

文章编号: 1000-8055(2023)08-2015-09

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20210640

## 航空发动机分布式系统状态反馈 周期事件触发控制

宋朋涛<sup>1</sup>, 杨清宇<sup>1,2</sup>, 温广瑞<sup>3</sup>, 张志芬<sup>3</sup>

- (1. 西安交通大学 自动化科学与工程学院, 西安 710049;  
2. 西安交通大学 机械制造系统工程国家重点实验室, 西安 710049;  
3. 西安交通大学 机械工程学院, 西安 710049)

**摘 要:** 为平衡航空发动机分布式控制系统中总线服务质量与控制品质之间的矛盾, 提出了一种基于线性矩阵不等式理论的周期事件触发机制与保成本控制器协同设计方法。基于输入-状态稳定性(ISS)定理, 构造周期事件触发控制下闭环系统渐进稳定的充分条件, 并给出了控制器增益与成本函数上界的求解方法; 考虑网络时延的影响, 利用分段 Lyapunov 泛函, 建立时延下闭环系统的稳定性判据, 并对系统的时延稳定裕度进行求解和验证。仿真结果表明: 在所求解的事件触发机制与控制器联合作用下, 闭环系统获得了较好的控制性能。当触发参数设定值为 0.4 时, 系统具有 0.454 s 的时延稳定裕度, 且通信资源节省率达到了 83%, 有效地提升了网络的服务质量。

**关 键 词:** 分布式控制系统; 状态反馈; 事件触发控制; 保成本控制器; 时延

中图分类号: V233.7

文献标志码: A

## State feedback periodic event-triggered control for aero-engine distributed systems

SONG Pengtao<sup>1</sup>, YANG Qingyu<sup>1,2</sup>, WEN Guangrui<sup>3</sup>, ZHANG Zhifen<sup>3</sup>

- (1. School of Automation Science and Engineering,  
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;  
2. State Key Laboratory for Manufacturing System Engineering,  
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;  
3. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** A co-design strategy of periodic event-triggered mechanism and guaranteed cost controller based on linear matrix inequality theory was proposed to balance the contradiction between quality of service and quality of performance in aero-engine distributed control systems. Based on input-to-state stability (ISS) theory, a sufficient condition for the asymptotic stability of closed-loop systems under periodic event-triggered control was presented. The solution method of the controller and the upper bound of cost function were given. Considering the effect of communication delay, the stability criterion of closed-loop systems with delay was established by using piecewise Lyapunov functional method, and the delay margin of closed-loop system under periodic event-triggered control was solved and verified. Simulation results showed that the closed-loop system could achieve better control performance under the

收稿日期: 2021-11-08

基金项目: 国家科技重大专项(J2019-V-0003-0094)

作者简介: 宋朋涛(1996—), 男, 博士生, 主要从事航空发动机分布式系统的稳定性研究。E-mail: songpengtao@stu.xjtu.edu.cn

通信作者: 杨清宇(1974—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事工业智能控制、故障诊断与智能运维研究。E-mail: yangqingyu@mail.xjtu.edu.cn

引用格式: 宋朋涛, 杨清宇, 温广瑞, 等. 航空发动机分布式系统状态反馈周期事件触发控制[J]. 航空动力学报, 2023, 38(8): 2015-2023. SONG Pengtao, YANG Qingyu, WEN Guangrui, et al. State feedback periodic event-triggered control for aero-engine distributed systems[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(8): 2015-2023.

combined action of the solved event-triggered mechanism and controller. Moreover, when the trigger parameter setting value was 0.4, it could have a delay stability margin of 0.454 s, and the communication resource saving rate could reach 83%, thus effectively improving the quality of network service.

**Keywords:** distributed control system; state feedback; event-triggered control; guaranteed cost controller; delay

航空发动机控制系统正由集中式控制向分布式控制跨越,通过引入总线网络 and 智能节点实现信息的传输与交互,具有可扩展性强、维护方便和高可靠性等特点<sup>[1-3]</sup>。为保证分布式系统具有较好的控制品质,往往需要各节点高频采样,当相邻时刻的采样信息差异较小时,状态量和控制量的更新对系统性能的提升不会产生明显影响。因此,大量的冗余信息被释放到总线网络,造成了通信资源的浪费<sup>[4]</sup>。同时,由于带宽限制和网络共享等特点,当多个节点在同一时刻发送数据时,必须竞争才能获得网络的访问权,使网络丢包和堵塞事件频发,降低了网络的服务质量<sup>[5]</sup>。

针对上述问题,国内外学者开展了大量的研究<sup>[6-8]</sup>。事件触发控制,通过合理地设计触发机制来限制数据包的发送,在保证系统控制性能的同时极大地降低了通信资源的占用,被认为是有效的解决策略<sup>[9-11]</sup>。如文献<sup>[9]</sup>研究了事件触发控制下分布式系统的稳定性问题,并基于输入-状态稳定性(ISS)定理给出了系统的稳定性判据;文献<sup>[10]</sup>针对事件触发控制下的网络控制系统,设计了动态输出反馈控制器,并基于李雅普诺夫泛函分析了系统的稳定性;文献<sup>[11]</sup>考虑扰动对系统的影响,研究了事件触发机制下的鲁棒 $H_\infty$ 控制问题。与周期采样控制相比,事件触发控制根据控制性能需求进行状态量和控制量的更新,在保证闭环系统性能的基础上,有效地减少了控制任务的执行数量,可以显著地节约计算资源和通信资源。

早期的事件触发控制是连续事件触发,上述研究中触发机制的实现需要设计专门的硬件对信号进行持续监测,难以直接在现有的周期采样控制系统中实现<sup>[5]</sup>。为了便于在数字控制系统中实现事件触发控制,Heemels 等<sup>[12]</sup>提出了周期事件触发控制(PETC)策略。相比于传统的事件触发控制,周期事件触发控制只在固定的采样周期进行触发条件的判断,避免了事件触发器对信号的连续检测,但这也对系统的建模和稳定性分析提出了新的挑战<sup>[8]</sup>。如文献<sup>[12-14]</sup>研究了周期事件触发控制系统的建模与稳定性分析;文献<sup>[15]</sup>研究了基于模型的周期事件触发控制,通过构建状

