

基于 Levenberg-Marquardt 算法的航空发动机模型求解混合算法

唐洪威, 谢文平, 崔毅, 邓康耀

(上海交通大学 动力机械与工程教育部重点实验室, 上海 200240)

摘 要: 为了降低航空发动机非线性模型求解的收敛性要求, 将模型非线性方程组的求解问题转化为最小二乘问题, 提出了基于 Levenberg-Marquardt(L-M)算法的混合算法。为了使 L-M 算法跳出局部解, 混合算法使用动力学方法修正局部解; 为了提高计算效率, 利用 Broyden 拟牛顿法加速 L-M 算法。以涡扇发动机为研究对象, 应用混合算法、L-M 算法、牛顿法和 Broyden 拟牛顿法进行稳态和瞬态仿真。结果表明: 在稳态工况下, L-M 算法和混合算法收敛范围更大, 在随机初值条件下能达到 90% 以上的收敛率, 远高于牛顿法和 Broyden 拟牛顿法不到 20% 的收敛率, 且混合算法计算速度与 Broyden 拟牛顿法相当。在瞬态工况下, L-M 算法和混合算法能够在牛顿法和 Broyden 拟牛顿法都不收敛的强瞬变工况收敛, 且混合算法瞬态计算时间仅为 Broyden 拟牛顿法的 1.13 倍。仿真结果表明该算法在航空发动机模型求解上具有良好的适用性。

关 键 词: 非线性模型; 牛顿法; Broyden 拟牛顿法; Levenberg-Marquardt 算法; 混合算法

中图分类号: V231

文献标志码: A

Hybrid algorithm for aero-engine model solving based on Levenberg-Marquardt algorithm

TANG Hongwei, XIE Wenping, CUI Yi, DENG Kangyao

(Key Laboratory for Power Machinery and Engineering of Ministry of Education,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: In order to reduce the convergence requirements for solving the nonlinear model of aeroengine, the problem of solving the model nonlinear equations was transformed into the least square problem. A hybrid algorithm based on Levenberg-Marquardt (L-M) algorithm was proposed. The hybrid algorithm avoided the local solution by modifying the local solution with dynamic method. Meanwhile, Broyden quasi-Newton method was used to accelerate the L-M algorithm. Targeting turbofan engine, the hybrid algorithm, L-M algorithm, Newton method and Broyden quasi-Newton method were used for steady-state and transient simulation. Results showed that: under the steady-state condition, if L-M algorithm and hybrid algorithm had larger convergence range, the convergence rate can reach more than 90% under the random initial value condition, much higher than the convergence rate of Newton method and Broyden quasi-Newton method which was less than 20%, and the calculation speed of hybrid algorithm was similar to that of Broyden quasi-Newton method. Under transient condition, L-M algorithm and hybrid algorithm can converge at strong transient condition where neither Newton method nor Broyden quasi-Newton method converged, and the transient computation time of hybrid algorithm was

收稿日期: 2021-07-13

作者简介: 唐洪威(1996—), 男, 硕士, 主要从事发动机系统仿真研究。E-mail: thw0425@sjtu.edu.cn

通信作者: 崔毅(1971—), 男, 研究员、博士生导师, 博士, 主要从事发动机仿真与 CAE 研究。E-mail: ycui@sjtu.edu.cn

引用格式: 唐洪威, 谢文平, 崔毅, 等. 基于 Levenberg-Marquardt 算法的航空发动机模型求解混合算法[J]. 航空动力学报, 2023, 38(2): 371-381.

TANG Hongwei, XIE Wenping, CUI Yi, et al. Hybrid algorithm for aero-engine model solving based on Levenberg-Marquardt algorithm[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(2): 371-381.

only 1.13 times that of Broyden quasi-Newton method. Simulation results show that the algorithm has good applicability in solving aero-engine model solving.

Keywords: nonlinear model; Newton method; broyden quasi-Newton method; Levenberg-Marquardt algorithm; hybrid algorithm

航空发动机部件级性能仿真模型在发动机研制过程中有着不可替代的作用。高精度、高实时性和强收敛性的航空发动机模型也是发动机控制系统设计、控制系统数值仿真等关键技术的基础。因此,国内外研究者针对航空发动机性能仿真计算模拟开展了大量的研究工作^[1-4]。

