

考虑支承约束的航空发动机复杂转子振动特性

王龙凯^{1,2}, 王艾伦^{1,2}, 尹伊君^{1,2}, 衡星², 金淼², 张海彪³

- (1. 中南大学 轻合金研究院, 长沙 410083;
2. 中南大学 高性能复杂制造国家重点实验室, 长沙 410083;
3. 中国航发湖南动力机械研究所, 湖南 株洲 412002)

摘 要: 针对航空发动机转子复杂的结构特征及支承动力学设计问题, 基于有限元(FE)、分段线性拟合和自由度(DOF)降维法, 采用主子单元对复杂转子进行合理地等效, 构建了航空发动机等复杂转子-支承系统的动力学模型, 并对模型的有效性进行了试验验证。从转子固有特性、应变能分布、支承传递力和振动响应等方面对支承刚度进行了设计, 并开展了弹性支承并联挤压油膜阻尼器(SFD)非线性减振效率分析。结果表明: 动力学模型能较好地反映复杂转子的动力学特性, 支承刚度合适取值范围为 $1.5 \times 10^4 \sim 2.8 \times 10^4$ N/mm, 弹性支承并联 SFD 设计减振和降支承力效果显著, 满足临界转速设计准则、应变能约束条件和变形要求, 该研究为航空发动机支承刚度和 SFD 并联设计提供了定量的参考依据, 具有重要的工程应用价值。

关键词: 涡轴发动机; 转子系统; 挤压油膜阻尼器(SFD); 振动特性; 支承刚度; 动力学模型; 减振
中图分类号: V231.9; V235.12; TH113.1 **文献标志码:** A

Vibration characteristics of complex aero-engine rotors considering support constraints

WANG Longkai^{1,2}, WANG Ailun^{1,2}, YIN Yijun^{1,2}, HENG Xing²,
JIN Miao², ZHANG Haibiao³

- (1. Light Alloy Research Institute, Central South University, Changsha 410083, China;
2. State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing, Central South University, Changsha 410083, China;
3. Hunan Aviation Powerplant Research Institute, Aero Engine Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

Abstract: In view of the complex structural features and support with dynamic design problems for aero-engine rotors, based on finite element (FE), piecewise linear fitting and degree of freedom (DOF) reduction, the dynamic model of complex rotor-support system of the aero-engine was built by using the main and sub-units to reasonably equalize the complex rotor, and the validity of the modeling was verified through experiments. The supporting stiffness was designed from the aspects of rotor natural characteristics, strain energy distribution, supporting force and vibration response, and the nonlinear vibration reduction efficiency analysis of elastic support parallel squeeze film damper (SFD) was carried out. The results showed that the dynamic model can reflect the dynamic characteristics of complex rotors well. The appropriate range of support stiffness was $1.5 \times 10^4 \sim 2.8 \times 10^4$ N/mm, and the elastic support

收稿日期: 2021-08-20

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(2013CB035706); 中央高校基本科研业务费专项资金(2019zzts256)

作者简介: 王龙凯(1990—), 男, 博士生, 主要从事高端装备动力学及减振研究。E-mail: Longkai.Heat@hotmail.com

引用格式: 王龙凯, 王艾伦, 尹伊君, 等. 考虑支承约束的航空发动机复杂转子振动特性[J]. 航空动力学报, 2023, 38(4): 901-912. WANG Longkai, WANG Ailun, YIN Yijun, et al. Vibration characteristics of complex aero-engine rotors considering support constraints[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(4): 901-912.

parallel SFD design had a significant effect on reducing vibration and supporting force, which met the critical speed design, strain energy constraint and deformation requirement. It provides a quantitative reference basis for aero-engine supporting stiffness and SFD parallel design, which has important engineering application value.

Keywords: turboshaft engine; rotor system; squeeze film damper (SFD); vibration characteristics; support stiffness; dynamic model; vibration reduction

航空发动机是飞机“心脏”,转子系统振动特性对其性能和安全运转至关重要^[1-2]。航空发动机在运行期间,涡轮处高温、高压等复杂环境^[3]和来自机匣-支承的振动传递将引起支承动力特性发生变化,这会对转子固有特性产生影响,从而改变振动响应,甚至引发转子剧烈振动。随着改进改型和自主集成创新设计的不断深入,建立合理的航空发动机复杂转子的动力学模型并揭示支承约束变化下转子振动机理十分必要。

为尽量避免航空发动机工作期间异常振动的出现,转子系统振动特性一直是国内外研究热点。在航空发动机转子建模方面,陈果^[4]采用等截面梁单元建立了航空发动机双转子-中介轴承-机匣耦合动力学模型并开展了整机模态测试;罗贵火等^[5]以双转子试验器为例,采用模态综合法建立了中介轴承耦合的双转子动力学模型;王龙凯等^[6]针对高速涡轮增压转子,采用有限元法揭示了转子振动差异的起因;张大义等^[7]采用等截面梁单元公式推导了双转子运动控制方程;基于集中参数法^[8-9]和有限元法^[10],王龙凯等^[8-10]推导了典型盘式转子的运动控制方程;依据传统建模思想,Sinha^[11]将某涡扇发动机简化为典型的双转子,定性研究了涡扇发动机这类双转子的振动响应。在涡轴发动机转子动力学和支承效应方面,雷冰龙等^[3]采用 ANSYS 建立了某涡轴发动机转子三维实体有限元模型;基于模态相似准则,廖子豪等^[12]将某涡轴发动机燃气发生器转子(下文简称燃发转子)简化为光轴胀套多个刚性盘结构,设计了模拟转子试验台;考虑到静子柔性影响,邓旺群等^[13]采用 SAMCEF 构建了动力涡轮转子动力学模型并修正了支承刚度,基于此,唐虎标等^[14]研究了鼠笼刚度对燃气涡轮转子固有特性影响;通过三次函数模拟支承非线性,马艳红等^[15]研究了支承非线性下双盘转子不平衡响应。

现有关于航空发动机转子动力学特性方面研究主要针对这类具有中介轴承耦合的双转子航空发动机,且基本上将本质复杂的转子结构简化为光轴(等截面梁)与刚性盘关联结构,很少考虑转

子的具体结构特征和支承刚度设计值,而有关涡轴发动机燃发转子动力学的研究则更少;现有基于等截面梁单元的动力学模型难以表征具有复杂型面的变截面转子,基于 ANSYS 实体单元的动力学模型计算量大,所得结论或规律对实际工程指导有限。在航空发动机研制阶段,为满足各项动力学指标^[16],在结构布局和支点位置基本确定或受各因素约束导致无法大动的情况下,通常通过调整支承刚度以达预期设计目标;在发动机服役期间,支承长期处于高温^[3]、高频振动^[2]等复杂环境下,温升、疲劳裂纹或鼠笼条断裂均能弱化支承刚度。因此,建立能较好地表征转子复杂结构特征的动力学模型以揭示支承约束效应十分必要。

本文以典型的三级轴流压气机一级离心压气机+二级燃气涡轮+二级动力涡轮(记为 3A1C+2GT+2PT)结构布局的航空涡轴发动机为例,针对 3A1C+2GT 结构布局的燃发转子复杂的结构特点,采用主子单元结构法对复杂转子进行合理地等效,并对系统自由度进行降维与融合,构建了航空发动机等复杂转子-支承系统的动力学模型;不失一般性,通过仿真分析与试验结合对建模方法的有效性进行了验证,并揭示了涡轴发动机复杂转子系统的支承效应。

1 典型燃发转子结构及支承模型

典型 3A1C+2GT 结构布局的燃发转子结构如图 1 所示,该转子采用 1-0-1 支承及三级轴流加一

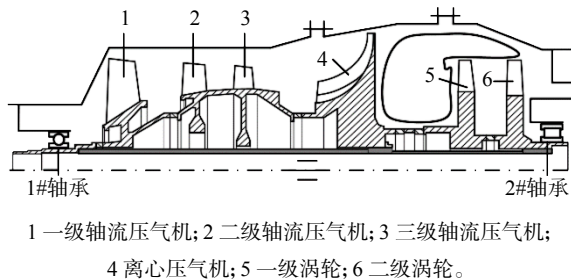


图 1 典型燃发转子结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of typical gas generator rotor

