

文章编号: 1000-8055(2023)11-2583-08

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20210378

三维曲面边界层的简化线性稳定性理论

涂国华¹, 赵磊², 万兵兵^{1,2}, 陈曦¹, 李晓虎¹, 陈坚强¹

(1. 中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000;
2. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072)

摘 要: 分析了贴体曲线正交坐标系下线性化小扰动方程(LPEs)中各曲率项的量级, 结果显示大部分曲率项都是高阶小量。通过忽略这些高阶小量, 得到了贴体曲线正交坐标系下的简化版小扰动方程。简化版小扰动方程不需要繁琐推导, 可直接来源于笛卡尔坐标系下的小扰动方程的简单拓展, 方便初学者使用。基于简化版的小扰动方程, 发展出了能适用于三维曲面边界层的简洁形式的线性稳定性理论(LST)。针对亚声速后掠翼边界层的稳定性, 简洁形式 LST 预测的横流失稳增长率与完整形式 LST 结果的绝对偏差小于 4×10^{-5} ; 针对高超声速尖锥边界层的稳定性, 简洁形式 LST 精确预测了周向曲率对 Mack 模态中性曲线的影响。数值结果表明简洁形式的 LST 拥有与完整形式的 LST 几乎相同的精确度。

关 键 词: 线性稳定性理论; 边界层转捩; 三维边界层; 曲面边界层; 线性扰动方程

中图分类号: V411.3; O354.4

文献标志码: A

Simplified linear stability theory for boundary layer of three-dimensional curved surface

TU Guohua¹, ZHAO Lei², WAN Bingbing^{1,2}, CHEN Xi¹, LI Xiaohu¹, CHEN Jianqiang¹

(1. State Key Laboratory of Aerodynamics,

China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China;

2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The magnitude orders of the terms of the linearized perturbation equations (LPEs) in body-fitted three-dimensional curvilinear orthogonal coordinates were analyzed. Results showed that most of the curvature-related terms were represented by high-order small quantities. The LPEs in body-fitted curvilinear orthogonal coordinates were greatly simplified by neglecting the high-order small quantities, which resulted in the simplified LPEs. The tedious derivation of the fully LPEs in curvilinear orthogonal coordinates was no longer needed. The simplified LPEs can be easily obtained by extending the Cartesian LPEs to body-fitted curvilinear orthogonal coordinates for the convenience of beginners. The simplified linear stability theory (LST) suitable for boundary layers with surface curvatures was developed based on the simplified LPEs. The accuracy of the simplified LST was validated in the boundary layers on the curved surfaces of a subsonic sweep wing and a hypersonic sharp-nose cone. For the former, the growth rate of crossflow instability predicted by the simplified LST deviated from the result predicted by the full form LST less than 4×10^{-5} ; for the later, the simplified LST accurately predicted the effect of circumferential curvature on the neutral line of the Mack mode. Numerical results showed that the simplified LST had almost the same accuracy with the full form LST.

收稿日期: 2021-07-18

作者简介: 涂国华(1977—), 男, 研究员、博士生导师, 博士, 研究方向为流动稳定性与转捩、高阶精度格式和高超声速复杂流动模拟。

通信作者: 赵磊(1987—), 男, 副教授、博士生导师, 博士, 研究方向为流动稳定性与边界层转捩。E-mail: lei_zhao@tju.edu.cn

引用格式: 涂国华, 赵磊, 万兵兵, 等. 三维曲面边界层的简化线性稳定性理论[J]. 航空动力学报, 2023, 38(11): 2583-2590. TU Guohua, ZHAO Lei, WAN Bingbing, et al. Simplified linear stability theory for boundary layer of three-dimensional curved surface[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(11): 2583-2590.

Keywords: linear stability theory; boundary layer transition; three-dimensional boundary layer; curved boundary layer; linear perturbation equations

航空航天飞行器通常会遇到层流与湍流之间的转换,转换对摩擦阻力、热交换速度、物质掺混速度和流致噪声强度等产生数倍影响^[1]。线性稳定性理论(LST)是研究流动稳定性和转换问题的最有效、最广泛的工具之一,也是边界层转换 e^N 预测方法的重要基础^[1-3]。早期,LST 主要用于研究不可压缩流动的稳定性及转换问题^[4]。近年来,LST 已经用于研究可压缩气体^[5-6]和高温真实气体的稳定性和转换问题^[7-8],甚至用于发展边界层转换控制技术^[9-11]。

LST 是在小扰动假设与准平行流假设的基础上建立起来的,在扰动方程的推导过程中,首先基于小扰动假设忽略扰动的非线性作用,可以得到线性化的扰动方程,然后采用准平行流假设,将扰动表示为行波的形式,从而把偏微分形式的扰动方程转换成常微分形式的控制方程,给定合适的边界条件形成特征值问题,通过数值方法快速求解。