态观测器来保证系统的稳定性。但以上文献集中在稳定性判据和触发机制的构造,对于分布式系统进行最优控制器和事件触发机制协同设计的成果相对较少,同时也未明确分析事件触发控制下网络丢包对数据传输和系统性能的影响。

鉴于以上分析,本文针对某型双轴涡扇发动机<sup>[16-17]</sup>开展周期事件触发控制研究,提出了一种基于线性矩阵不等式(LMI)理论的事件触发机制与保成本最优控制器协同设计方法。首先,根据周期事件触发机制下状态变量与控制变量的传输特性,建立状态反馈控制下的离散系统模型;其次,基于 ISS 定理和 LMI 理论,给出周期事件触发控制下闭环系统渐进稳定的充分条件,并给出成本函数上界与控制器增益的求解方法。考虑网络时延对闭环系统稳定性的影响,构建合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,提出了时延下闭环系统的稳定性判据,并对周期事件触发控制下闭环系统的时延稳定裕度进行求解;最后,通过仿真算例验证稳定性判据和保成本控制器的有效性。

## 1 系统建模

### 1.1 航空发动机分布式系统模型

基于通信网络的航空发动机分布式控制系统的结构如图 1 所示<sup>[1]</sup>,传感器、控制器和执行器通过总线完成信息的传输与交互。

考虑航空发动机分布式系统的小偏离状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}(t) = [n_1, n_h]^T$  为系统的状态变量,  $\mathbf{u}(t) = [m_f, A_8]^T$  为系统的控制量,  $\mathbf{y}(t) = [n_1, n_h]^T$  为系统的输出。 $n_1$  为低压转子转速,  $n_h$  为高压转子转速,  $m_f$  为主燃油流量,  $A_8$  为尾喷管的临界截面积,  $\mathbf{A}_c$ 、 $\mathbf{B}_c$  和  $\mathbf{C}$  为适维矩阵。

为简化控制器与触发机制的设计,对于周期事件触发控制下的航空发动机分布式控制系统,作出以下假设:假设传感器为时间驱动,采样周期为  $h$ ,控制器和执行器为事件驱动;假设数据为单包传输,无时序错乱,且忽略网络时延;当满足触发条件时,更新状态信号和控制信号,且无丢

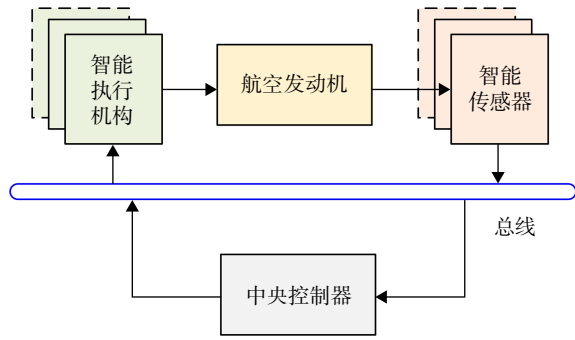


图 1 航空发动机分布式控制系统结构图

Fig. 1 Structural diagram of aero-engine distributed control system

包现象。此时航空发动机分布式系统的离散模型可以描述为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{A} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_c h}$ ;  $\mathbf{B} = \int_0^h \mathbf{e}^{\mathbf{A}_c s} \mathbf{B}_c ds$ 。

### 1.2 周期事件触发控制下闭环系统模型

对于式(2)的航空发动机分布式系统引入周期事件触发机制,如图2所示。假定采样周期为 $h$ ,集合 $S_1 = \{0, h, 2h, \dots, kh\}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,则在 $kh$ 时刻进行触发判断,记 $b_k = kh$ 。图中 $\mathbf{x}(b_k)$ 、 $\hat{\mathbf{x}}(b_k)$ 和 $\mathbf{u}(b_k)$ 分别为 $b_k$ 时刻传感器的输出、控制器的输入和执行器的输出。当满足触发条件时才进行状态量和控制量的更新,同时最小触发间隔满足 $\delta > h$ ,避免了 Zeno 现象的发生(有限时间内发生无限次触发)。记第 $k$ 次成功触发的时刻为 $t_k h \in S_2 = \{0, t_1 h, \dots, t_k h\}$ ,则 $S_2 \subseteq S_1$ 。

设计周期事件触发机制如下:

$$f(kh) = \mathbf{e}^T(kh) \Phi \mathbf{e}(kh) - \sigma \mathbf{x}^T(kh) \Phi \mathbf{x}(kh) \quad (3)$$

式中 $\Phi$ 为待求的触发矩阵,  $\sigma \in [0, 1)$ 为给定的触发参数,用来调节事件触发的难易程度,当 $\sigma = 0$

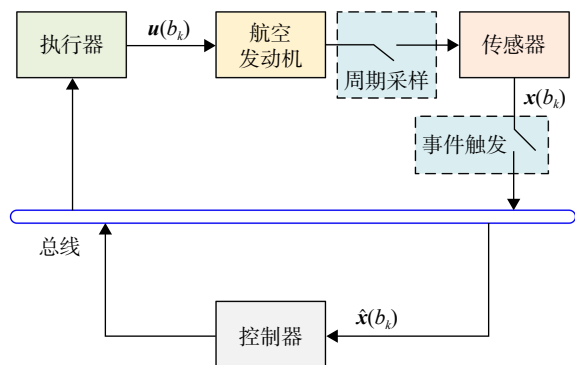


图 2 周期事件触发控制系统结构图

Fig. 2 Structural diagram of system with PETC

时相当于周期采样控制。

则第 $k+1$ 次成功触发的时刻为

$$t_{k+1}h = t_kh + \min_l \{lh \mid f(t_kh + lh) > 0, l \in \mathbf{N}\} \quad (4)$$

引入状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (5)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 是采样时刻控制器输入,  $t \in (b_k, b_{k+1}]$ 时,取值为