级离心压气机加二级燃气涡轮的结构型式; 1#和2#滚动轴承分别位于1#和2#弹性支承内部。

除转子自身刚度和质量分布以外, 支承刚度也是影响转子动力学特性的重要因素, 在设计时须重点考虑。燃发转子两端支承系统(图2(a))由滚动轴承、鼠笼式弹性支承和挤压油膜阻尼器构成, 支承刚度主要由弹性支承提供, 阻尼主要由挤压油膜提供。当转子高速转动时, 振动传递导致SFD轴颈涡动从而产生挤压油膜。如图2(b)所示, 弹性支承(定心弹簧)本身的刚度 K_t 和阻尼 C_t 与挤压油膜提供的刚度 K_d 和阻尼 C_d 互为并联关系^[17], 即 $K_s=K_t+K_d$ 、 $C_s=C_t+C_d$ 。

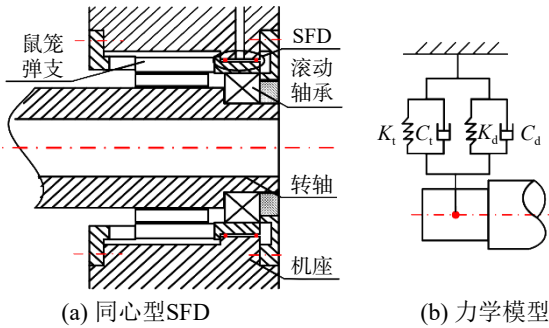


图2 SFD结构简图及力学模型

Fig. 2 Structural diagram and mechanical model of SFD

SFD运动关系如图3所示, SFD轴颈几何中心 O_j 的位置用极坐标 (e, ϕ) 表示, R_s 为阻尼器半径, F_r 和 F_t 分别为挤压油膜力的径向和切向分量, $xO_b y$ 为固定坐标系, θ^* 为最大油膜厚度起沿逆时针方向的角坐标, θ_1 为油膜压力起始角。

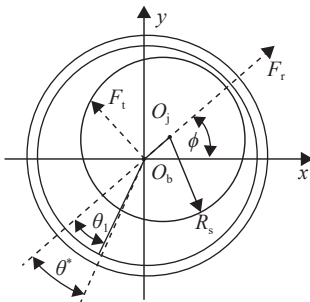


图3 挤压油膜力模型

Fig. 3 Squeeze oil-film force model

依据 π 油膜假设^[16,18], 推导出非线性挤压油膜力:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{\mu R_s L^3}{C^3} \left\{ \phi e \left[\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \right] + \dot{e} \left[\frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{2.5}} \right] \right\} \\ F_t &= -\frac{\mu R_s L^3}{C^3} \left\{ \phi e \left[\frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{1.5}} \right] + \dot{e} \left[\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

式中 μ 为黏度, L 为轴颈长度, ϕ 为涡动速度, C 为半径间隙, $\varepsilon=e/C$ 为轴颈偏心率。

对于SFD同步进动, $\dot{e}=0$ 。挤压油膜力为

$$\begin{aligned} F_x &= F_r \cos \phi - F_t \sin \phi = -K_d x - C_d \dot{x} \\ F_y &= F_r \sin \phi + F_t \cos \phi = -K_d y - C_d \dot{y} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 F_x 和 F_y 分别为 x 和 y 方向挤压油膜力。

为便于计算分析, 依据坐标变换原理^[10], 可推导出在旋转坐标系上的油膜力

$$\begin{bmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_d & -\omega C_d \\ \omega C_d & K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (3)$$

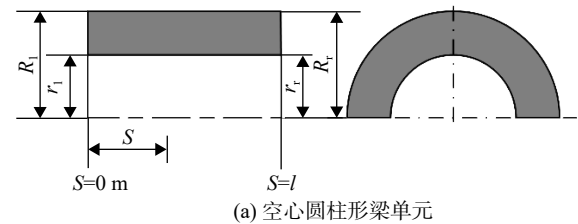
$$K_d = \frac{2\mu R_s L^3 \varepsilon \dot{\phi}}{C^3 (1-\varepsilon^2)^2}, \quad C_d = \frac{\mu R_s L^3 \pi}{2C^3 (1-\varepsilon^2)^{1.5}}$$

式中 ω 为转轴角速度, x' 和 y' 分别为旋转坐标系上的位移, $F_{x'}$ 和 $F_{y'}$ 则为挤压油膜力在旋转坐标系上对应的力分量。

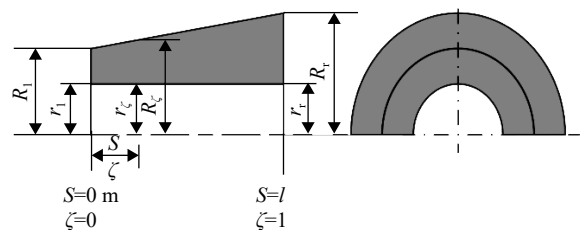
2 复杂变截面结构动力学建模

针对燃发转子变截面结构特征, 采用等截面梁单元(图4(a))与线性锥形梁单元(图4(b))相融合的方式对复杂结构进行等效。图4中, S 表示梁单元轴向位置坐标, l 为长度, 无量纲位置坐标 $\xi=S/l$, r_l 和 R_l 分别为单元左端内半径和外半径, r_r 和 R_r 分别为右端内半径和外半径, r_ξ 和 R_ξ 分别为单元内部 ξ 处内、外半径。对于空心梁单元, 形状因子 $\kappa=2(1+\nu)/(4+3\nu)$, ν 为泊松比。

设圆柱梁单元弹性模量为 E , 截面惯性矩为 I , 横截面面积为 A , 密度为 ρ 。横向剪切效应为



(a) 空心圆柱形梁单元



(b) 空心线性锥形梁单元

图4 梁单元

Fig. 4 Beam elements

$$\Phi = \frac{12EI}{\kappa AGl^2} \quad (4)$$

式中 G 为切变模量。

每个圆柱形梁单元有两个结点, 每个结点有 4 个自由度(两个平移 (x, y) 和两个截面转角 (θ_x, θ_y))。与时间有关的端点位移矢量为 $\mathbf{q}_e^e = [x_1^e, y_1^e, \theta_{x1}^e, \theta_{y1}^e, x_2^e, y_2^e, \theta_{x2}^e, \theta_{y2}^e]^T$, 等截面梁单元的单元平移质量矩阵 $\mathbf{M}_{te}^e$ 、单元旋转质量矩阵 $\mathbf{M}_{re}^e$ 和单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_e^e$ 可以写成一般形式

$$\mathbf{A}_e^e = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & \\ 0 & a_{22} & & & & & & \\ & & & & & & & \text{对} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & & & & & \text{称} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & & & & \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & & & \\ 0 & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} & & \\ 0 & a_{72} & a_{73} & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} & \\ a_{81} & 0 & 0 & a_{84} & a_{85} & 0 & 0 & a_{88} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 $a_{22}=a_{11}$ 、 $a_{33}=a_{44}$ 、 $a_{66}=a_{55}$ 、 $a_{77}=a_{88}$ 、 $a_{32}=-a_{41}$ 、 $a_{62}=a_{51}$ 、 $a_{72}=-a_{81}$ 、 $a_{63}=-a_{54}$ 、 $a_{73}=a_{84}$ 、 $a_{76}=-a_{85}$ 。上述矩阵具体表达式可参考文献 [4]。