LST 通常与贴体曲线正交坐标系结合使用,可以对几乎所有的表面变化平缓的二维和三维附着边界层进行稳定性分析。LST 的贴体曲线正交坐标系通常要求一条坐标线与物面平行(流向),另一条坐标线与物面垂直(法向),然后第三条坐标线(展向)通过右手法则给定。但是,曲线正交坐标系有拉梅系数。物理外形不同,拉梅系数不同;空间位置不同,拉梅系数也可能不同。所以,在贴体三维曲线正交坐标系下的小扰动方程非常复杂,公开文献中缺乏现成的同时包含流向及展向曲率的公式可供使用(文献中常见仅包含一个方向曲率的公式)。若直接在贴体曲线正交坐标系推导小扰动方程,势必异常繁琐且容易出错。

早期的研究工作也曾尝试忽略壁面曲率的影响,但即使对于简单的翼型,忽略壁面曲率也会使增长率计算结果偏大^[12]。再如,只有考虑凹壁面的曲率才能发现 Görtler 涡失稳^[13]。可见,贴体三维曲线正交坐标系所表达的曲率效应对边界层稳定性有重要的影响。考虑到全三维曲线正交坐标系下推导方程的复杂性,许多研究者通常仅考

虑一个方向的曲率,比如梁贤^[14]给出的考虑展向曲率的稳定性方程,任杰等^[13]和徐国亮^[15]给出的考虑流向曲率的稳定性方程。

流体力学工程应用中遇到的流动稳定性和转换问题通常是全三维的,不考虑曲率或仅考虑一个方向的曲率都有可能导致严重错误。但是,全三维外形的小扰动方程非常复杂,基于小扰动方程建立起来的 LST 和 e^N 方法也非常复杂,LST 和 e^N 方法的程序代码编写难度大。因此,三维壁面固有的复杂性导致 LST 和 e^N 方法的入门难度大、学习过程长、使用不方便等,成为少数专业人士的专有特长,严重阻碍了 LST 及 e^N 方法在工程中的推广应用。

与曲线正交坐标系不同,笛卡儿坐标系下的小扰动方程相对简单,能够在一些公开文献中查到,比如文献[16]。若能直接在笛卡儿坐标系下的小扰动方程的基础上,通过简单变换就获得全三维曲面边界层的 LST 方程,势必为没有全三维 LST 工具的研究人员带来极大方便。

本文通过量纲分析,通过忽略贴体曲线正交坐标系下的高阶小量,但仍然抓住表面曲率对稳定性的主要贡献,大大简化贴体曲线正交坐标系下的小扰动控制方程,推导出一种简洁的适合三维曲面边界层的线性稳定性分析方法。

1 线性稳定性方程

1.1 笛卡儿坐标系下的小扰动方程

在推导贴体曲线正交坐标系下的小扰动方程前,先简单回顾笛卡儿坐标系下的小扰动方程,这也是本文的基础。

将流场物理量写为基本流与扰动的叠加,即:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}' \quad (1)$$

其中 $\mathbf{q}_0 = (\rho_0, u_0, 0, w_0, T_0)^T$ 为忽略了法向速度的基本流, $\mathbf{q}' = (\rho', u', v', w', T')^T$ 为小扰动。将式(1)代入笛卡儿坐标系下的 Navier-Stokes 方程,减去基本流满足的方程,并忽略非线性项,所得的线性扰动方程可以表示成如下形式:

$$\left(\Gamma \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{D} + \mathbf{V}_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{V}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathbf{V}_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{V}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \mathbf{V}_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \mathbf{V}_{xz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{q}' = 0 \quad (2)$$

系数矩阵 Γ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{V}_{xx}$ 、 $\mathbf{V}_{yy}$ 、 $\mathbf{V}_{zz}$ 、 $\mathbf{V}_{xy}$ 、

$\mathbf{V}_{yz}$ 、 $\mathbf{V}_{xz}$ 均为基本流 $\mathbf{q}_0$ 的函数,附录给出它们的具

体表达式。

1.2 三维曲线正交坐标系下的小扰动方程

考虑三维曲面边界层, 首先建立贴体曲线正交坐标系。为叙述方便, 此处贴体曲线正交坐标系依然记为 (x, y, z) 。 y 为壁面法向, x 和 z 分别为流向和展向。设壁面的流向及展向曲率半径分别

$$\left(\hat{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{B} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{C} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{D} + \hat{V}_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{V}_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \hat{V}_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \hat{V}_{xz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{q}' = 0 \quad (4)$$

方程(4)的系数矩阵除了与基本流有关, 还与曲率有关。方程(4)的系数矩阵远比方程(2)复杂, 这种复杂性主要体现在以下两个方面:

1) 方程(4)的系数矩阵比方程(2)多出非常多的非零元, 见式(7)及附录 2。

2) 方程(4)系数矩阵非零元的表达式都比方程(2)的复杂。

1.3 三维曲线正交坐标系下的简化版小扰动方程

LST 的一个基本假设是准平行流。准平行流假设的本质思想可以理解为量级分析, 即抓住问题的关键因素, 忽略高阶小量的影响。对于曲线正交坐标系, 同样可以通过忽略曲率产生的高阶小量, 以便既抓住曲率带来的关键影响, 又可以大大简化方程。

