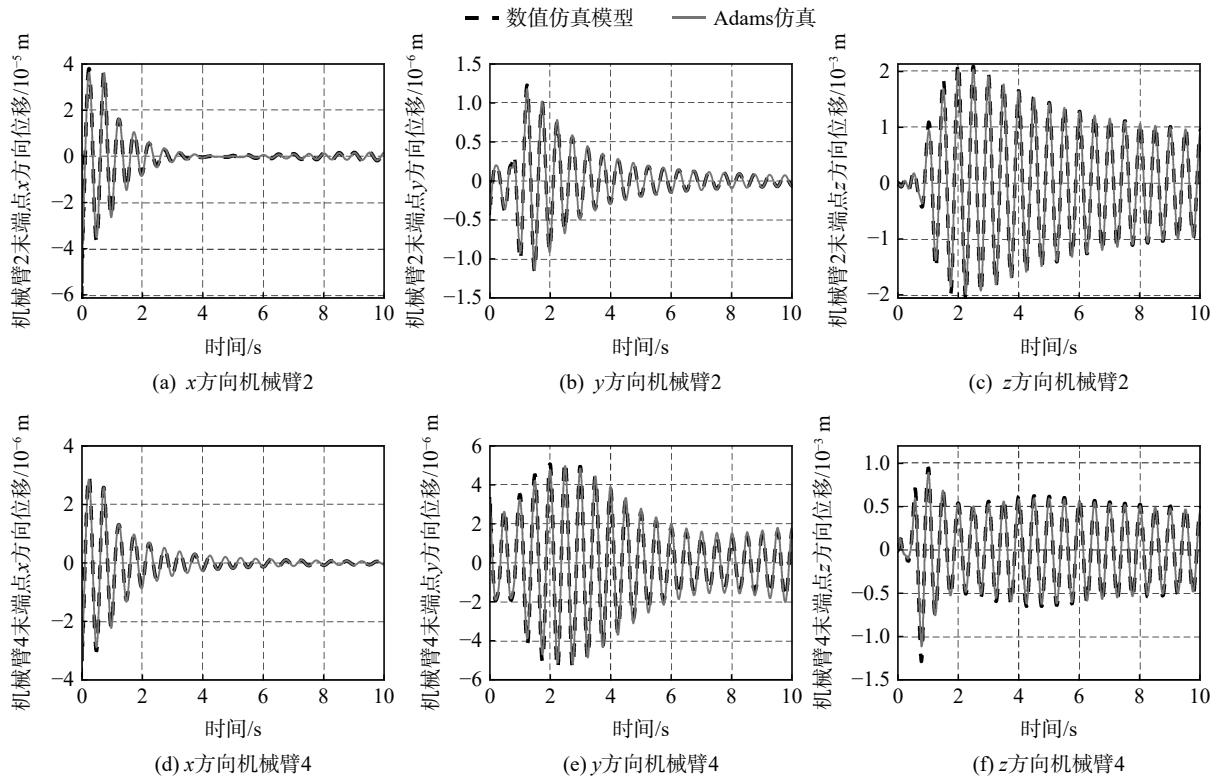


图 7 机械臂末端变形

Fig. 7 Deformation at the end of the manipulator

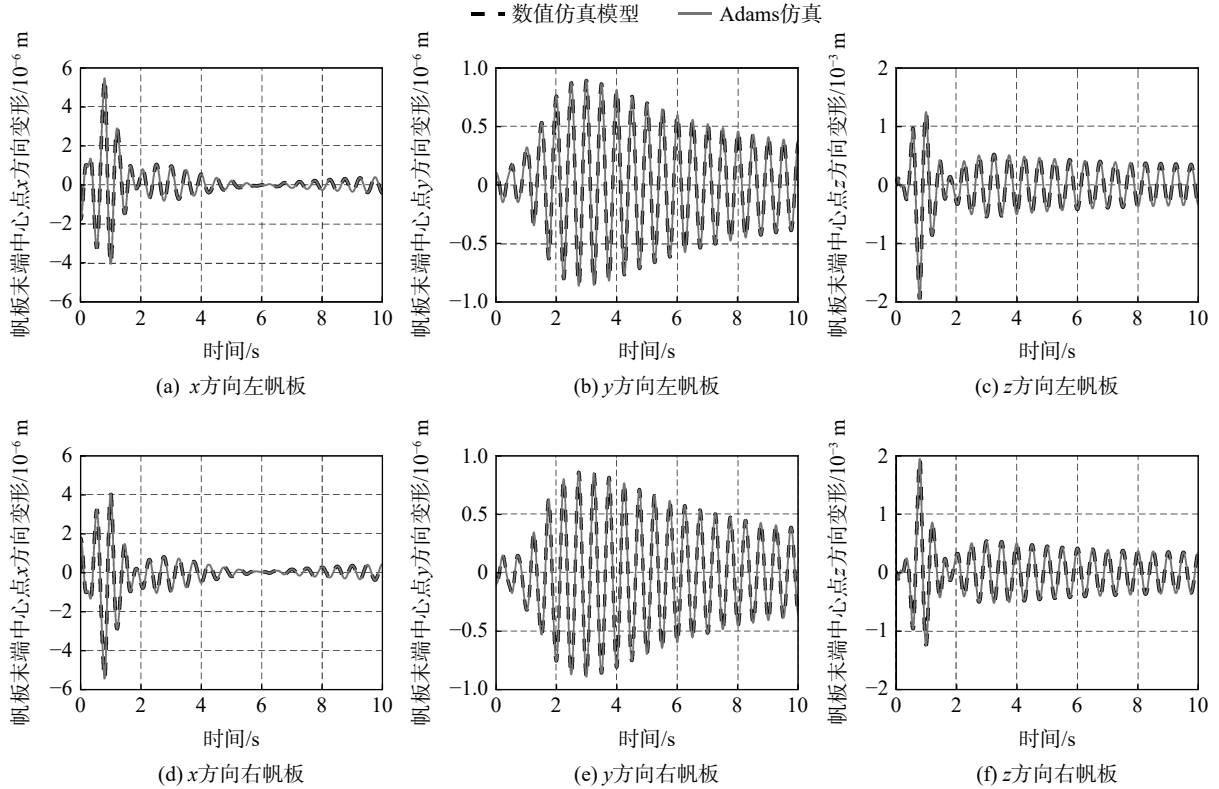


图8 帆板中心点变形

Fig. 8 Deformation of solar panel center point

5.2 特性分析

5.2.1 关节刚度对空间机器人的影响分析

机械臂包括连杆柔性性与关节柔性,其柔性结构不易被设计。输入力矩通过关节结构来传递,不同关节刚度对连杆与附件的柔性变形具有较大的影响,本小节采用单变量参数分析法,基本参数与驱动均与文中第4.1节中的参数保持相同。