考虑陀螺效应时, 可得梁单元陀螺矩阵

$$\mathbf{G}_e^e = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ g_{21} & 0 & & & & & & \text{反} \\ g_{31} & 0 & 0 & & & & & \text{对} \\ 0 & g_{42} & g_{43} & 0 & & & & \text{称} \\ 0 & g_{52} & g_{53} & 0 & 0 & & & \\ g_{61} & 0 & 0 & g_{64} & g_{65} & 0 & & \\ g_{71} & 0 & 0 & g_{74} & g_{75} & 0 & 0 & \\ 0 & g_{82} & g_{83} & 0 & 0 & g_{86} & g_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 $g_{21} = \frac{-12\rho I}{5l(1+\Phi)^2}$ 、 $g_{31} = \frac{\rho I(1-5\Phi)}{5(1+\Phi)^2}$ 、 $g_{43} = \frac{-\rho Il(4+5\Phi+10\Phi^2)}{15(1+\Phi)^2}$ 、 $g_{52} = g_{65} = g_{21}$ 、 $g_{71} = g_{42} = g_{82} = g_{53} = g_{64} = g_{31}$ 、 $g_{61} = -g_{21}$ 、 $g_{83} = \frac{\rho Il(1+5\Phi-5\Phi^2)}{15(1+\Phi)^2}$ 、 $g_{74} = -g_{83}$ 、 $g_{87} = g_{43}$ 、 $g_{75} = g_{86} = -g_{31}$ 。

线性锥形梁单元左右端部内径比、外径比定义为 $\Delta_i = r_i/r_1$ 、 $\Delta_o = R_i/R_1$, 推导出 ξ 处内、外半径

$$r_\xi = r_1[1 + (\Delta_i - 1)\xi] \quad (7)$$

$$R_\xi = R_1[1 + (\Delta_o - 1)\xi] \quad (8)$$

使用方程式(7)~式(8)可推导出坐标 ξ 处横截面面积(A_ξ)和截面惯性矩(I_ξ)

$$A_\xi = A_1(1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2) \quad (9)$$

$$I_\xi = I_1(1 + \delta_1\xi + \delta_2\xi^2 + \delta_3\xi^3 + \delta_4\xi^4) \quad (10)$$

式中 A_1 为单元左端截面面积, α_1 和 α_2 为面积二次多项式系数, I_1 为单元左端截面惯性矩, δ_1 、 δ_2 、 δ_3 和 δ_4 为惯性矩 4 次多项式系数。

在坐标 ξ 处, 单元内部位移可用 12 个端点位移向量 $\mathbf{q}^e = [x_1, y_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, x_2, y_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \beta_{x1}, \beta_{y1}, \beta_{x2}, \beta_{y2}]^T$ 表示。根据形函数理论和拉格朗日方程, 可推导出 12 自由度锥形单元在固定坐标下的运动方程:

$$(\mathbf{M}_t^e + \mathbf{M}_r^e)\ddot{\mathbf{q}}^e + \omega\mathbf{G}^e\dot{\mathbf{q}}^e + (\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_s^e)\mathbf{q}^e = \mathbf{0} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{G}^e$ 、 $\mathbf{K}_b^e$ 、 $\mathbf{K}_s^e$ 、 $\mathbf{M}_t^e$ 和 $\mathbf{M}_r^e$ 分别为锥形单元的陀螺矩阵、弯曲刚度矩阵、剪切刚度矩阵、旋转惯性矩阵和平移质量矩阵^[19]。

为了集成两种单元方程, 需将锥形单元的各个 12×12 刚度和惯性矩阵都缩减成 8×8 矩阵。对式(11)齐次方程中刚度矩阵和位移向量进行矩阵分块处理, 并对其进行矩阵变换, 可得

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix} \mathbf{q}_m = \mathbf{T}\mathbf{q}_m \quad (12)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为 8×8 单位矩阵, $\mathbf{T}$ 为转换矩阵, $\mathbf{q}_m$ 为 8×1 位移向量。

基于式(12), 可推导出压缩矩阵转换公式

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{A}$ 为 12×12 矩阵, $\tilde{\mathbf{A}}$ 为 $\mathbf{A}$ (惯性、刚度和陀螺矩阵) 缩减后的 8×8 单元矩阵。

以某离心叶轮为例, 阐述复杂变截面结构建模过程。作为示例, 采用 3 个主结点、2 个主单元和 9 个子单元对离心叶轮进行模化。图 5 为建模流程图, 基于有限元和分段线性拟合思想, 采用等截面单元与锥形单元进行单元划分, 然后通过式(13)将每个 12×12 锥形单元惯性、刚度、陀螺矩阵缩减为等效的一系列 8×8 单元矩阵; 基于此, 根据 Guyan 缩减原理对每个主单元中的子单元自由度进行压缩, 得到子单元融合后的各主单元的主陀螺矩阵、主刚度矩阵和主惯性矩阵; 最后根据主单元 1 和主单元 2 之间的结点连接关系对主单元方程进行组装^[10], 得到动力学运动方程 $\mathbf{M}_{12 \times 12}\ddot{\mathbf{q}}_{12 \times 1} + \mathbf{c}_{12 \times 12}\dot{\mathbf{q}}_{12 \times 1} + \mathbf{k}_{12 \times 12}\mathbf{q}_{12 \times 1} = \mathbf{F}_{12 \times 1}$, 式中 $\mathbf{M}_{12 \times 12}$ 为质量矩阵, $\mathbf{c}_{12 \times 12}$ 为陀螺矩阵, $\mathbf{k}_{12 \times 12}$ 为刚度矩阵, $\mathbf{F}_{12 \times 1}$ 为广义力, $\mathbf{q}_{12 \times 1}$ 为广义位移向量。

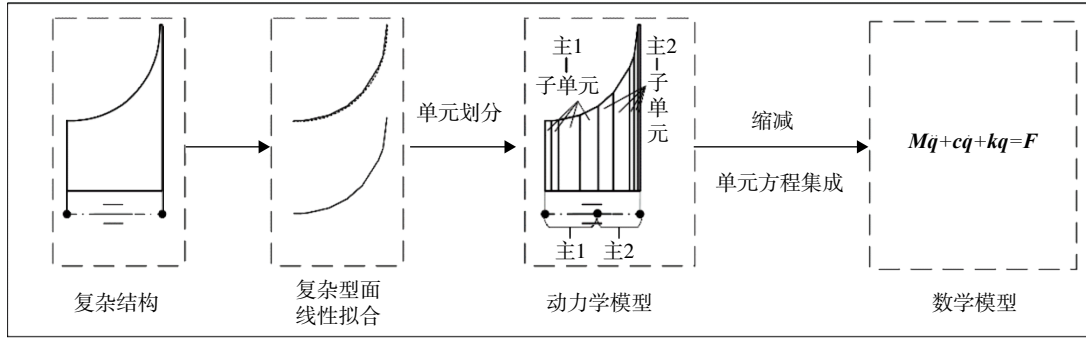


图5 复杂结构建模流程

Fig. 5 Modeling process of complex structure

3 复杂转子-支承系统动力学模型

根据文中第2节所述复杂结构建模方法,对连续转子物理模型离散为一系列单元,构建了图6所示涡轴发动机燃发转子动力学模型,图中大写

字母 A、C 和 T 分别表示轴流压气机、离心压气机和涡轮,黑色圆点表示主结点,两两黑色结点间代表主单元,黑色圆圈表示叶片刚性盘单元,加粗数字 1~18 表示转子模型的单元结点编号。