对方程(2)、方程(4)进行量级分析, 其中扰动 $\mathbf{q}'$ 的时间偏导数和空间偏导数是同一量级, 因此只需对方程(2)、方程(4)的系数矩阵进行量级分析。为了推导方便, 本小节中, 坐标的无量纲化及雷诺数的定义均以当地边界层名义厚度 δ 为参考长度。方程(2)的系数矩阵中包含两个量级的物理量, 即 1 和 ε 的量级, $\varepsilon \sim 1/Re$ 为与黏相关的小量; 方程中 ε 量级的物理量可以反映出黏性项对失稳机制的影响。方程(4)中除了包含 1 和 ε 量级的物理量外, 还包含上述与拉梅系数及其空间导数有关的新增项。新增项中 8 项与黏性无关, 属于对流项, 量级为 ε_1 、 ε_3 , 剩下的均属于黏性项, 量级为 $\varepsilon_1 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_3 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_1^2 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_3^2 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon$, 其中

$$\varepsilon_1 \sim \frac{1}{H_1} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1 + y} \quad \varepsilon_3 \sim \frac{1}{H_3} \cdot \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_3 + y} \quad (5)$$

除了一些特殊情况, 壁面曲率半径通常远大于边界层厚度, 即 $r_1 \gg 1$ 和 $r_3 \gg 1$ (注意: 此处指以名义边界层厚度无量纲化的曲率半径远大于 1); 因此 ε_1 和 ε_3 都为与曲率半径相关的小量。方程(4)中, 量级为 $\varepsilon_1 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_3 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_1^2 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_3^2 \varepsilon$ 、 $\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon$ 的项都代表比 ε 、 ε_1 、 ε_3 量级更小的高阶小量, 可以忽略。于是发现, 在壁面曲率半径通常远大于边界层厚度的前

为 r_1 、 r_3 , 则贴体曲线正交坐标系的流向、法向、展向的拉梅系数分别为:

$$H_1 = 1 + y/r_1 \quad H_2 = 1 \quad H_3 = 1 + y/r_3 \quad (3)$$

贴体曲线正交坐标系下的小扰动方程也可表示成与式(2)类似的形式:

提下, 所有因曲率而新增的黏性项都可以忽略。附录 2 给出了被忽略的黏性项。

忽略方程(4)系数矩阵中量级小于 ε 的高阶小量后, 小扰动方程便可以大大简化。方程中依然保留有 ε_1 、 ε_3 量级的与曲率有关的一阶小量, 已足以反映曲率对失稳机制的影响与修正。用上划线标记简化后的系数矩阵, 则包含曲率的简化系数矩阵与不考虑曲率的笛卡儿正交坐标系下的系数矩阵有如下简洁的变换关系:

$$\begin{cases} \bar{\Gamma} = \Gamma, \bar{A} = \frac{1}{H_1} A, \bar{B} = B, \bar{C} = \frac{1}{H_3} C \\ \bar{V}_{xx} = \frac{V_{xx}}{H_1^2}, \bar{V}_{yy} = V_{yy}, \bar{V}_{zz} = \frac{V_{zz}}{H_3^2} \\ \bar{V}_{xy} = \frac{V_{xy}}{H_1}, \bar{V}_{yz} = \frac{V_{yz}}{H_3}, \bar{V}_{xz} = \frac{V_{xz}}{H_1 H_3} \end{cases} \quad (6)$$

这一简洁形式的变换关系体现了曲率对直角坐标系小扰动方程中原有非零元的改变。此外, 因曲率而新增的 8 个对流项体现在系数矩阵 $\bar{D}$ 的 6 个非零元中, $\bar{D}$ 的其余非零元与 D 相同。记 $d_1 = \frac{1}{r_1 H_1}$, $d_3 = \frac{1}{r_3 H_3}$, 则

$$\begin{cases} \bar{D}_{13} = D_{13} + \rho_0 d_1 + \rho_0 d_3 \\ \bar{D}_{23} = D_{23} + \rho_0 u_0 d_1 \\ \bar{D}_{31} = D_{31} - u_0^2 d_1 - w_0^2 d_3 \\ \bar{D}_{32} = -2\rho_0 u_0 d_1 \\ \bar{D}_{34} = -2\rho_0 w_0 d_3 \\ \bar{D}_{43} = D_{43} + \rho_0 w_0 d_3 \end{cases} \quad (7)$$

可见, 对不考虑曲率的方程系数矩阵经过式(6)和式(7)的简单改变, 即可得到简洁形式的考虑曲率的小扰动方程的系数矩阵。

1.4 贴体正交坐标系下的稳定性方程

与笛卡儿坐标系类似, 在贴体坐标系下也采用准平行流假设, 可将小扰动写为行波的形式(为简便记, 本小节仍采用 x 、 y 、 z 表示贴体正交坐标系下的流向、法向、展向坐标):