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(b_k) & f(b_k) > 0 \\ \hat{\mathbf{x}}(b_k) & f(b_k) \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}(b_k)$ 为上一触发时刻的状态量,定义误差函数

$$\mathbf{e}(b_k) = \hat{\mathbf{x}}(b_k) - \mathbf{x}(b_k) = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k \quad (7)$$

在上述周期事件触发控制下,将触发机制引入的误差 $\mathbf{e}(b_k)$ 等效成系统的干扰输入,得到闭环系统模型如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \end{cases} \quad (8)$$

### 1.3 考虑时延和噪声影响的闭环系统模型

在上述分析中,为了简化控制器和触发机制的设计,忽略了时延对系统模型的影响。但由于总线网络的引入,难以避免地会产生网络时延。鉴于分布式控制系统的时延特性,近似地将系统中的总时延等效到传感器-控制器回路,对时延下的周期事件触发控制系统进行稳定性分析。

由式(7)可知,在 $t \in (t_kh, t_{k+1}h]$ 时误差函数为

$$\mathbf{e}(i_kh) = \hat{\mathbf{x}}(i_kh) - \mathbf{x}(i_kh) = \mathbf{x}(t_kh) - \mathbf{x}(i_kh) \quad (9)$$

式中 $i_kh = t_kh + lh$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ )。则在第 $k$ 次事件触发到第 $k+1$ 次触发之间,航空发动机分布式系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t_kh), t \in [t_kh + \tau_k, t_{k+1}h + \tau_{k+1}) \end{cases} \quad (10)$$

式中 $\tau_k$ 和 $\tau_{k+1}$ 为传感器到控制器的等效时延,  $\mathbf{w}(t)$ 为外部噪声信号,  $\mathbf{D}$ 为适维矩阵,  $\mathbf{x}(t_kh)$ 为第 $k$ 次成功触发时更新的状态量。

为了详细地分析时延下的数据传输特性,对区间 $t \in (t_kh, t_{k+1}h]$ 进行划分<sup>[18]</sup>,如图3所示。

定义

$$\begin{cases} \Omega_l = [t_kh + \tau_k + (l-1)h, t_kh + \tau_k + lh) \\ \Omega_q = [t_kh + \tau_k + (q-1)h, t_kh + qh + \tau_{k+1}) \end{cases} \quad (11)$$

其中 $l = 1, 2, \dots, t_{k+1}h - t_kh - 1$ ;  $q = t_{k+1}h - t_kh$ 。

令 $\tau(t) = t - i_kh$ ,  $t \in \{\Omega_l \cup \Omega_q\}$ ,则 $\tau(t)$ 是分段线

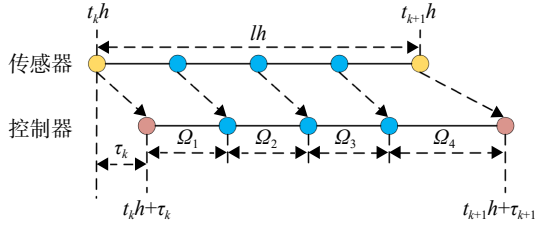


图 3 时延下数据的传输特性

Fig. 3 Data transmission characteristics with time delay

性函数,同时满足 $\tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ 。其中 $\tau_1$ 为各设备工作在理想条件下,期望的时延下界, $\tau_2$ 为网络时变时延的上界。在 $t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1})$ 时,状态反馈控制器变为

$$u(t) = Kx(t_k h) = Kx(i_k h) + Ke(i_k h) = K\{x[t - \tau(t)] + e(i_k h)\} \quad (12)$$

因此,在 $t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1})$ ,考虑时延和噪声的周期事件触发控制系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) + D w(t) \\ u(t) = K\{x[t - \tau(t)] + e(i_k h)\} \end{cases} \quad (13)$$

## 2 闭环系统稳定性判据

对于式(8)和式(13)描述的闭环系统模型分别给出系统的稳定性判据。

**引理 1**<sup>[9]</sup> 如果存在连续可微的正定函数 $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,对于所有的 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $u \in \mathbf{R}^m$

$$\begin{cases} \underline{\alpha}(\|x_k\|) \leq V(x_k) \leq \bar{\alpha}(\|x_k\|) \\ V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha_x(\|x_k\|) + \alpha_u(\|w_k\|) \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\underline{\alpha}$ 、 $\bar{\alpha}$ 和 $\alpha_x$ 是 $K_\infty$ 类函数; $\alpha_u$ 是 $K$ 类函数,则系统ISS稳定。

$$\begin{aligned} \Delta V(k) + x_k^T \Phi x_k - \lambda^2 e_k^T \Phi e_k &= z_k^T \left\{ \begin{bmatrix} G^T \\ (BK)^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G^T \\ (BK)^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \Phi - P & 0 \\ 0 & -\lambda^2 \Phi \end{bmatrix} \right\} z_k + \\ x_k^T R_1 x_k + u_k^T R_2 u_k - x_k^T R_1 x_k - u_k^T R_2 u_k &= z_k^T \left\{ \begin{bmatrix} G^T \\ (BK)^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G^T \\ (BK)^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \Phi - P & 0 \\ 0 & -\lambda^2 \Phi \end{bmatrix} + \right. \\ \left. \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & K^T \end{bmatrix} R_1 \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^T \\ K^T \end{bmatrix} R_2 \begin{bmatrix} K & K \end{bmatrix} \right\} z_k - x_k^T R_1 x_k - u_k^T R_2 u_k &= z_k^T \Theta z_k - [x_k^T R_1 x_k + u_k^T R_2 u_k] \leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

由式(19)可知,当 $\Theta < 0$ 时,满足ISS稳定条件,闭环系统渐进稳定。根据Schur补性质, $\Theta < 0$ 等价于下面的不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Phi - P & 0 & (A+BK)^T & I & K^T \\ * & -\lambda^2 \Phi & (BK)^T & 0 & K^T \\ * & * & -P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -R_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -R_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