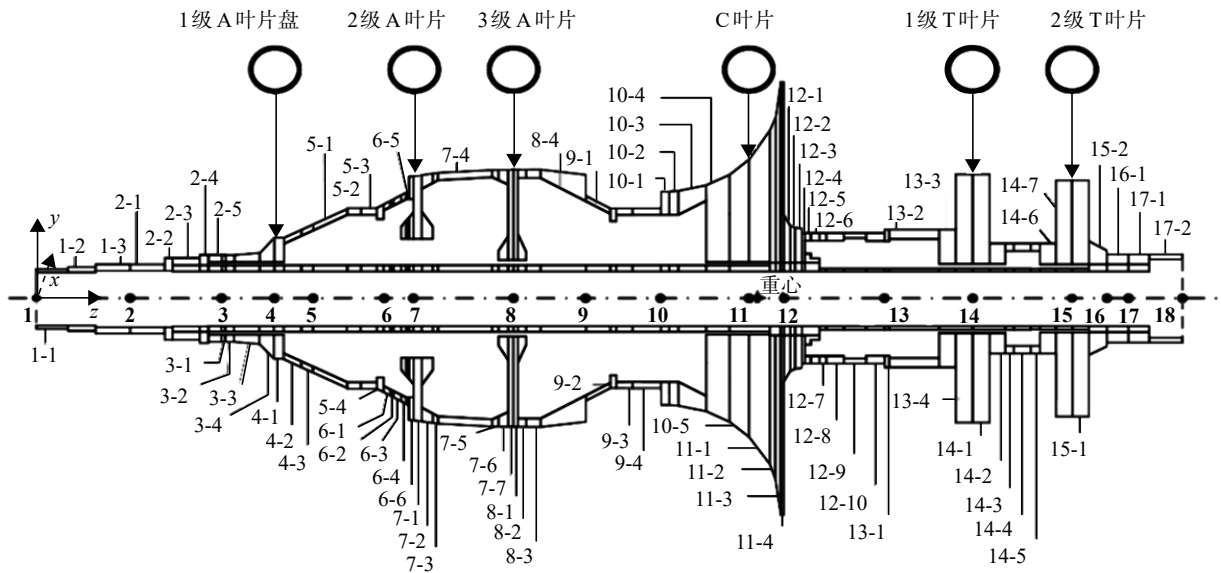


图6 涡轴发动机燃发转子动力学模型

Fig. 6 Dynamic model of the gas generator rotor for turboshaft engine

子结构单元采用 N - n 的表述法, N 为主结构编号, n 为子结构编号, 以图6中子结构截面单元编号 1-2 为例, 1-2 表示主结构 1 中的第 2 子结构截面单元。建立的燃发转子模型由 17 个主结构单元(每个主结构单元融合 n 个子结构单元, $n \geq 0$)、18 个主结构结点和 6 个模拟叶片特性的刚性盘构成, 结点 2 和 17 为转子和支承的联接点, 刚性盘运动方程参见文献 [20]。经过文中第 2 节所述方法对系统自由度进行降维后, 转子系统动力学模型最终含有 72 个自由度, 对应的燃发转子运

动控制方程可表示为

$$M_s \ddot{q}_s + (C_s + \omega G_s) \dot{q}_s + K_s q_s = F_s \quad (14)$$

式中 M_s 、 G_s 以及 K_s 分别为转子整体质量、陀螺力矩和刚度矩阵; q_s 为位移向量; C_s 为 Rayleigh 结构阻尼; F_w 为广义外载荷。

考虑支承与转子的耦合时, 燃发转子-支承系统整体运动控制方程可表示为

$$M_s \ddot{q}_s + (C_s + \omega G_s) \dot{q}_s + (K_s + K_t) q_s = F_w + F_s \quad (15)$$

$$K_t = \text{diag}[0, 0, 0, 0, K_t, K_t, 0, \dots, 0, K_t, K_t, 0, 0, 0, 0, 0, 0]_{1 \times 72}$$

$$F_s = [0, 0, 0, 0, F_x(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2), F_y(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2), 0, \dots, 0, F_x(x_{17}, y_{17}, \dot{x}_{17}, \dot{y}_{17}), F_y(x_{17}, y_{17}, \dot{x}_{17}, \dot{y}_{17}), 0, 0, 0, 0, 0, 0]_{72 \times 1}^T$$

式中 K_t 为弹支刚度矩阵, F_s 为油膜力矢量。

为验证复杂转子-支承系统动力学建模方法的正确性和通用性,在充分考虑燃发转子结构特征基础上,基于局部结构相似准则和一般性验证目的,设计了含锥形结构和端齿连接结构的转子(图7)以开展模态锤击试验。为模拟支承近似自由状态,采用足够柔的海绵垫(刚度约为 12 N/mm)支撑转子两端。测试过程中,采用单点拾振、逐点激励的方式^[21]采集瞬态加速度响应信号;最后,通过模态分析软件得到试验转子(图7(b))在近似自由边界条件下的频响函数曲线(图8),图中 A 表示加速度振幅。依据文献[3,12,14]等研究结果表明,端齿连接转子在预紧饱和下(实际工况)连接刚度损失较小。因此,在构建模型时忽略界面影响,采用 11 主结点、10 主单元建立试验转子动力学模型(图7(a)),图中数字 1~11 表示转子模型的单元结点编号,并在预紧饱和下开展试验。通过仿真和试验得到转子振型和固有频率分别如图9和表1所示。

对比分析表1中的数据可知,计算得到的前4阶固有频率和测试结果基本一致,相对误差不超过 3.2%。综上所述,本文建立的动力学模型能够较好地反映复杂转子的固有特性,建模方法正

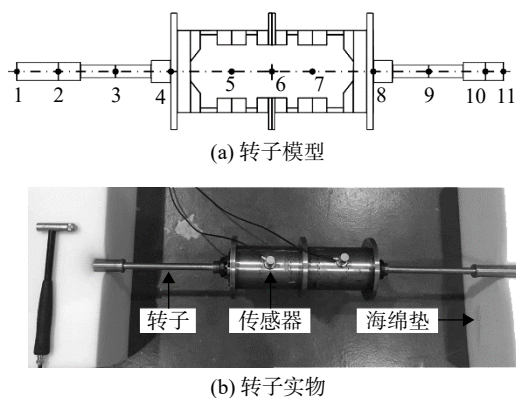


图7 试验转子及模态测试

Fig. 7 Experimental rotor and its mode test

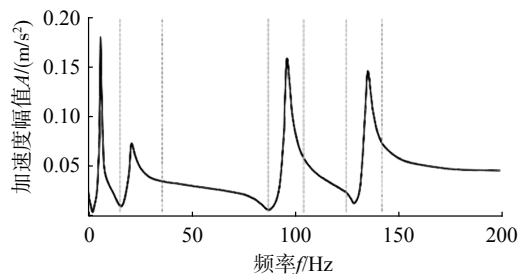


图8 试验转子频响函数曲线

Fig. 8 Frequency-response function curve of the experimental rotor

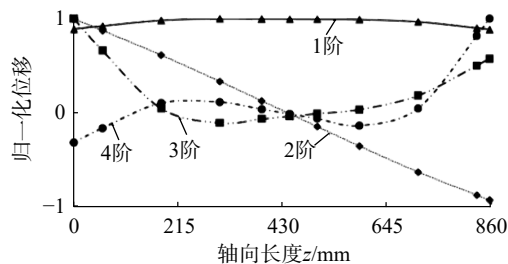


图9 前四阶自由模态振型

Fig. 9 The first four-order free mode shapes

表1 前4阶固有频率

Table 1 The first four-order natural frequencies

阶次	固有频率/Hz		相对误差/%
	计算值	实测值	
1	6.88	6.70	2.74
2	19.40	19.10	1.57
3	97.32	96.13	1.23
4	139.15	134.88	3.16

确,模型可靠。

4 燃发转子-支承系统振动特性分析与讨论

下面针对典型的 3A1C+2GT 航空涡轴发动机燃发转子-支承系统,研究转子振动特性随支承刚度的演变规律,涉及临界转速、振型、应变能分布、振动响应和 SFD 减振效率等。

4.1 支承刚度对固有特性的影响

采取三种方案改变支承刚度,一是改变前支承刚度,二是改变后支承刚度,三是同时改变前后支承刚度。

图10为燃发转子前3阶临界转速随1#支承刚度变化曲线。图中 N_{ol} 表示工作转速下限(35 000 r/min), N_{ou} 表示工作转速上限(50 000 r/min), N_{min} 和 N_{max} 分别表示第2阶和第3阶临界转速阈值,下文同。对于 $K_s < 1.0 \times 10^4$ N/mm,在对数-对数尺度上(图10(a)),第1阶模态基本上是斜线,后2阶模态基本上为水平线;刚度高于 1.0×10^5 N/mm 时,第1阶临界转速不会随着刚度的进一步增加而增加;刚度高于 6.0×10^5 N/mm 时,后2阶临界转速不会随着刚度的进一步增加而增加,此时,临界转速为刚性支承临界转速。按照航空发动机转子临界转速设计准则的要求^[16],工作转速安全裕度不得低于 20%,结合工作转速设计范围,可得转子第3阶临界转速不得低于 $N_{max} = 60\ 000$ r/min,且第2