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c. \quad (8)$$

其中 ω 为扰动的无量纲圆频率, α 、 β 为扰动的流

向及展向波数, $c.c.$ 为复数共轭。将式(8)带入简化后的扰动方程, 得:

$$\left(\widehat{\mathbf{D}} + \widehat{\mathbf{B}} \frac{\partial}{\partial y} + \overline{\mathbf{V}}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \widehat{\mathbf{q}} = 0 \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{D}} = -i\omega \overline{\mathbf{F}} + i\alpha \overline{\mathbf{A}} + i\beta \overline{\mathbf{C}} - \alpha^2 \overline{\mathbf{V}}_{xx} - \beta^2 \overline{\mathbf{V}}_{zz} - \alpha\beta \overline{\mathbf{V}}_{xz} + \overline{\mathbf{D}} \\ \widehat{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}} + i\alpha \overline{\mathbf{V}}_{xy} + i\beta \overline{\mathbf{V}}_{yz} \end{cases} \quad (10)$$

贴体曲线正交坐标系下的边界条件与笛卡儿坐标系完全类似, 可以根据物理问题给定边界条件, 例如对于无滑移等温壁面和远场边界, 可以取 $\widehat{u} = \widehat{v} = \widehat{w} = \widehat{T} = 0$ 。

前述分析已经指出, 小扰动方程的简化过程只忽略了小于 $\varepsilon \sim 1/Re$ 的高阶小量。实际工程问题中, 边界层失稳雷诺数(参考长度为 δ)通常为 $10^3 \sim 10^5$ 量级, 即 ε 为 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 量级。边界层名义厚度 δ 通常为毫米量级, 壁面曲率半径通常是厘米至米的量级, 所以式(5)所定义的 ε_1 和 ε_3 为 $10^{-1} \sim 10^{-3}$ 量级。简化版小扰动方程所有忽略的小量中, 量级最大的为 $\varepsilon_1 \varepsilon$ 和 $\varepsilon_3 \varepsilon$ 。与完整版相比, 简化版线化扰动方程在曲率半径较大的地方基本相同, 在曲率半径较小的地方差别有所增大。总之, 简化版线化扰动方程有效的前提是边界层厚度相对于曲率半径是小量。后续将数值验证该简洁形式的 LST 方程与完整形式的 LST 方程具有几乎相同的精度。

2 数值结果及验证

本文将采用两个算例验证简洁形式的 LST 方程与完整的 LST 方程具有几乎相同精度。第一个算例是亚声速后掠翼流动, 计算了横流驻波及行波失稳, 主要是检验流向曲率的影响。第二个算例是马赫数为 6 的高超声速尖锥流场, 计算了第一模态及第二模态的 T-S(Tollmien-Schlichting)波失稳, 主要是检验展向曲率的影响。

2.1 马赫数 0.8 的 NLF(2)-045 后掠翼

选用 NLF(2)-045 翼型, 来流马赫数为 0.8, 弦长雷诺数为 8.739×10^6 , 后掠角为 45° , 攻角为 -4° 。采用 OpenCFD-SC^[17] 计算层流基本流, 计算中采用 1mm 作为参考长度。有关基本流的详细信息见文献[18]和文献[19]。图 1 给出了翼型上表面的边界层名义厚度与壁面曲率半径的比值, 横向 x^*/c 表示以弦长无量纲化的弦向位置; 其中, 展向速度达到其远场值的 0.99 倍处定义为边界层的外缘。边界层名义厚度 δ_{99} 与壁面曲率半径 R 的

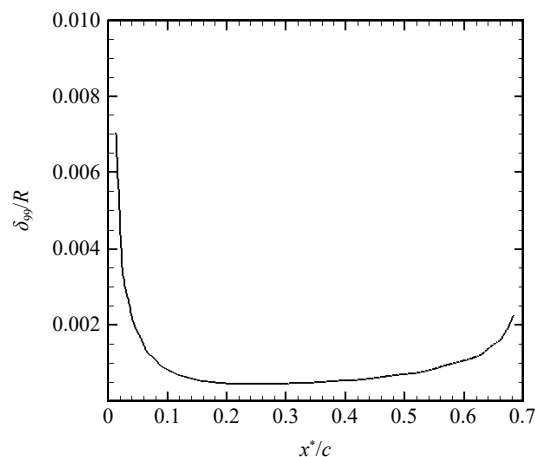


图 1 翼型上表面的边界层厚度与曲率半径的比值

Fig. 1 Ratio of boundary layer thickness to curvature radius for the upper surface of wing

比值 δ_{99}/R 在前缘处较大, 随后迅速减小到 0.001 的量级。在下文进行稳定性计算的最前沿位置 (0.013 倍弦长处), 其比值为 0.007, 可见壁面曲率确实是相对小量。

分别采用贴体曲线正交坐标系下完整的 LST 方程、简洁形式的 LST 方程及不考虑曲率的 LST 方程计算横流驻波及横流行波的增长率, 图 2 给出了不同方程的计算结果对比, 图 2(a) 为横流驻波的增长率 $-\alpha_i$ 沿弦向位置 x^*/c 的分布, 图 2(b) 为横流行波的结果; 计算时选择了增长率相对较大的扰动波参数。图中实线代表完整的 LST 方程计算的结果, 符号表示简洁形式的 LST 方程计算的结果, 虚线给出了不考虑曲率影响的计算结果; 图中 Δ 为简洁形式的 LST 所得结果与完整 LST 所得结果的绝对偏差。图 2 清楚地显示, 对于横流驻波及行波扰动, 简洁形式 LST 方程的计算结果与完整形式 LST 方程的结果符合很好, 绝对偏差 Δ 均小于 4×10^{-5} ; 因此简洁形式的 LST 方程所得结果已足够精确。忽略曲率后, 所得增长率明显偏大, 这与以往的认识一致。对于其他频率或展向波数的扰动也有类似的结论, 此处不再列举。