关节刚度为 $K=[700, 750, 800](\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad})$,以柔性振动变形为评定指标,进行仿真对比。图9与

图10为不同关节刚度机械臂末端与帆板中点的柔性变形。

根据图9中,对不同刚度的关节的柔性机械臂连杆 z 方向的变形对比,可知随着关节刚度的增大,机械臂弯曲变形逐渐减小。由图10中的振动曲线变化可知,关节刚度增大使得关节柔度降低,关节驱动力矩减小,进而使得柔性空间机器人连杆与附件的振动幅度增减小,这与弹性传动力 F_s 是相辅相成的。

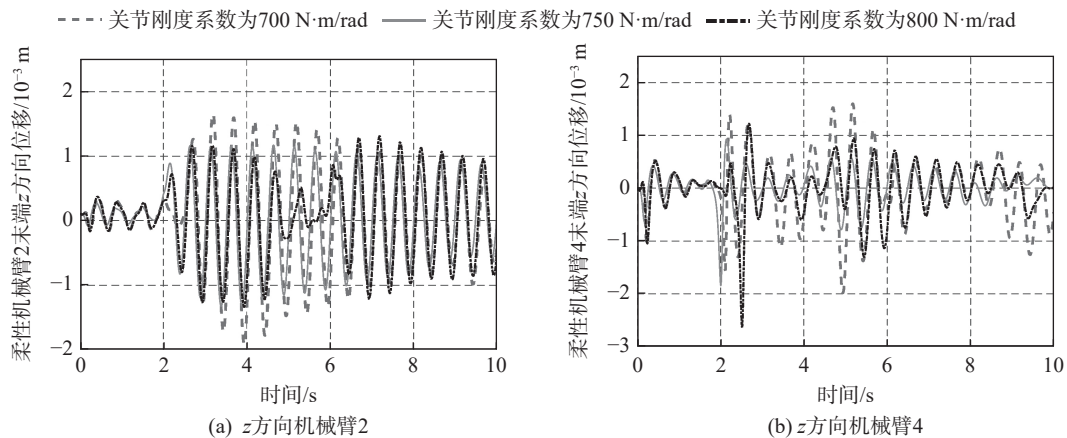


图9 机械臂末端变形(不同关节刚度)