阶临界转速不得高于 $N_{\min}=29\,166\text{ r/min}$ 。从图 10(b) 中可知,第 3 阶临界在任何刚度约束下均大于 $N_{\max}$,而第 2 阶临界转速在刚度增加至 $45\,538\text{ N/mm}$ 时等于 $N_{\min}$,若刚度继续增加,临界转速裕度将低于 20%,则转子-支承系统设计不合理;在刚度增加至 $99\,742\text{ N/mm}$ 时,第 2 阶临界转速等于 N_{ol} ,刚度的进一步增加将导致工作转速范围内存在共振转速。此外,第 1 阶临界转速在任何支承约束下均低于 $N_{\min}$,且当 $K_s\geq 10\,000\text{ N/mm}$ 时,临界转速值基本不再变化。

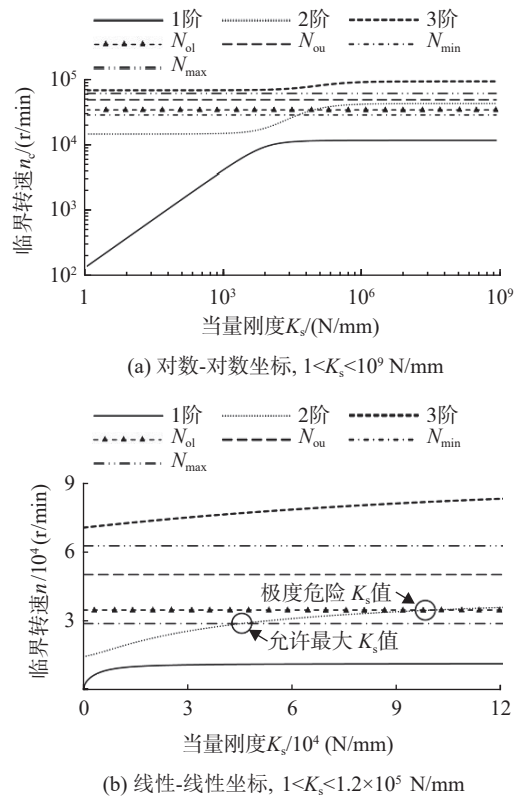


图 10 临界转速随 1# 支承刚度变化曲线
Fig. 10 Critical speeds varying curves with 1# support stiffness

按照临界转速设计准则以及尽量避免 1# 支承刚度的变化对第 1 阶临界转速的影响,结合上述临界转速随 1# 支承刚度的变化规律,并同时考虑到转子变形满足设计要求,1# 支承刚度设计适用范围(允许变动值)为 $1.25\times 10^4\sim 4.55\times 10^4\text{ N/mm}$,基于区中和航空发动机保守设计原则,取 $1.5\times 10^4\sim 3.5\times 10^4\text{ N/mm}$ 为宜,具体选择可根据工厂加工、制造各型号弹性支承的水平以及通过临界转速时的振动量级^[16]进行合理选择和调整。

图 11 为燃发转子临界转速随 2# 支承刚度变化曲线,与图 10 比较可知,前 3 阶临界转速分别随 1# 支承刚度和 2# 支承刚度增大的变化趋势基

本一致。1# 和 2# 支承刚度对第 2 阶临界转速影响差异如表 2 所示,当第 2 阶临界转速达到 $N_{\min}$ 时,在同等情况下(保持另一刚度不变,下同),此时 2# 支承刚度要比 1# 支承刚度大 35.06%;第 2 阶临界转速为 N_{ol} 时,此时 2# 支承刚度比 1# 支承刚度大 18.62%,这充分表明燃发转子第 2 阶临界转速对 1# 支承刚度变化相比 2# 支承刚度更敏感;更有意义的是,1# 支承刚度的进一步增大不会引起第 2 阶临界转速超过 N_{ou} ,但 2# 支承刚度达到 $2.47\times 10^6\text{ N/mm}$ 时,第 2 阶临界转速将超过 N_{ou} ,并达到 $5.1\times 10^4\text{ r/min}$ 。

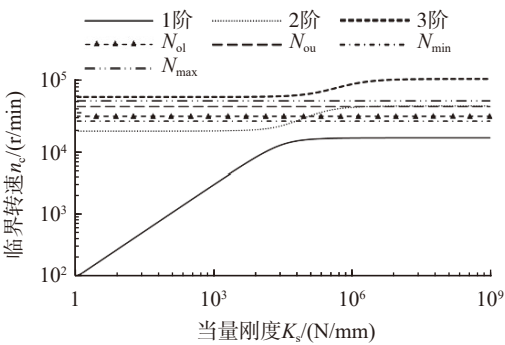


图 11 临界转速随 2# 支承刚度变化曲线
Fig. 11 Critical speeds varying curves with 2# support stiffness

表 2 临界转速阈值与支承刚度的关系
Table 2 Relationship between the critical speed threshold and the support stiffness

转速/(r/min)	刚度/(N/mm)		增长率/%
	1# 支承	2# 支承	
29 166	45 538	61 502	35.06
35 000	99 742	118 309	18.62
50 000		2 474 491	

综上,同样按照临界转速设计准则以及尽量避免 2# 支承刚度变化对第 1 阶临界转速的影响,结合上述临界转速随 2# 支承刚度的变化规律,并同时考虑到转子变形,2# 支承刚度设计适用范围为 $1.55\times 10^4\sim 6.15\times 10^4\text{ N/mm}$,基于区中和保守设计原则,取 $1.86\times 10^4\sim 4.9\times 10^4\text{ N/mm}$ 为宜,具体如何取值可参照 1# 支承刚度取值变动准则,但刚度最大值为 $61\,502\text{ N/mm}$ 。

图 12 为燃发转子前 3 阶临界转速图,1# 和 2# 支承刚度同步变化,与其中一个支承刚度单独变化的情形(图 10 和图 11)相比可知,第 1 阶和第 3 阶临界转速随刚度增大的变化趋势基本上没有发生变化,但是临界转速增速变快;令人惊讶的是,

第 2 阶临界转速随支承刚度增大的变化趋势发生明显变化,且增速变快,这是由于 1#支和 2#支承刚度的耦合增强效应导致第 2 阶临界转速随刚度的增大而快速增加。注意,第 2 阶临界转速在刚度增加至 35 266 N/mm 时约为 $N_{\min}$;若刚度继续增加,临界转速裕度将低于 20%;在刚度增加至 55 477 N/mm 时,第 2 阶临界转速约为 N_{ol} ,刚度的进一步增加将导致工作转速范围内存在共振转速;若支承刚度继续增大,则第 2 阶临界转速将横跨工作转速,并在刚度为 151 584 N/mm 时,到达 N_{ou} 。然而,对于第 3 阶临界转速,支承刚度对其影响不大,且任意支承约束下第 3 阶临界转速均大于 $N_{\max}$;与第 3 阶类似,第 2 阶临界转速在任意支承约束下均小于 $N_{\min}$ 。由表 3 前 3 阶临界转速变化率可知,前 2 阶临界转速受支承的约束特性影响较大,第 3 阶临界转速对支承刚度敏感性较弱。上述分析表明, $1 < K_s < 1.0 \times 10^4$ N/mm,前两阶临界转速对应的模态为刚体圆柱形模态和锥形模态,第 3 阶模态临界转速不随刚度的变化而变化,为弯曲模态;在刚度范围 $1.0 \times 10^4 < K_s < 1.0 \times 10^6$ N/mm 内,前 3 阶临界转速对应的模态振型为模态耦合区;刚度大于 1.0×10^6 N/mm 时,进入刚性支承模态。

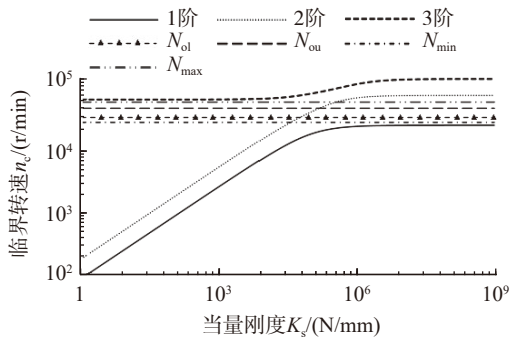


图 12 临界转速随两支承刚度同时变化曲线

Fig. 12 Critical speeds varying curves with two support stiffnesses simultaneously