2.2 马赫数为 6 高超声速尖锥

参照文献[20]的计算参数计算了零攻角尖锥的层流基本流, 马赫数为 6, 静温为 63.3 K, 尖锥的球头半径为 1.27 mm, 半锥角为 5° 。文中第 2.2 节计算以球头半径为参考长度, 雷诺数为 32 500。

不稳定波的中性曲线可以直观展示不稳定波的频率及波数范围, 在稳定性分析中具有重要意义。选择距球头 0.46 m 处的基本流, 此位置的展向曲率为 0.024 mm。图 3 展示了在此位置由不

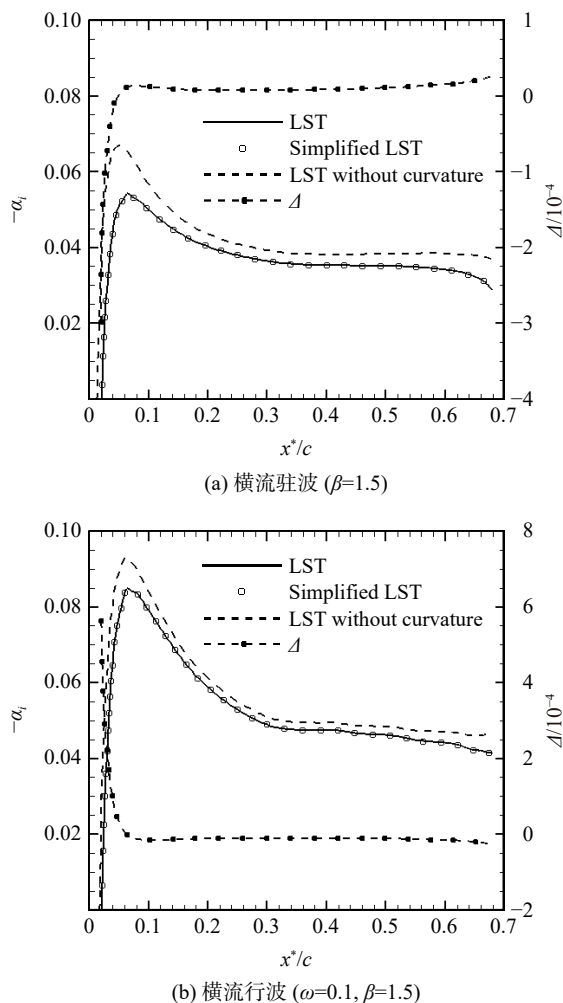


图 2 不同 LST 方程获得的横流扰动的增长率对比
Fig. 2 Comparisons of growth rates of crossflow disturbances obtained by different LST equations

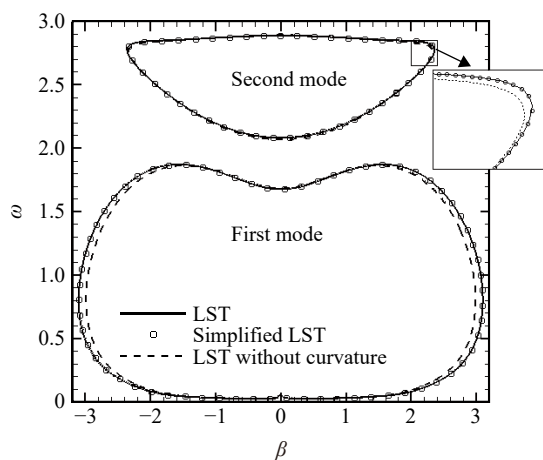


图 3 距球头 0.46 m 处第一模态与第二模态 T-S 波的中性曲线
Fig. 3 Neutral stability lines of first mode and second mode T-S wave at the location of 0.46 m away from the nose

同 LST 方程计算的第一模态与第二模态 T-S 波的中性曲线, ω 、 β 分别为扰动的频率和展向波数。图中清晰地显示简洁形式 LST 方程得到的结果与完整形式 LST 方程的结果非常符合, 而忽略展向曲率后所得结果存在一定的偏差。需要指出的是, 对于二维 T-S 波 (即图中 $\beta=0$), 三种结果几乎完全相同, 表明展向曲率对二维扰动波影响较小。

3 结 论

通过比较笛卡儿坐标系下的扰动方程和贴体曲线正交坐标系下的扰动方向, 发现因曲率带来的 56 项非零元中的 48 项属于黏性项, 8 项属于对流项。在边界层厚度远小于曲率半径的假设下, 这 48 项黏性项都是高阶小量。通过忽略高阶小量, 建立起了贴体曲线正交坐标系下的简化版的线性稳定性方程, 该方程的系数矩阵可通过笛卡儿坐标系下的系数矩阵的简单变换 (即式 (6) 和式 (7)) 获得, 大大降低了线性稳定性方程的复杂性。