对于航空发动机分布式系统,为了平衡网络服务质量与控制品质之间的矛盾,引入成本函数 $J$ 作为事件触发机制与控制器协同设计的目标函数,保证系统在事件触发控制下维持较好的响应性能。

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) R_1 x(k) + u^T(k) R_2 u(k)] \quad (15)$$

其中 $R_1$ 和 $R_2$ 为给定的加权矩阵,且 $R_1$ 和 $R_2$ 是对称正定的,触发机制和控制器协同设计的目标:保证闭环系统渐进稳定,且使得成本函数 $J$ 最小。

**定理 1** 对于周期事件触发控制下的航空发动机分布式系统,当不考虑时延影响时,闭环系统渐进稳定的充分条件:存在正定矩阵 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 使得线性矩阵不等式(16)成立。且成本函数 $J$ 具有上界: $J < x^T(0) P x(0)$ 。式中 $*$ 表示对称阵。

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} - \bar{P} & 0 & \bar{P}(A+BK)^T & \bar{P} & \bar{P}K^T \\ * & -\lambda^2 \bar{Q} & \bar{P}(BK)^T & 0 & \bar{P}K^T \\ * & * & -\bar{P} & 0 & 0 \\ * & * & * & -R_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -R_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

证明:构造如下Lyapunov函数

$$V(k) = x^T(k) P x(k) \quad (17)$$

令 $\alpha_x(\|x_k\|) = x_k^T \Phi x_k$ ,  $\alpha_u(\|e_k\|) = e_k^T \Phi e_k$ ,  $\Phi$ 为正定对称矩阵,显然 $\alpha_x$ 是 $K_\infty$ 类函数, $\alpha_u$ 是 $K$ 类函数。引理1的ISS稳定条件变为

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k \leq -x_k^T \Phi x_k + \lambda^2 e_k^T \Phi e_k \quad (18)$$

为方便化简,令 $G = A + BK$ ,  $z_k^T = [x_k^T \ e_k^T]$ 将式(8)代入到式(18)得

对式(20)分别左乘和右乘 $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, I, I, I)$ 进行矩阵线性化, 令 $\bar{P} = P^{-1}$ ,  $\bar{Q} = P^{-1}\Phi P^{-1}$ 代入到式(20), 可得矩阵不等式(16)。

同时, 当 $\theta < 0$ 时, 有下式成立

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_2 \mathbf{u}_k &< -(\Delta V(k) + \mathbf{x}_k^T \Phi \mathbf{x}_k) \\ -\gamma^2 \mathbf{e}_k^T \Phi \mathbf{e}_k &< -\Delta V(k) \end{aligned} \quad (21)$$

对式(21)从 $k=0$ 到 $k=\infty$ 求和可得

$$J < V(0) - V(\infty) = V(0) = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (22)$$

证毕。

**定理 2** 对于周期事件触发控制下的航空发动机分布式系统, 在给定常数 $\tau_1$ 、 $\tau_{21}$ 和 $\sigma$ ,  $H_\infty$ 性能指数 $\gamma$ , 控制增益矩阵 $\mathbf{K}$ 和触发矩阵 $\Phi$ , 闭环系统渐进稳定的充分条件: 存在对称正定矩阵 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{S}_1$ 、 $\mathbf{S}_2$ 、 $\mathbf{Q}_1$ 和 $\mathbf{Q}_2$ , 适维矩阵 $\mathbf{N}_{12}$ , 使得线性矩阵不等式(23)和式(24)成立。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^T & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} V(t) = & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{M} \mathbf{x}(t) + \tau_1 \int_{-\tau_1}^t \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha d\theta + \int_{t-\tau_1}^t \mathbf{x}^T(\alpha) \mathbf{S}_1 \mathbf{x}(\alpha) d\alpha + \\ & \int_{t-\tau_2}^t \mathbf{x}^T(\beta) \mathbf{S}_2 \mathbf{x}(\beta) d\beta + (\tau_2 - \tau_1) \int_{-\tau_2}^{t-\tau_1} \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha d\theta \end{aligned} \quad (25)$$

为方便化简, 令 $\tau_{21} = \tau_2 - \tau_1$ ,  $\chi^T(t) = [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}^T(t-\tau(t)) \quad \mathbf{x}^T(t-\tau_1) \quad \mathbf{x}^T(t-\tau_2) \quad \mathbf{e}^T(i_k h) \mathbf{w}^T(t)]$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau_1) \mathbf{S}_1 \mathbf{x}(t-\tau_1) - \mathbf{x}^T(t) \mathbf{S}_2 \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-\tau_2) \mathbf{S}_2 \mathbf{x}(t-\tau_2) + \\ & \tau_1^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) - \tau_1 \int_{t-\tau_1}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha - \tau_{21}^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{x}}(t) - \\ & \tau_{21} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha - \tau_{21} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

利用 Jensen 不等式<sup>[18]</sup> 和倒凸不等式<sup>[19]</sup> 对式(26)中的积分项进行处理

$$-\int_{t-\tau_1}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_1 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \leq -\frac{1}{\tau_1} \chi^T(t) [(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) \mathbf{Q}_1 (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)^T] \chi(t) \quad (27)$$

$$-\int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha - \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Q}_2 \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \leq -\frac{\tau_{21}}{\tau(t) - \tau_1} \chi^T(t) \cdot$$

$$\{(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \mathbf{Q}_2 (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)^T\} \chi(t) - \frac{\tau_{21}}{\tau_2 - \tau(t)} \chi^T(t) \{(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4) \mathbf{Q}_2 (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4)^T\} \chi(t) \leq \quad (28)$$

$$\chi^T(t) \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_3^T - \mathbf{e}_2^T)^T \\ (\mathbf{e}_2^T - \mathbf{e}_4^T)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{N}_{12} \\ * & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4) \end{bmatrix} \right\} \chi(t)$$