表 3 临界转速随支承刚度变化率

Table 3 Change rate of critical speeds with stiffness

阶次	临界转速/(r/min)		增长率/%
	刚度缩小 5 倍	刚度增大 5 倍	
1	5 119.40	18 967.56	270.50
2	10 744.53	43 539.55	305.23
3	69 793.74	86 253.47	23.58

按照临界转速、应变能准则和变形要求,综合前两种刚度变化方案和第 3 种方案的分析结果可确定支承刚度相对合适的取值为 $1.5 \times 10^4 \sim$

2.8×10^4 N/mm。

4.2 支承刚度对响应的影响

依据文中第 4.1 节确定的支承刚度适用范围,取刚度 K_1 (35 000 N/mm) 和 K_2 (15 000 N/mm),在结点 6 和 16 处分别施加 6 g·mm 和 8 g·mm 的 0° 不平衡量,计算两种支承刚度下不平衡响应,以揭示支承刚度对系统响应的影响规律。

4.2.1 不考虑挤压油膜因素

假定转子两支承处均没有并联设计 SFD,图 13 和图 14 分别为不同弹支刚度下幅频响应曲线和支承力随转速变化曲线,图中, x 表示位移振幅,下文同;为便于定量分析,提取图中 1 阶峰值转速点、2 阶峰值转速点、工作转速区间内间隔 5 000 r/min 的转速点处的振动响应和支承力,其结果分别如表 4 和表 5 所示。

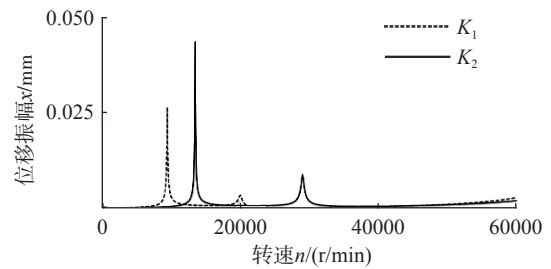


图 13 不同支承刚度下振动响应

Fig. 13 Vibration response for different support stiffnesses

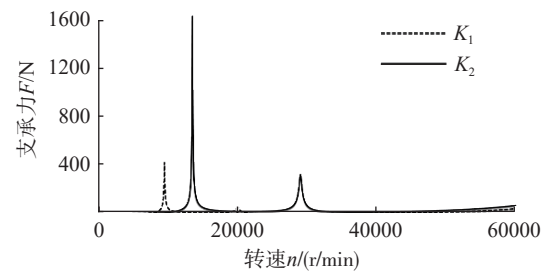


图 14 不同支承刚度下支承力

Fig. 14 Support force for different support stiffnesses

表 4 支承刚度对位移振幅的影响

Table 4 Effect of support stiffness on displacement vibration amplitude

转速/(r/min)	位移振幅 $x/\mu\text{m}$		增长率/%
	K_1	K_2	
1 阶转速点	26.27	43.24	64.59
2 阶转速点	3.24	8.64	166.64
35 000	0.14	0.38	179.87
40 000	0.29	0.38	30.03
45 000	0.53	0.52	-1.75
50 000	0.90	0.77	-14.48

表 5 支承刚度对支承力的影响
Table 5 Effect of support stiffness on the support force

转速/(r/min)	支承力/N		增长率/%
	K_1	K_2	
1 阶转速点	394.07	1 513.30	284.02
2 阶转速点	48.62	302.42	521.99
35 000	2.03	13.26	552.40
40 000	4.42	13.40	203.01
45 000	8.00	18.31	128.88
50 000	13.52	26.92	99.16

由图 13~图 14 和表 4~表 5 中的数据可知,在支承刚度允许设计范围内,支承刚度大小显著影响转子-支承系统通过共振峰值转速时的振幅和支承力;理论分析表明支承刚度越小,通过共振峰值转速时转子振动位移和支承力越小,反之越大;此外,支承刚度越大,前 2 阶共振转速越大,越靠近 N_{ol} 。因此,为尽量降低通过临界转速时转子振幅和支承力并保证足够的临界转速隔离裕度,以及发动机升速过程中尽早跨过振动大的前 2 阶临界转速模态,弹性支承可按照在适用范围内偏低取值刚度原则进行设计。

4.2.2 考虑挤压油膜因素

燃发转子支承系统普遍采用弹支与 SFD 并联设计,在考虑 SFD 情况下,由图 15~图 16 和表 6~表 7 中的数据可知,支承刚度对转子系统振动响应和支承力的影响与文中第 4.2.1 节所述不考虑挤压油膜因素基本一致。支承处设计有无 SFD 的主要振动差异在于,当转子两端支承处并联设计有 SFD 后,由于 SFD 良好的阻尼作用,转子幅频响应曲线中不再有明显的 2 阶振动峰值。通过上述分析表明,在预测转子振动响应和进行振动评定时不能忽略 SFD 的影响。此外,支承刚度的降低和 SFD 的使用具有耦合减振效果。

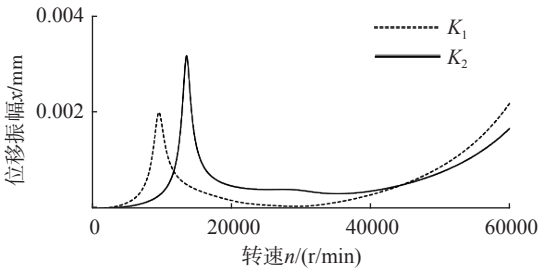


图 15 有 SFD 时不同支承刚度下响应
Fig. 15 Response for different support stiffnesses with SFD

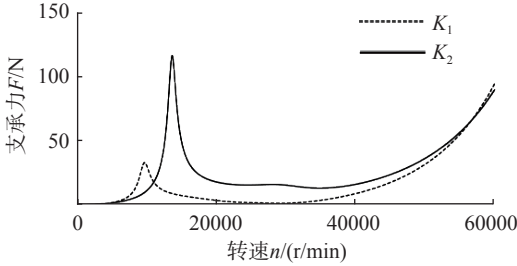


图 16 有 SFD 时不同支承刚度下支承力
Fig. 16 Supporting force for different support stiffnesses with SFD

表 6 有 SFD 时支承刚度对振幅的影响
Table 6 Effect of support stiffness on displacement vibration amplitude with SFD

转速/(r/min)	位移振幅 $x/\mu\text{m}$		增长率/%
	K_1	K_2	
1 阶转速点	2.00	3.19	59.2
35 000	0.13	0.311	140.29
40 000	0.29	0.36	26.71
45 000	0.52	0.51	-1.84
50 000	0.86	0.75	-13.28

表 7 有 SFD 时支承刚度对支承力的影响
Table 7 Effect of support stiffness on the support force with SFD

转速/(r/min)	支承力/N		增长率/%
	K_1	K_2	
1 阶转速点	33.07	116.67	252.85
35 000	3.59	13.11	264.98
40 000	8.79	16.04	82.42
45 000	17.50	23.63	35.02
50 000	31.68	36.36	14.76

4.3 支承刚度设计与验证及 SFD 减振效率分析

依据文中第 4.1~4.2 节支承刚度对临界转速、振动响应和支承力的影响规律以及确定的支承刚度取值范围,现以燃发转子为例,对支承刚度进行设计并开展 SFD 减振效率分析。若通过仿真计算或试验得到的振动量级不达标、临界转速和应变能不符合航空发动机设计准则,可在支承刚度取值范围内进一步降低两端支承刚度;也可以保持右端支承刚度不变,降低左端支承刚度,这是由于 3A1C+2GT 结构布局的燃发转子重心位于离心叶轮处,更靠近右端支承,左端支承刚度

可以比右端支承刚度相对取小一些;此外,若1阶共振峰值较高,可采取保持左端支承刚度不变,降低右端支承刚度;若2阶峰值较高,可采取保持右端支承刚度不变,降低左端支承刚度。