从简化版的线性小扰动方程出发, 基于当地平行流假设, 建立起了一种简洁的线性稳定性方程。通过后掠翼流动中的横流驻波和行波, 以及高超声速尖锥流动中的第一、二模态算例, 验证了简洁形式的 LST 方程拥有与完整形式的 LST 方程几乎相同的精度。本文工作有利于笛卡儿坐标系下的 LST 及 e^N 方法在三维曲面边界层中的推广应用。

致 谢

感谢逯学志博士为本文提供了后掠翼层流基本流。

参考文献:

- [1] 陈坚强, 涂国华, 张毅锋, 等. 高超声速边界层转捩研究现状与发展趋势[J]. 空气动力学学报, 2017, 35(3): 311-337.
CHEN Jianqiang, TU Guohua, ZHANG Yifeng, et al. Hypersonic boundary layer transition: what we know, where shall we go[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2017, 35(3): 311-337. (in Chinese)
- [2] REED H L, SARIC W S, ARNAL D. Linear stability theory applied to boundary layers[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1996, 28: 389-428.
- [3] MACK L M. Boundary-layer linear stability theory[R]. AGARD SEE N84-33757 23-34, 1984.
- [4] 李宁, 罗纪生. 不可压平板边界层转捩机理[J]. 航空动力学报, 2013, 28(4): 743-751.
LI Ning, LUO Jisheng. Transition mechanism of an incompressible boundary layer on a flat plate[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(4): 743-751. (in Chinese)
- [5] 袁湘江, 李国良, 刘智勇, 等. 小攻角高超声速钝锥边界层

- 失稳特性[J]. 航空动力学报, 2011, 26(12): 2805-2811.
- YUAN Xiangjiang, LI Guoliang, LIU Zhiyong, et al. Study of the instability characteristic in the boundary layer of a hypersonic blunt cone at low angle of attack[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(12): 2805-2811. (in Chinese)
- [6] 袁湘江, 陆利蓬, 沈清, 等. 钝体头部边界层“逾越”型转捩机理研究[J]. 航空动力学报, 2008, 23(1): 81-86.
- YUAN Xiangjiang, LU Lipeng, SHEN Qing, et al. Study of bypass transition mechanisms in the boundary layer of blunt bodies[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(1): 81-86. (in Chinese)
- [7] 樊宇, 万兵兵, 韩宇峰, 等. 平衡空气模型的流动稳定性及转捩预测[J]. 航空动力学报, 2016, 31(7): 1658-1668.
- FAN Yu, WAN Bingbing, HAN Yufeng, et al. Hydrodynamic stability and transition prediction with the chemical equilibrium gas model[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(7): 1658-1668. (in Chinese)
- [8] 万兵兵, 韩宇峰, 樊宇, 等. 高温空气传输特性对边界层稳定性及转捩预测的影响[J]. 航空动力学报, 2017, 32(1): 188-195.
- WAN Bingbing, HAN Yufeng, FAN Yu, et al. Effect of transport properties of high-temperature air on boundary layer stability and transition prediction[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(1): 188-195. (in Chinese)
- [9] 郭启龙, 涂国华, 陈坚强, 等. 横向矩形微槽对高超边界层失稳的控制作用[J]. 航空动力学报, 2020, 35(1): 135-143.
- GUO Qilong, TU Guohua, CHEN Jianqiang, et al. Control of hypersonic boundary layer instability by transverse rectangular micro-cavities[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(1): 135-143. (in Chinese)
- [10] 赵俊波, 沈清, 张红军, 等. 基于T-S波谐频共振的超燃进气道边界层转捩[J]. 航空动力学报, 2010, 25(11): 2420-2424.
- ZHAO Junbo, SHEN Qing, ZHANG Hongjun, et al. Boundary transition research of scramjet inlet based on the Tollmien-Schlichting(T-S) wave syntyony[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(11): 2420-2424. (in Chinese)
- [11] 李瑾, 苏伟, 黄章峰, 等. 质量引射对边界层稳定性的影响[J]. 航空动力学报, 2020, 35(2): 280-293.
- LI Jin, SU Wei, HUANG Zhangfeng, et al. Effect of mass ejection on boundary layers stability[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(2): 280-293. (in Chinese)
- [12] HAYNES T S, REED H L. Simulation of swept-wing vortices using nonlinear parabolized stability equations[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 405: 325-349.
- [13] REN J, FU S. Secondary instabilities of Görtler vortices in high-speed boundary layer flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 781: 388-421.
- [14] 梁贤. 高超声速钝锥边界层稳定性特征[D]. 上海: 上海大学, 2010.
- LIANG Xian. Boundary layer stability characteristics of hypersonic flow over a blunt cone[D]. Shanghai: Shanghai University, 2010. (in Chinese)
- [15] 徐国亮. 三维边界层流动失稳与Bypass转捩模式研究[D]. 北京: 清华大学, 2011.
- XU Guoliang. Instability of three-dimensional boundary layers and modeling Bypass transition[D]. Beijing: Tsinghua University, 2011. (in Chinese)
- [16] 涂国华. 超音速边界层稳定性及其高阶激波捕捉格式研究[D]. 四川 绵阳: 中国空气动力研究与发展中心, 2008.
- TU Guohua. Stability analysis of supersonic boundary layers and high order shock-capturing schemes[D]. Mianyang Sichuan: China Aerodynamics Research and Development Center, 2008. (in Chinese)
- [17] LI X L, FU D X, MA Y W. DNS of compressible turbulent boundary layer around a sharp cone[J]. Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2008, 51(6): 699-714.
- [18] 逮学志, 赵磊, 罗纪生. 后掠翼边界层定常横流涡的非线性演化[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(10): 1073-1084.
- LU Xuezhi, ZHAO Lei, LUO Jisheng. Nonlinear evolution of stationary crossflow vortices in swept-wing boundary layers[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(10): 1073-1084. (in Chinese)
- [19] LU X Z, LUO J S. Applications of EPSE method for predicting crossflow instability in swept-wing boundary layers[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(7): 981-996.
- [20] KARA K, BALAKUMAR P, KANDIL O A. Effects of nose bluntness on hypersonic boundary-layer receptivity and stability over cones[J]. AIAA Journal, 2011, 49(12): 2593-2606.