式中 $\mathbf{e}_i$ 为6维列向量, 满足第 $i$ 个元素为 $\mathbf{I}$ , 其余元素为0。在 $t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1})$ , 触发机制满足下式:

$$\mathbf{e}^T(i_k h) \Phi \mathbf{e}(i_k h) < \sigma \mathbf{x}^T(i_k h) \Phi \mathbf{x}(i_k h) \quad (29)$$

则有

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \mathbf{0} & \psi_{15} & \psi_{16} & \mathbf{A}_c^T \bar{\mathbf{G}} \\ * & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} & \psi_{25} & \mathbf{0} & (\mathbf{B}_c \mathbf{K})^T \bar{\mathbf{G}} \\ * & * & \psi_{33} & \psi_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \psi_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & \psi_{55} & \mathbf{0} & (\mathbf{B}_c \mathbf{K})^T \bar{\mathbf{G}} \\ * & * & * & * & * & \psi_{66} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\mathbf{G}} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (24)$$

式中 $\psi_{11} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{A}_c + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{Q}_1 + \mathbf{C}^T \mathbf{C}$

$$\psi_{12} = \mathbf{M} \mathbf{B}_c \mathbf{K}, \quad \psi_{13} = \mathbf{Q}_1, \quad \psi_{15} = \mathbf{M} \mathbf{B}_c \mathbf{K}$$

$$\psi_{16} = \mathbf{M} \mathbf{D}, \quad \psi_{22} = -2\mathbf{Q}_2 + \mathbf{N}_{12} + \mathbf{N}_{12}^T + \sigma \Phi$$

$$\psi_{23} = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{N}_{12}^T, \quad \psi_{24} = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{N}_{12}, \quad \psi_{25} = -\sigma \Phi$$

$$\psi_{33} = -\mathbf{S}_1 - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2, \quad \psi_{34} = \mathbf{N}_{12}, \quad \psi_{44} = -\mathbf{S}_2 - \mathbf{Q}_2$$

$$\psi_{55} = -\Phi + \sigma \Phi, \quad \psi_{66} = -\gamma^2, \quad \bar{\mathbf{G}} = \tau_1^2 \mathbf{Q}_1 + \tau_{21}^2 \mathbf{Q}_2$$

证明: 构造如下 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + \sigma \mathbf{x}^T(i_k h) \Phi \mathbf{x}(i_k h) - \\ \mathbf{e}^T(i_k h) \Phi \mathbf{e}(i_k h) \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

考虑闭环系统的 $H_\infty$ 性能, 在 $t \in [0, \infty)$ , 要求下式成立:

$$\int_0^\infty \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt \quad (31)$$

由式(26)~式(31)得

$$\dot{V}(t) \leq \chi^T(t) (\psi + H^T \bar{G} H) \chi(t) \quad (32)$$

式中  
 $H^T = [A_c^T \quad (B_c K)^T \quad 0 \quad 0 \quad (B_c K)^T \quad 0]^T$ 。

当  $\psi + H^T \bar{G} H < 0$  时, 闭环系统渐进稳定, 等效于式(24)。

证毕。

### 3 触发机制与控制器协同设计

**推论 1** 对于周期事件触发控制下的航空发动机分布式系统, 当不考虑时延影响时, 在给定的目标函数  $J$  约束下, 如果存在对称正定矩阵  $\bar{P}$  和  $\bar{Q}$ , 矩阵  $\bar{W}$ , 使得下式有可行解:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} - \bar{P} & 0 & \bar{P}A + \bar{W}B^T & \bar{P} & \bar{W} \\ * & -\lambda^2 \bar{Q} & \bar{W}B^T & 0 & \bar{W} \\ * & * & -\bar{P} & 0 & 0 \\ * & * & * & -R_1^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -R_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

则使得系统稳定的控制器  $K = (\bar{P}^{-1} \bar{W})^T$ , 触发机制  $\Phi = \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-1}$ 。

证明: 令式(16)中的  $\bar{P}K^T = \bar{W}$  即可证明。

此外, 文献[14]已经证得, 在上述触发机制下, 保证系统稳定能够取得的最大触发参数  $\sigma = 1/\lambda_{\min}$ , 其中  $\lambda_{\min}$  为保证定理 1 成立时的  $\lambda$  最小取值, 则  $\lambda \geq \lambda_{\min}$ 。为了保证成本函数  $J$  最小, 触发机制与保成本容错控制器的求解问题可转化为

$$\min_P [x^T(0) P x(0)], \quad \text{s.t.} \begin{cases} P > 0 \\ \Theta < 0 \end{cases} \quad (34)$$

为获得保成本控制器与触发机制, 采用下列算法进行求解, 具体步骤如下:

1) 给定加权对称矩阵  $R_1$  和  $R_2$ , 求解保证系统稳定时最小的  $\lambda_{\min}$ , 令  $\lambda_0 = \lambda_{\min}$ , 求解此时的成本函数  $J_0$ , 设置参数  $\lambda$  的搜索步长为 0.01, 上界为 10。

2) 令  $\lambda_{i+1} = \lambda_i + 0.01 (i = 0, 1, \dots)$ , 求解此时的成本函数  $J_{i+1}$ 。

3) 重复步骤 2), 直至  $\lambda$  的取值达到上界, 比较  $J_j (j = 0, 1, 2, \dots)$ , 得到成本函数的最小值  $J^*$ , 及其对应触发机制  $\Phi$ , 控制器增益  $K$ 。

用所求的最优控制器  $K$  和触发机制  $\Phi$  对航空发动机分布式系统进行周期事件触发控制, 考虑时延对系统性能的影响, 通过定理 2 验证时延下闭环系统的稳定性。调整  $\tau_1$  和  $\tau_{21}$ , 求解事件触发机制下闭环系统稳定所允许的时延上界  $\tau_{\max}$ 。

### 4 仿真及结果分析

选择某型航空发动机工作于地面最大慢车状态的小偏离状态空间模型, 飞行高度  $H = 0$  km, 马赫数为  $Ma = 0$ , 其中

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} -9.63881 & 9.24255 \\ -0.01427 & -4.07947 \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} 1.20575 & 2.17451 \\ 0.66211 & 0.37278 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