在支承刚度取值范围内取两端支承刚度设计值为 2×10^4 N/mm, 燃发转子理论模型计算得到的前3阶临界转速分别为 10 782、22 856 r/min 和 73 527 r/min。由图 17 可知转子前两阶振型为刚体模态,第3阶为弯曲模态,工作转速位于俯仰模态和1阶弯曲模态转速之间,经核算可知临界转速隔离裕度均大于 20%,符合航空发动机临界转速设计准则^[16]。前3阶振型对应的应变能分布如图 18 所示,可知前两阶振型的轴弯应变能均小于总应变能的 15%,符合航空发动机应变能约束要求^[3,16],而支承总应变能均大于 85%,表明转子振动能量主要集中在前后支承上,前两阶模态可视为支承模态,这从能量角度表明航空发动机燃发转子支承设计的重要性,同时也表明前两阶共振峰值可通过挤压油膜阻尼器的合理阻尼设计得到有效的控制。

上述分析从模态和能量角度表明了典型 3A1C+2GT 燃发转子-支承系统动力学设计的合理性,从而验证了支承刚度设计的合理性。

为进一步验证支承刚度设计的合理性并进

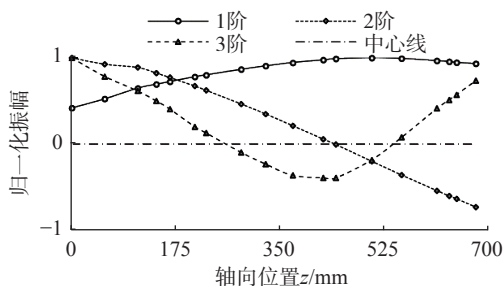


图 17 燃发转子前3阶振型

Fig. 17 The first three-order mode shapes for the gas generator rotor

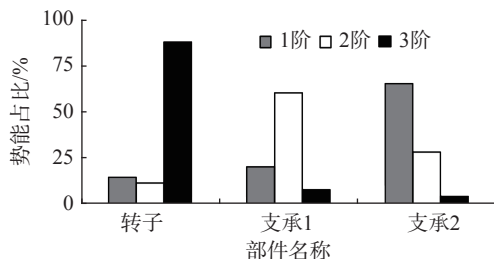
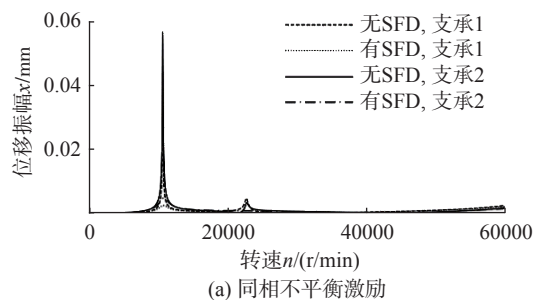


图 18 前3阶振型对应的势能分布

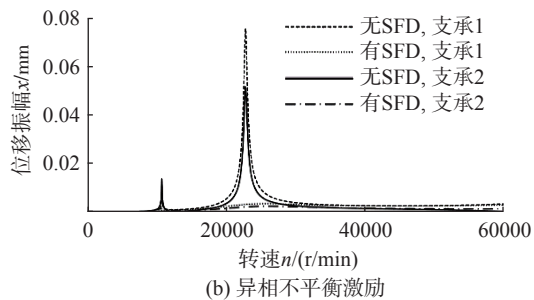
Fig. 18 Corresponding potential energy distribution for the first three-order mode shapes

行 SFD 减振效率分析, 根据实际情况, SFD 长度直接取用轴承宽度^[22], 分别为 1# 支承 12 mm 和 2# 支承 9 mm; 油膜黏度 (0.024 6 Pa·s) 与航空发动机润滑油黏度相同; 根据经验^[16], 油膜半径间隙取 2‰~3‰ 为宜, 此处, 左端取 2‰, 右端取 2.4‰。根据设计要求^[22], 该燃发转子二级轴流压气机前缘和二级燃气涡轮后缘位置许用残余不平衡量分别小于 6 g·mm 和 8 g·mm。为充分体现弹性支承与 SFD 并联设计的合理性和 SFD 减振效力, 分别对转子施加两种极端不平衡激励^[23], 一是同相不平衡激励, 二是反相不平衡激励, 并分别计算有无 SFD 情况下转子的不平衡响应和支承力, 由此得到的转子幅频响应曲线和支承力分别如图 19 和图 20 所示。由图 19~图 20 和表 8 可知, 对于同相不平衡激励, SFD 对 1 阶振幅和支承力峰值减振效果均在 91% 左右, 而对 2 阶振幅及其支承力峰值减振效果更加明显, 图 19(a) 和图 20(a) 中有 SFD 的响应和支承力曲线已不存在 2 阶峰值; 对于异相不平衡激励, SFD 对 1 阶和 2 阶振幅及支承力峰值减振效果均在 89% 以上。此外, 校核 1# 和 2# 支承处 SFD 偏心率发现, 最大偏心率满足航空发动机设计手册关于 SFD 的设计要求^[16]。

综合以上分析可知, 为该发转子设计的支承刚度和 SFD 参数合理, 减振效果显著, 转子临界转速、应变能分布、振动量级和支承受力满足航空发动机设计准则的要求^[16]。



(a) 同相不平衡激励



(b) 异相不平衡激励

图 19 设计支承刚度下减振效果

Fig. 19 Vibration reduction effect under support stiffness designed

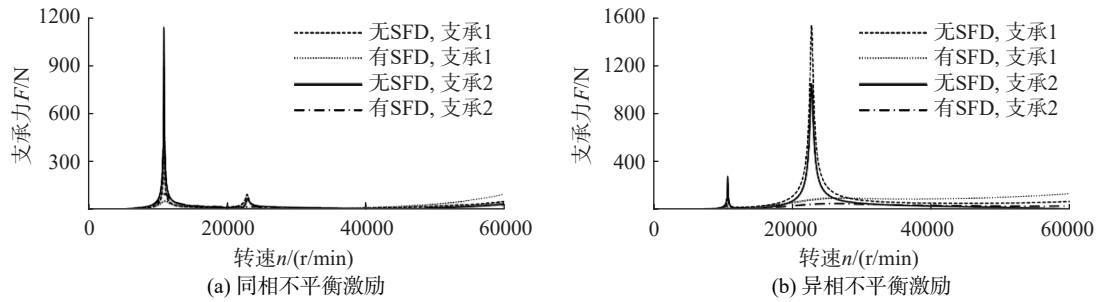


图20 设计支承刚度下支承力降幅效果

Fig. 20 Reduction effect of support force with supporting stiffness designed

表8 SFD减振和降支承力效果

Table 8 Effect of SFD reducing vibration and support force

参数		同相不平衡						异相不平衡					
		1#支承			2#支承			1#支承			2#支承		
		无SFD	有SFD	减振率/%	无SFD	有SFD	减振率/%	无SFD	有SFD	减振率/%	无SFD	有SFD	减振率/%
振动峰值/ μm	1阶	31.3	2.3	92.5	56.5	4.7	91.7	7.6	0.8	89.1	13.8	1.5	89.3
	2阶	4.6			3.2			75.6	3.5	95.4	51.6	2.4	95.4
支承力峰值/N	1阶	624.9	50.5	91.9	1 129.7	94.1	91.7	151.9	2.5	98.4	275.5	29.6	89.3
	2阶	92.0			64.6			1 511.7	94.5	93.8	1 032.5	49.3	95.2

5 结 论

针对复杂航空发动机支承设计问题,以涡轴发动机为例,通过建立燃发转子-支承系统线性和非线性动力学模型,从固有特性、支承力、响应和能量占比等方面分析了转子-支承系统的振动特性,揭示了支承特性与转子动力学的关联特性,并开展了支承刚度设计和弹性支承并联非线性SFD减振效率分析,主要结论如下:

1) 基于有限元、分段线性拟合和系统自由度降维理论,建立了能较好地表征转子复杂结构特征的转子-支承系统动力学模型,并通过试验验证了模型的有效性,该方法具有重要的工程应用价值。