(编辑: 张 雪)

附录1 笛卡儿坐标系下完全气体的线性扰动方程的系数矩阵

只需给出方程(2)系数矩阵的非零元, 根据文中提供的变化关系式(6)和式(7), 可以方便地得到考虑曲率的简洁形式的线性扰动方程。 Γ 为比热比, μ_0 为动力黏度, κ_0 为导热系数, 方程(2)系数矩阵的非零元如下:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= 1, \Gamma_{22} = \rho_0, \Gamma_{33} = \rho_0, \Gamma_{44} = \rho_0, \Gamma_{51} = \frac{1-\gamma}{\gamma} T_0, \Gamma_{55} = \frac{1}{\gamma} \rho_0; \\ A_{11} &= u_0, A_{12} = \rho_0, A_{21} = \frac{T_0}{\gamma Ma^2}, A_{22} = \rho_0 u_0, A_{23} = -\frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, A_{25} = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}, A_{32} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, \\ A_{33} &= \rho_0 u_0, A_{35} = -\frac{\tau_0}{Re} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}, A_{44} = \rho_0 u_0, A_{51} = \frac{1-\gamma}{\gamma} T_0 u_0, A_{53} = -\frac{2(\gamma-1)\mu_0 Ma^2}{Re} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}, A_{55} = \frac{\rho_0 u_0}{\gamma}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{13} &= \rho_0, B_{22} = -\frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, B_{25} = -\frac{\tau_0}{Re} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}, B_{31} = \frac{T_0}{\gamma Ma^2}, B_{33} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, B_{35} = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}, \\
B_{44} &= -\frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, B_{45} = -\frac{\tau_0}{Re} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}, B_{52} = -\frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0}{Re} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}, B_{54} = -\frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0}{Re} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}, B_{55} = -\frac{2}{RePr} \cdot \frac{\partial \kappa_0}{\partial y}, \\
C_{11} &= w_0, C_{14} = \rho_0, C_{22} = \rho_0 w_0, C_{33} = \rho_0 w_0, C_{34} = \frac{2}{3Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, C_{35} = -\frac{\tau_0}{Re} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}, C_{41} = \frac{T_0}{\gamma Ma^2}, \\
C_{43} &= -\frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, C_{44} = \rho_0 w_0, C_{45} = \frac{\rho_0}{\gamma Ma^2}, C_{51} = \frac{1-\gamma}{\gamma} T_0 w_0, C_{53} = -\frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0}{Re} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}, C_{55} = \frac{\rho_0 w_0}{\gamma}, \\
D_{11} &= \frac{\partial w_0}{\partial z}, D_{13} = \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, D_{23} = \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}, D_{25} = -\frac{1}{Re} \left(\tau_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y} \right), D_{31} = \frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial y}, \\
D_{35} &= \frac{1}{\gamma Ma^2} \cdot \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, D_{43} = \rho_0 \frac{\partial w_0}{\partial y}, D_{45} = -\frac{1}{Re} \left(\tau_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), D_{53} = \frac{\rho_0}{\gamma} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{1-\gamma}{\gamma} T_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y}, \\
D_{54} &= \frac{\rho_0}{\gamma} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial z}, D_{55} = -\frac{(\gamma-1)Ma^2\tau_0}{Re} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]; \\
V_{xx}(2,2) &= -\frac{4}{3} \cdot \frac{\mu_0}{Re}, V_{xx}(3,3) = -\frac{\mu_0}{Re}, V_{xx}(4,4) = -\frac{\mu_0}{Re}, V_{xx}(5,5) = -\frac{\kappa_0}{RePr}, \\
V_{yy}(2,2) &= -\frac{\mu_0}{Re}, V_{yy}(3,3) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\mu_0}{Re}, V_{yy}(4,4) = -\frac{\mu_0}{Re}, V_{yy}(5,5) = -\frac{\kappa_0}{RePr}, \\
V_{zz}(2,2) &= -\frac{\mu_0}{Re}, V_{zz}(3,3) = -\frac{\mu_0}{Re}, V_{zz}(4,4) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\mu_0}{Re}, V_{zz}(5,5) = -\frac{\kappa_0}{RePr}, \\
V_{xy}(2,3) &= -\frac{\mu_0}{3Re}, V_{xy}(3,2) = -\frac{\mu_0}{3Re}; \\
V_{xz}(2,4) &= -\frac{\mu_0}{3Re}, V_{xz}(4,2) = -\frac{\mu_0}{3Re}; \\
V_{yz}(3,4) &= -\frac{\mu_0}{3Re}, V_{yz}(4,3) = -\frac{\mu_0}{3Re};
\end{aligned}$$