采用 CAN(controller area network)总线进行通信, 设置事件触发器的采样周期  $h = 20$  ms。给定矩阵  $R_1 = \text{diag}(2, 2)$ ,  $R_2 = \text{diag}(1, 3)$ , 状态初值  $x^T(0) = [1 \quad 2]^T$ 。保证定理 1 成立的前提下, 求得当  $\lambda = 2.45$  时, 成本函数  $J$  取得最小值, 此时最优的触发机制与控制器增益分别为

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 1.5485 & 0.2421 \\ 0.2421 & 1.5944 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} -0.2435 & -0.2692 \\ -0.1435 & -0.4815 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

分别取  $\lambda$  为 2.45 和 5, 在求解的触发机制和控制器作用下, 系统的状态响应曲线如图 4 所示, 其中  $t$  表示时间。从图中可以看出, 按照推论 1 求解的控制器和触发机制能够保证闭环系统渐进稳定, 同时系统具有较好的动态性能, 这也证实了定理 1 和推论 1 的正确性。相对于  $\lambda = 2.45$ , 当  $\lambda = 5$  时, 系统的调节时间变长, 收敛速度变慢, 系统的动态性能劣于最优控制器。

为验证周期事件触发机制的有效性, 分别取  $\sigma$  为 0、0.4 和 0.9, 设置仿真时间为 10 s, 在上述触发机制和控制器作用下, 系统的状态演化曲线、控制量调节曲线以及数据包传递曲线如图 5 所示。当  $\sigma = 0$  时, 触发机制失效, 系统等效于周期采样

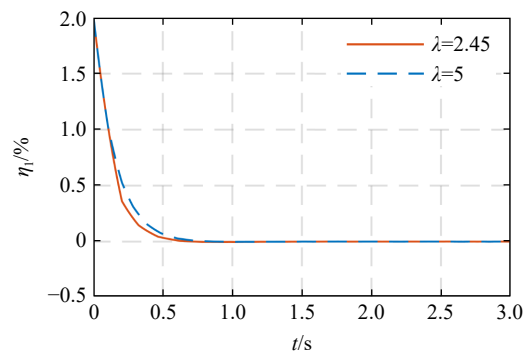


图 4 不同  $\lambda$  下状态响应曲线

Fig. 4 State response curve with different  $\lambda$

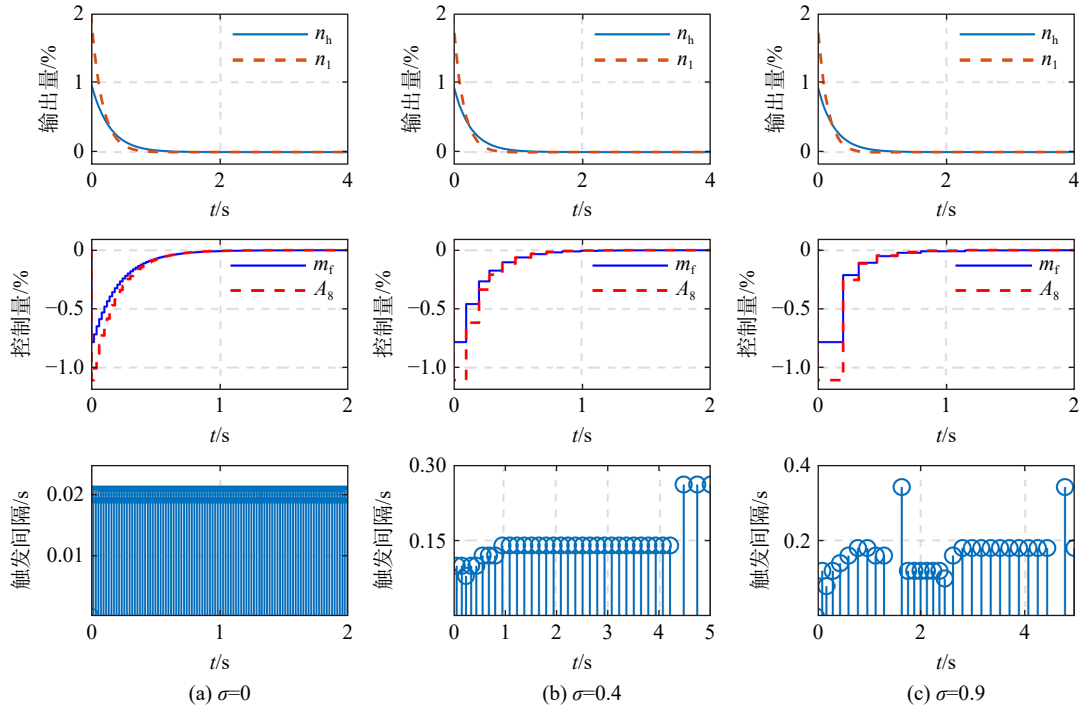


图 5 不同触发机制下系统的响应特性

Fig. 5 Response characteristics of system with different event-triggered mechanisms

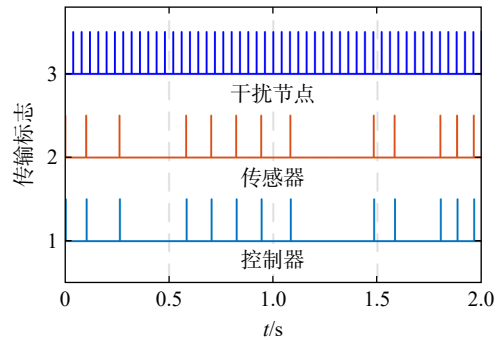
控制。忽略丢包的影响, 1 s 内传感器将通过总线网络发送 50 个数据包, 执行器频繁动作, 加速了设备的损耗; 引入周期事件触发控制, 在最优的触发机制和控制器作用下, 状态演化曲线是收敛的, 同时保持了较好的控制品质。不同触发机制下数据包的传输特性如表 1 所示。