Fig. 9 End deformation of manipulator (different joint stiffnesses)

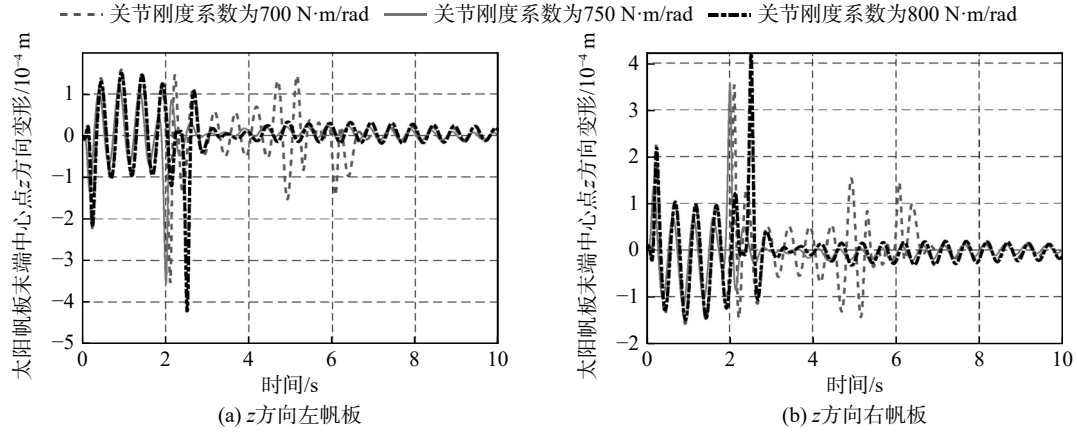


图 10 帆板中心点变形(不同关节刚度)

Fig. 10 Deformation of solar panel center point (different joint stiffnesses)

5.2.2 关节摩擦对空间机器人的影响分析

采用与文中第 4.2.1 节相同的研究方法, 设定关节刚度为 $700 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, 不同摩擦因数为 $C=[0.005, 0.05, 0.25] (\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad})$, 以机械臂与附

件的 z 方向变形为评定目标, 进行仿真分析。图 11 为不同关节摩擦因数的柔性机械臂的 z 方向变形; 图 12 为不同关节摩擦因数的柔性帆板的 z 方向变形。

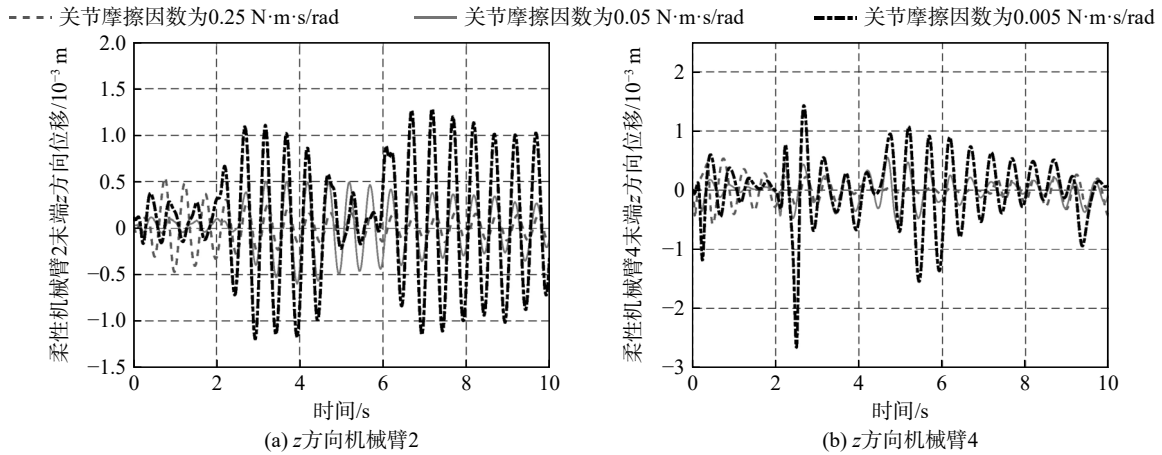


图 11 机械臂末端变形(不同关节摩擦因数)