其中 $\tau_0 = \mu_0 \left(\frac{3}{2T_0} - \frac{1}{T_0 + T_c} \right)$, T_c 为 Sutherland 参考温度与来流温度的比值。

附录 2 与拉梅系数及其空间导数有关的黏性项

在贴体曲线正交坐标系下扰动 Navier-Stokes 方程会出现拉梅系数及其 6 项空间导数项。由于体贴正交坐标系的法向拉梅系数为 1, 与此有关的两项拉梅系数的空间导数为零。为了简化推导过程, 假设曲率半径的空间变化量是小量(实际外形的曲率半径通常是缓慢变化的), 在此假设下, 又有两项拉梅系数的空间导数近似等于零。剩下两项拉梅系数的空间导数为:

$$d_1 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{1}{r_1}, d_3 = \frac{1}{H_3} \cdot \frac{1}{r_3}$$

由于线性稳定性理论采用了平均流假设, 因此所有物理量对流向 x 及展向 z 的偏导数均为零。与拉梅系数及其空间导数有关的黏性项为:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{23} &= -\frac{\mu_0}{3ReH_1}(7d_1 + d_3), \hat{A}_{32} = \frac{7\mu_0}{3ReH_1}d_1, \hat{A}_{35} = \frac{\tau_0 u_0}{ReH_1}d_1, \hat{A}_{53} = \frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0 u_0}{ReH_1}d_1; \\
\hat{B}_{22} &= -\frac{\mu_0}{Re}(d_1 + d_3), \hat{B}_{25} = \frac{\tau_0 u_0}{Re}d_1, \hat{B}_{33} = -\frac{4\mu_0}{3Re}(d_1 + d_3), \hat{B}_{44} = -\frac{\mu_0}{Re}(d_1 + d_3), \\
\hat{B}_{45} &= \frac{\tau_0 w_0}{Re}d_3, \hat{B}_{52} = \frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0 u_0}{Re}d_1, \hat{B}_{54} = \frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0 w_0}{Re}d_3, \hat{B}_{55} = -\frac{\kappa_0}{RePr}(d_1 + d_3); \\
\hat{C}_{34} &= \frac{7\mu_0}{3ReH_3}d_3, \hat{C}_{35} = \frac{\tau_0 w_0}{ReH_3}d_3, \hat{C}_{43} = -\frac{\mu_0}{3ReH_3}(d_1 + 7d_3), \hat{C}_{54} = \frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0 w_0}{Re}d_3; \\
\hat{D}_{22} &= \frac{\mu_0}{Re}\left(3d_1d_1 + d_1d_3 + \tau_0\frac{\partial T_0}{\partial y}d_1\right), \hat{D}_{23} = -\frac{\mu_0}{3Re}(4d_1 - 2d_3), \\
\hat{D}_{25} &= \frac{\tau_0}{Re}\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}d_1 + u_0\frac{\partial d_{12}}{\partial y} + u_0d_{12}(2d_1 + d_3) - u_0\frac{\partial \tau_0}{\partial y}d_1\right], \hat{D}_{32} = \frac{\tau_0\mu_0}{Re}d_1, \\
\hat{D}_{33} &= \frac{8\mu_0}{3Re}(d_1d_1 + d_3d_3) + \frac{2\tau_0}{3Re}\cdot\frac{\partial T_0}{\partial y}(d_1 + d_3), \hat{D}_{34} = \frac{\mu_0}{Re}d_3d_3, \hat{D}_{43} = \frac{1}{Re}\left[\mu_0\frac{\partial T_0}{\partial z}\left(-\frac{2}{3}d_1 + \frac{4}{3}d_3\right)\right], \\
\hat{D}_{44} &= \frac{1}{Re}\left[\mu_0(d_1d_3 + 3d_3d_3) + \tau_0\frac{\partial T_0}{\partial y}d_1\right], \hat{D}_{45} = \frac{1}{Re}\left[\tau_0\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}d_3 - w_0d_1 - 2w_0d_3\right) - w_0d_3\frac{\partial \tau_0}{\partial y}\right], \\
\hat{D}_{52} &= -\frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0 u_0}{Re}d_1d_1, \hat{D}_{54} = -\frac{2(\gamma-1)Ma^2\mu_0 w_0}{Re}d_3d_3, \\
\hat{D}_{55} &= \frac{2(\gamma-1)Ma^2\tau_0}{Re}(u_0d_1 + w_0d_3) - \frac{\kappa_0}{RePr}\cdot\frac{\partial T_0}{\partial y}(d_1 + d_3).
\end{aligned}$$