表 1 不同触发机制下数据包传输特性

Table 1 Packet transmission characteristics with different event-triggered mechanisms

| $\sigma$ | 数据包数量 | 最大触发间隔/s | 资源节省率/% |
|----------|-------|----------|---------|
| 0        | 500   | 0.02     | 0       |
| 0.4      | 85    | 0.26     | 83      |
| 0.9      | 52    | 0.34     | 89.6    |

从表 1 和图 5 可以看出, 在周期事件触发控制下, 显著地减少了控制量的更新次数。随着  $\sigma$  的增加, 触发条件变得更加苛刻, 数据包的发送量逐渐减少, 当  $\sigma = 0.9$  时, 最大触发间隔达到了 0.34 s, 通信资源节省率为 89.6%。此时分布式控制系统各节点的网络调度如图 6 所示, 为便于显示, 本文仿真给出了 0~2 s 的网络调度图。图中的干扰节点表示与控制任务无关的通信节点, 高电平表示数据正在发送, 从中可以看出, 引入周期事件触发控制可以提升网络服务质量, 为其他

图 6  $\sigma = 0.9$  时的网络调度图Fig. 6 Network scheduling diagram with  $\sigma = 0.9$ 

节点提供了更多的通信资源, 从而降低了网络的丢包率和堵塞率, 同时也减少了执行器的动作次数, 提高了设备的使用寿命。

设定触发参数  $\sigma = 0.4$ , 时延下界  $\tau_l$  为 0.001, 在最优触发机制和控制器作用下, 利用定理 2 求解出系统所能允许的时延上界  $\tau_{\max}$  为 0.454。在最大时延作用下, 系统的零输入响应曲线如图 7 所示。由图 7 可知, 闭环系统在时延  $\tau_{\max}$  作用下是稳定的。随着时延的增加, 状态响应曲线的超调量增大, 调节时间变长, 劣化了系统的动态性能, 但闭环系统仍然能够保持稳定。

考虑外部噪声对系统的影响, 在上述控制器和触发机制作用下, 设定最大时延为 0.1, 给定  $H_\infty$  性能指标  $\gamma = 1.52$ , 定理 2 有可行解。取扰动矩阵

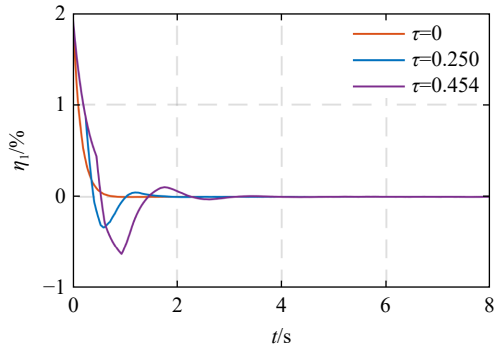


图 7 不同时延下的状态响应曲线

Fig. 7 State response curve with different time delays

$D = [0.54 \ 0.65]^T$ , 分别对系统施加如下的噪声  
①取值为 $[-0.5, 0.5]$ 的均匀分布信号; ②均值为 0、方差为 0.04 的高斯白噪声; ③正弦信号:  $0.1 \sin(2\pi t)$ , 系统的响应曲线如图 8 所示。从图中可以看出, 外部噪声的存在劣化了系统的响应特性。但是在给定的控制策略下, 外部噪声引起的信号偏差可以限制在较小的范围内, 系统可以获得较好的干扰抑制特性。

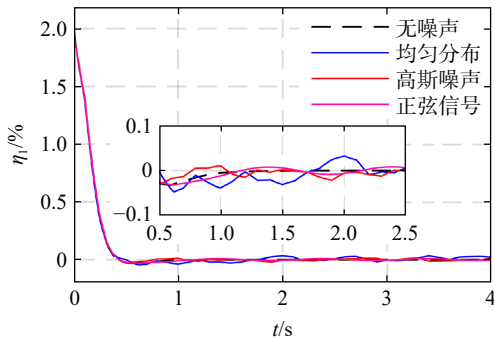
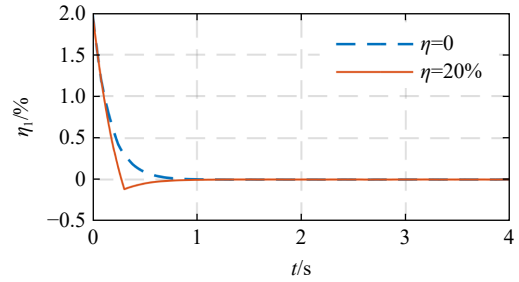


图 8 不同噪声下的响应曲线

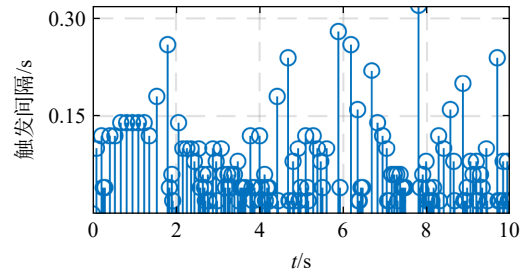
Fig. 8 State response curve with different noises

为检验航空发动机分布式系统在丢包下的稳定性, 设置网络传输丢包率 $\eta$ 为 20%, 周期事件触发控制下, 闭环系统的状态响应曲线和事件触发情况如图 9 所示。从图中可以看出, 丢包劣化了系统的响应特性, 使状态演化曲线产生了超调, 同时曲线的平滑性变差, 但是闭环系统仍然保持了较好的稳定性。主要原因是: 事件触发器周期采样进行触发判断, 当满足触发条件的数据传输过程中发生丢包时, 状态误差与状态量之间的差异会不断变大。因此, 在相近的采样时刻会继续满足触发条件, 进行数据包的传输, 直至系统的状态量和控制量成功更新。