Fig. 11 End deformation of manipulator (different joint friction coefficients)

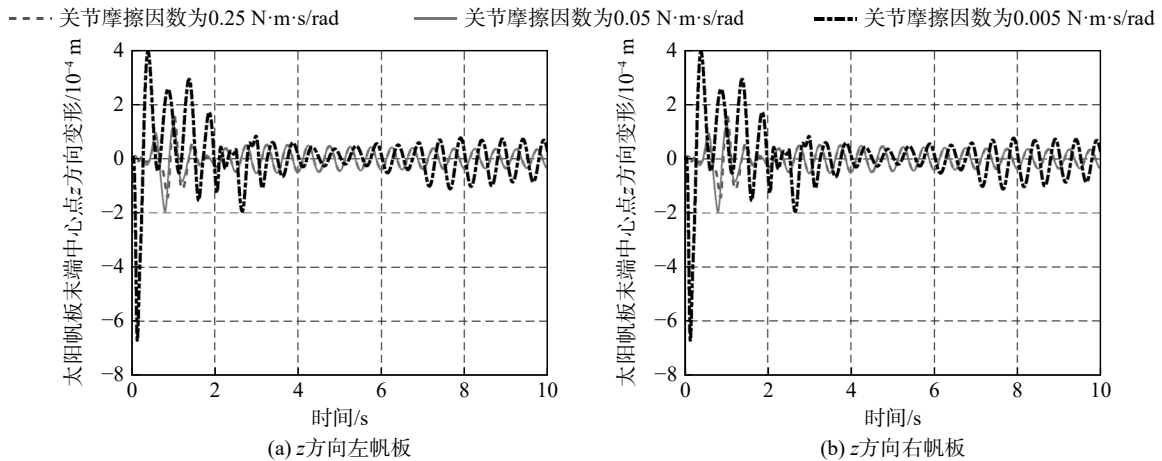


图 12 帆板中心点变形(不同关节摩擦因数)

Fig. 12 Deformation of solar panel center point (different joint friction coefficients)

通过对比图11与图12中的关节摩擦因数变化,随着摩擦因数增大,柔性连杆与太阳帆板的 z 方向变形均是减小的。摩擦因数增大,消耗了驱动力矩驱动的总的能量,进而减小柔性变形的驱动总能,进而使得柔性变形的振幅减小。

6 结 论

1) 本文利用递归Gibbs-Appell的方法,提出了一种柔性空间机器人的运动学与正逆动力学方法,关节考虑了关节弹性、摩擦与侧向间隙等;基于TBT,从三维角度综合考虑了臂体变形。

2) 利用旋转矩阵 $R_{3 \times 3}$ 与向量 $L_{1 \times 3}$ 替代变换矩阵 $T_{4 \times 4}$ 简化了递推运动学,以缩小计算量。在模型推导过程中,对偏微分式进行预分解的局部计算,以提高计算速率。而对惯性矩阵的求和项,利用递归式计算方法,以满足实时计算需求。

3) 基于联合仿真,在相同的驱动力矩下,空间机器人的载体的轨迹、关节柔性变量、关节轨迹以及连杆弹性变形均保证了一致性,验证了所建动力学模型的正确性。

4) 在一定关节刚度变化范围,机械臂关节刚度的增大,使得关节柔度降低,且关节驱动力矩减小,进而使得柔性空间机器人连杆与附件的柔性振动幅度减小。而随着摩擦因数的增大,使得驱动能量损失严重,进而降低了运动性能,在一定程度上使得连杆与附件变形有减弱的趋势。

参考文献:

- [1] 孟光,韩亮亮,张崇峰.空间机器人研究进展及技术挑战[J].航空学报,2021,42(1):523963.
MENG Guang, HAN Liangliang, ZHANG Chongfeng. Research progress and technical challenges of space robot[J]. Acta Astronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(1): 523963. (in Chinese)
- [2] 刘宏,刘冬雨,蒋再男.空间机械臂技术综述及展望[J].航空学报,2021,42(1):524164.
LIU Hong, LIU Dongyu, JIANG Zainan. Space manipulator technology: review and prospect[J]. Acta Astronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(1): 524164. (in Chinese)
- [3] 方五益,郭晔,黎亮,等.柔性铰柔性杆机器人动力学建模、仿真和控制[J].力学学报,2020,52(4):965-974.
FANG Wuyi, GUO Xian, LI Liang, et al. Dynamics modeling, simulation, and control of robots with flexible joints and flexible links[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(4): 965-974. (in Chinese)
- [4] 何俊培.新型超冗余空间机械臂的关键技术研究[D].长春:中国科学院大学(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所),2020.
HE Junpei. Research on key technologies of new hyper-redundant space manipulator[D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2020. (in Chinese)
- [5] NANOS K, PAPADOPOULOS E. On parameter estimation of space manipulator systems with flexible joints using the energy balance[C]//2019 International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, US: IEEE, 2019: 3570-3576.
- [6] KORAYEM M H, DEHKORDI S F, MEHRJOOEE O. Nonlinear analysis of open-chain flexible manipulator with time-dependent structure[J]. Advances in Space Research, 2022, 69(2): 1027-1049.
- [7] 倪诗皓.空间柔性机械臂动力学建模研究[D].南京:南京航空航天大学,2020.
NI Shihao. Research on dynamic modeling of flexible space manipulator[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2020. (in Chinese)
- [8] 陈志勇,陈力.姿态受控柔性关节双臂空间机器人的抗力矩饱和与控制及振动抑制[J].工程力学,2016,33(5):227-233,256.
CHEN Zhiyong, CHEN Li. Anti-torque-windup control and vibration suppression of flexible-joint dual-arm space robot with an attitude-controlled base[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(5): 227-233, 256. (in Chinese)
- [9] 谢立敏,陈力.漂浮基柔性关节-柔性臂空间机器人运动非线性滑模控制及双重弹性振动主动抑制[J].中国机械工程,2013,24(19):2657-2663.
XIE Limin, CHEN Li. Nonlinear sliding mode motion control and double elastic vibration active suppression of free-floating flexible-joint and flexible-link space robot[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(19): 2657-2663. (in Chinese)
- [10] 黄小琴,陈力.基座、臂杆全弹性空间机器人抗死区动态面控制[J].哈尔滨工程大学学报,2019,40(12):2063-2069.
HUANG Xiaoqin, CHEN Li. Anti-dead-zone control based on dynamic surface for space robot with flexible links and elastic base[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2019, 40(12): 2063-2069. (in Chinese)
- [11] 潘冬.空间柔性机械臂动力学建模分析及在轨抓捕控制[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2014.
PAN Dong. Research on dynamics modeling and capture control of space flexible manipulator[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2014. (in Chinese)
- [12] 余章卫.六自由度空间机器人动力学建模与控制研究[D].上海:上海交通大学,2018:10-50.
YU Zhangwei. Dynamics modelling and control of a six DOF space robot[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2018: 10-50. (in Chinese)
- [13] 杜严锋.柔性空间机器人动力学建模及振动控制研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2020:23-60.
DU Yanfeng. Research on dynamic modeling and vibration control for flexible space robot[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2020: 23-60. (in Chinese)
- [14] RASTEGARI R, ALI A, MOOSAVIAN S. Multiple impedance control of space free-flying robots via virtual linkages[J]. Acta Astronautica, 2010, 66(5/6): 748-759.
- [15] GOULIAEV V I, ZAVRAZHINA T V. Dynamics of a flexible multi-link cosmic robot-manipulator[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(4): 641-657.
- [16] KORAYEM M H, SHAFEI A M, ABSALAN F, et al. Kinematic and dynamic modeling of viscoelastic robotic manipulators using Timoshenko beam theory: theory and experiment[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 71(5/6/7/8): 1005-1018.
- [17] SHARIFNIA M, AKBARZADEH A. A constrained assumed modes method for dynamics of a flexible planar serial robot with prismatic joints[J]. Multibody System Dynamics, 2017, 40(3): 261-285.
- [18] 刘延柱,潘振宽,戈新生.多体系统动力学[M].2版.北京:高等教育出版社,2014.
- [19] SHAFEI A M, SHAFEI H R. Oblique impact of multi-flexible-link systems[J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(5): 904-923.
- [20] WU Yifei, WANG Zhihong, LI Yuanyuan, et al. Characteristic modeling and control of servo systems with backlash and friction[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 1-21.

(编辑:秦理曼)