2) 揭示了支承约束效应,燃发转子前2阶临界转速受支承的约束特性影响较大,第3阶则较弱;第2阶临界转速对1#支承刚度变化相比2#支承刚度变化更敏感,而第1阶则相反;变动任一支承刚度均可有效调整转子前2阶临界转速,同步调整则具有耦合增强效应;在进行刚度设计时可不考虑第3阶临界转速影响。

3) 基于临界转速设计准则和应变能约束条件,确定了支承刚度合适取值为 $1.5 \times 10^4 \sim 2.8 \times 10^4$ N/mm。支承刚度越小,通过共振峰值转速时转子振动位移和支承力越小,反之越大;此外,支承刚

度越大,前两阶共振转速越大,越靠近工作转速下限,设计支承刚度时应重点关注第2阶临界转速裕度。为尽早跨过前2阶临界模态,弹性支承可按照在刚度适用范围内偏低取值原则进行设计。

4) 开展了弹性支承与SFD并联设计和非线性减振效率分析,弹性支承并联SFD减振效果显著,支承刚度设计合理。实际应用时,可以根据本文方法对支承参数进行修改,以达最优的减振效果,使转子始终保持良好的振动特性。

5) 本文提出基于复杂转子动力学模型的支承刚度设计方法及弹性支承并联SFD减振策略可为航空发动机转子减振降噪和安全运行提供设计参考,具有较好的工程参考价值和实际应用意义。此外,今后可开展系统的稳定性试验研究,为航空发动机稳健性设计提供技术支持,进一步保障航发安全稳定运行。

参考文献:

- [1] WANG Longkai, WANG Ailun, JIN Miao, et al. Vibration prediction and failure analysis based on refined modeling of turbocharging rotor system with variable cross sections[J]. European Physical Journal Plus, 2021, 137(1): 1-24.
- [2] 洪杰,宋制宏,王东,等.高速转子系统支承结构及力学特性设计方法[J].航空动力学报,2019,34(5): 961-970.

- HONG Jie, SONG Zhihong, WANG Dong, et al. Design method for bearing-support structure and mechanical properties of high-speed rotor system[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(5): 961-970. (in Chinese)
- [3] 雷冰龙, 李超, 何康, 等. 共用支承-转子系统耦合振动特性分析及试验[J]. *航空动力学报*, 2020, 35(11): 2293-2305.
- LEI Binglong, LI Chao, HE Kang, et al. Coupling vibration characteristics analysis and experiment of shared support-rotors system[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2020, 35(11): 2293-2305. (in Chinese)
- [4] 陈果. 航空发动机整机振动耦合动力学模型及其验证[J]. *航空动力学报*, 2012, 27(2): 241-254.
- CHEN Guo. A coupling dynamic model for whole aero-engine vibration and its verification[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(2): 241-254. (in Chinese)
- [5] 罗贵火, 周海仑, 王飞, 等. 含滚动轴承的同向和反向旋转双转子系统动力学响应[J]. *航空动力学报*, 2012, 27(8): 1887-1894.
- LUO Guihuo, ZHOU Hailun, WANG Fei, et al. Dynamics response of co-rotating and counter-rotating dual-rotor system supported on ball bearing[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(8): 1887-1894. (in Chinese)
- [6] WANG Longkai, WANG Ailun, YIN Yijun, et al. Effects of unbalance orientation on the dynamic characteristics of a double overhung rotor system for high-speed turbochargers[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 107(1): 665-681.
- [7] 张大义, 刘烨辉, 梁智超, 等. 航空发动机双转子系统临界转速求解方法[J]. *推进技术*, 2015, 36(2): 292-298.
- ZHANG Dayi, LIU Yehui, LIANG Zhichao, et al. Prediction for critical speed of double spools system in aero engines[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2015, 36(2): 292-298. (in Chinese)
- [8] 王龙凯, 王艾伦, 金森, 等. 含内阻的拉杆组合转子双稳态振动特性[J]. *中国机械工程*, 2021, 32(5): 512-522, 564.
- WANG Longkai, WANG Ailun, JIN Miao, et al. Bistable vibration characteristics of rod fastening rotor with internal damping[J]. *China Mechanical Engineering*, 2021, 32(5): 512-522, 564. (in Chinese)
- [9] WANG Longkai, WANG Ailun, JIN Miao, et al. Nonlinear effects of induced unbalance in the rod fastening rotor-bearing system considering nonlinear contact[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2020, 90(5): 917-943.
- [10] WANG Longkai, WANG Ailun, JIN Miao, et al. Nonlinear dynamic response and stability of a rod fastening rotor with internal damping effect[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2021, 91(9): 3851-3867.
- [11] SINHA S K. Rotor dynamic analysis of asymmetric turbofan rotor due to fan blade-loss event with contact-impact rub loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(9): 2253-2283.
- [12] 廖子豪, 宾光富, 李超, 等. 基于临界转速与振型相似的涡轴发动机模拟转子实验台设计方法[J]. *机械设计*, 2021, 38(6): 45-50.
- LIAO Zihao, BIN Guangfu, LI Chao, et al. Design method of the simulated-rotor test rig for the turboshaft engine based on the critical speed and the similarity of vibration mode[J]. *Journal of Machine Design*, 2021, 38(6): 45-50. (in Chinese)
- [13] 邓旺群, 吴施志, 刘文魁, 等. 带柔性静子结构高速转子支承刚度修正方法[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(7): 29-35, 66.
- DENG Wangqun, WU Shizhi, LIU Wenkui, et al. Support stiffness modification method for a high-speed rotor with flexible stator[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(7): 29-35, 66. (in Chinese)
- [14] 唐虎标, 邓旺群, 刘文魁, 等. 航空发动机燃气发生器转子不平衡响应分析及试验研究[J]. *长沙航空职业技术学院学报*, 2021, 21(2): 1-5.
- TANG Hubiao, DENG Wangqun, LIU Wenkui, et al. Research on unbalance response and experiment of gas generator rotor of an aero engine[J]. *Journal of Changsha Aeronautical Vocational and Technical College*, 2021, 21(2): 1-5. (in Chinese)
- [15] 马艳红, 何天元, 张大义, 等. 支承刚度非线性转子系统的不平衡响应[J]. *航空动力学报*, 2014, 29(7): 1527-1534.
- MA Yanhong, HE Tianyuan, ZHANG Dayi, et al. Imbalance response of rotor system with nonlinear bearing stiffness[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2014, 29(7): 1527-1534. (in Chinese)
- [16] 《航空发动机设计手册》总编委会. 航空发动机设计手册: 第19册 转子动力学及整机振动[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000: 210-220.
- [17] 刘展翅, 廖明夫, 丛佩红, 等. 航空发动机转子挤压油膜阻尼器设计方法[J]. *航空动力学报*, 2015, 30(11): 2762-2770.
- LIU Zhanchi, LIAO Mingfu, CONG Peihong, et al. Design method of squeeze film damper for aero-engine rotors[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2015, 30(11): 2762-2770. (in Chinese)
- [18] CHEN W J, RAJAN M, RAJAN S D, et al. The optimal design of squeeze film dampers for flexible rotor systems[J]. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 1988, 110(2): 166-174.
- [19] NELSON H D. A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1980, 102(4): 793-803.
- [20] CHEN W J, GUNTER E J. Introduction to dynamics of rotor-bearing systems[M]. Victoria, Canada: Trafford Publishing, 2010.
- [21] 王海, 王艾伦, 马伍, 等. 组合转子变态模型动力学相似设计方法研究[J]. *机械设计*, 2020, 37(9): 7-11.
- WANG Hai, WANG Ailun, MA Wu, et al. Research on the dynamic similarity design for the abnormal model of combined rotors[J]. *Journal of Machine Design*, 2020, 37(9): 7-11. (in Chinese)
- [22] 宋明波, 夏商周, 赵海凤, 等. 典型燃气发生器转子平衡状态与振动特性分析[J]. *航空发动机*, 2021, 47(2): 79-83.
- SONG Mingbo, XIA Shangzhou, ZHAO Haifeng, et al. Analysis on balancing state and vibration characteristics of a typical gas generator rotor[J]. *Aeroengine*, 2021, 47(2): 79-83. (in Chinese)
- [23] 王正. 转动机械的转子动力学设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.

(编辑: 王碧琨)