在本例中, 取 $\sigma = 0.4$ , 仿真时间为 10 s, 网络



(a) 状态响应曲线



(b) 事件触发情况

图 9 丢包率为 20% 时系统的响应特性

Fig. 9 State response curve with packet loss rate of 20%

发生丢包时, 事件触发的次数为 139 次, 成功传输的数据包量为 118。与表 1 相比, 可以看出, 网络丢包的发生增加了触发的次数, 从而提升了成功发送的数据包总量, 进而保证系统的稳定性。但是, 随着 $\sigma$ 的增加, 丢包对系统稳定性的影响会加重。因此, 触发参数的选择要综合考虑控制性能、网络资源和工作环境的影响。从以上分析可知, 在本文协同设计的事件触发机制与保成本控制器作用下, 航空发动机分布式系统具有较强的稳定性, 同时对于时延和丢包具有较好的鲁棒性。

## 5 结 论

本文针对国内某型涡扇发动机分布式系统开展周期事件触发控制研究, 主要成果如下:

1) 为平衡通信受限网络的服务质量与控制品质, 将周期事件触发控制引入到航空发动机分布式控制系统中, 并给出周期事件触发控制下闭环系统的稳定性判据。

2) 给出了事件触发机制与保成本控制器的协同设计方案, 在保证系统良好控制品质的同时, 显著地减少了通信资源的占用, 有效地改善了网络的服务质量。

3) 设计的触发机制和控制器对于时延和丢包具有较强的鲁棒性, 可以减少执行器的动作次数, 提高设备的使用寿命, 同时易于实现。

## 参考文献:

- [1] 李睿超, 郭迎清, 姜彩虹, 等. 航空发动机分布式控制系统时延/丢包鲁棒性分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(6): 1441-1446.  
LI Ruichao, GUO Yingqing, JIANG Caihong, et al. Transmission delay/packet dropout robustness analysis of distributed control system of aero-engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(6): 1441-1446. (in Chinese)
- [2] 张乐迪, 谢寿生, 张驭, 等. 航空发动机分布式控制系统动态输出反馈鲁棒 $H_\infty$ 容错控制[J]. 航空动力学报, 2018, 33(6): 1519-1527.  
ZHANG Ledì, XIE Shousheng, ZHANG Yu, et al. Dynamic output feedback robust  $H_\infty$  fault tolerant control for aero-engine distributed control system[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(6): 1519-1527. (in Chinese)
- [3] 孙志岩. 航空发动机控制系统发展概述[J]. 测控技术, 2019, 38(6): 1-4.  
SUN Zhiyan. Overview of the development of aero-engine control system[J]. Measurement & Control Technology, 2019, 38(6): 1-4. (in Chinese)
- [4] HEEMELS W, SANDEE J. Analysis of event-driven controllers for linear systems[J]. International Journal of Control, 2008, 81(4): 571-590.
- [5] 杨飞生, 汪璟, 潘泉. 基于事件触发机制的网络控制研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 969-977.  
YANG Feisheng, WANG Jing, PAN Quan. A survey of networked event-triggered control[J]. Control and Decision, 2018, 33(6): 969-977. (in Chinese)
- [6] YUAN G E, LIU Zhenan, CHEN Qigong, et al. Stability of networked control systems with communication constraints[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(3): 266-271.
- [7] 王俊波, 胥布工. 资源受限的网络控制系统调度[J]. 控制与决策, 2008, 23(5): 551-559.  
WANG Junbo, XU Bugong. Scheduling of networked control systems under resource constraints[J]. Control and Decision, 2008, 23(5): 551-559. (in Chinese)
- [8] ZHANG Xianming, HAN Qinglong, ZHANG Baolin. An overview and deep investigation on sampled-data-based event-triggered control and filtering for networked systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 13(1): 4-16.
- [9] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [10] ZHANG Xianming, HAN Qinglong. Event-triggered dynamic output feedback control for networked control systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(4): 226-234.
- [11] 陆佳杰, 樊渊, 刘天龙. 基于事件触发优化的鲁棒 $H_\infty$ 控制[J]. 控制工程, 2021, 28(4): 751-758.  
LU Jiajie, FAN Yuan, LIU Tianlong. Robust  $H_\infty$  control based on event-triggered optimization[J]. Control Engineering of China, 2021, 28(4): 751-758. (in Chinese)
- [12] HEEMELS W, DONKERS M, TEEL A R. Periodic event-triggered control based on state feedback[C]// Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference(CDC/ECC). Orlando, US: IEEE, 2011: 2571-2576.
- [13] HEEMELS W, DONKERS M, TEEL A R. Periodic event-triggered control for linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(4): 847-861.
- [14] 李国梁, 张合新, 扈晓翔, 等. 状态反馈周期事件触发控制系统设计[J]. 电光与控制, 2016, 23(11): 23-26, 102.  
LI Guoliang, ZHANG Hexin, HU Xiaoxiang, et al. Design of state feedback periodic event triggered control systems[J]. Electronics Optics & Control, 2016, 23(11): 23-26, 102. (in Chinese)
- [15] HEEMELS W P M H, DONKERS M C F. Model-based periodic event-triggered control for linear systems[J]. Automatica, 2013, 49(3): 698-711.
- [16] 王磊, 谢寿生, 彭靖波, 等. 双目标约束下的航空发动机分布式控制系统最优保成本容错控制[J]. 航空动力学报, 2014, 29(7): 1729-1737.  
WANG Lei, XIE Shousheng, PENG Jingbo, et al. Optimal guaranteed cost fault-tolerant control with bi-index constraints for aero-engine distributed control system[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(7): 1729-1737. (in Chinese)
- [17] 王磊, 谢寿生, 苗卓广, 等. 具有网络调度的航空发动机分布式控制系统协同容错控制[J]. 推进技术, 2018, 39(5): 1164-1170.  
WANG Lei, XIE Shousheng, MIAO Zhuoguang, et al. Collaborative fault tolerant control for aero-engine distributed control system with network scheduling[J]. Journal of Propulsion Technology, 2018, 39(5): 1164-1170. (in Chinese)
- [18] PENG Chen, YANG Taicheng. Event-triggered communication and  $H_\infty$  control co-design for networked control systems[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1326-1332.
- [19] PARK P, KO J W, JEONG C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.

(编辑: 王碧琚)