航空发动机部件级性能仿真模型在各个部件特性已知的基础上,通过求解非线性方程组来获得各个截面的主要参数。因此,非线性方程组的求解方法直接影响到性能仿真模型的适用能力。当前普遍的求解航空发动机非线性模型的方法主要为牛顿(Newton-Raphson, NR)法和 Broyden 拟牛顿法。但上述方法均存在严重的收敛性问题,只有初值与真实值比较接近时迭代才会收敛,这严重影响了发动机性能仿真模型的计算能力。为了解决上述问题,文献[5-6]分析统计了不收敛的类型和机理,分别提出了以发动机部件特性图为基础的独立变量限制法、独立变量初值拟合法、变步长牛顿法以及部件特性扩展法等解决措施。文献[7]提出通过自适应调整计算步长和校正函数的自校正 Broyden 拟牛顿法,在非线性系统中具有更好的计算性能。文献[8]通过残差的变化趋势来调整步长以改善牛顿法的收敛性。文献[9-10]将遗传算法(genetic algorithm, GA)用于航空发动机非线性方程组的求解,目前已经证明遗传算法具有全局收敛性,但计算效率较低且实现过程较为复杂。文献[11-12]将粒子群(particle swarm optimization, PSO)算法用于航空发动机非线性方程组的求解,并针对粒子群算法在航空发动机非线性方程组中的求解进行了一定改进,但仍存在计算效率低的缺点,且粒子群算法并不能保证得到方程组的解。文献[13]将变循环发动机(variable cycle engine, VCE)模型求解转化为求最小值的优化问题,引入差分进化算法进行模型的求解,并提出一种自适应差分进化算。为了在保持传统算法收敛速度的同时具有智能算法的全局收敛性特点,文献[14]提出了 GA-NR 算法,该算法在模型不收敛点采用遗传算法与牛顿法交替计算,提高了牛顿法的收敛性。文献[15-16]提出了提高迭代算法收敛性和计算效率的 PSO-NR 融合算法,计算结果表明了该方法良好的全局收敛性和计算

效率。文献[17]提出一种基于量子粒子群优化(QPSO)算法与 Broyden 拟牛顿法混合的求解思路,计算结果表明该混合算法可有效快速地完成 VCE 部件模型的求解。在航空发动机模型求解中,还可通过引入部件容积效应,用微分方程组替代非线性方程组,避免迭代求解。仿真结果表明该方法在一定条件下可实现稳态模型求解和瞬态过程的快速计算。但微分方程求解步长受限于容腔的容积大小,通过适当放大容积可有效提升瞬态过程计算速度,但会损失一定的计算精度^[18-24]。

综上所述,航空发动机模型求解研究取得了极大的进展。但在极端条件下,牛顿法和 Broyden 拟牛顿法仍无法满足收敛性要求,而智能全局搜索方法则受限于算法复杂度并不适合在线应用,容积动力法难以兼顾模型计算精度和计算效率。Levenberg-Marquardt(L-M)算法作为经典的求解非线性方程组和最小二乘问题的方法被广泛使用,且针对 L-M 算法提出了更多的改进算法,取得了极大的成果^[25-28]。但 L-M 算法在航空发动机模型上的应用研究较少^[29-30]。

本文针对航空发动机模型数值计算中出现的计算不稳定现象,将 L-M 算法用于航空发动机模型求解,并提出了利用 Broyden 拟牛顿法加速 L-M 算法,利用动力学方法在动力学方向修正局部解的混合算法,提出了相应的动力学修正准则和混合准则。以两轴分开排气涡扇发动机为对象进行稳态和瞬态计算,并与牛顿法和 Broyden 拟牛顿法对比,验证混合算法的适用性。

1 L-M 算法

1.1 L-M 算法原理

考虑非线性方程组问题

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \quad (1)$$

通常可将上述非线性方程组的求解问题转化为非线性最小二乘问题来求解。非线性最小二乘问题的一般形式为

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n} f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{X})\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (F_i(\mathbf{X}))^2 \quad (2)$$

$$m \geq n$$

式中 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维的实数向量, m 为方程的个数。

$f(\mathbf{X})$ 在点 $\mathbf{X}_k$ 处的二次近似模型为

$$m_k(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{X}_k)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)^T \mathbf{H}_k (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}(\mathbf{X})^T \mathbf{J}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}(\mathbf{X}) \quad (5)$$

从而求解式(1)的牛顿法为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \left(\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{S}(\mathbf{X}_k) \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \quad (6)$$

式中 $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ 为 $\mathbf{X}$ 处的雅可比矩阵, $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 为各个方程组在 $\mathbf{X}$ 处计算得到的向量。

由于 Hessian 矩阵中的 2 阶信息项 $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ 难以计算, 当忽略掉 2 阶信息项后, 得到高斯-牛顿迭代公式

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \left(\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{X}_k) \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \quad (7)$$

高斯-牛顿法是求解非线性最小二乘问题的最基本方法。应用高斯-牛顿法求解非线性最小二乘问题要求在 $\mathbf{X}_k$ 处的雅可比矩阵满秩, 当雅可比矩阵坏条件时, 会引起数值计算上的困难。且高斯-牛顿法在求解大残量问题时, 可能不收敛。在此基础上, Levenberg 与 Marquardt 对高斯-牛顿法进行了改进, 提出了 L-M 算法^[31]。

考虑采用信赖域模型的约束非线性最小二乘问题

$$\begin{cases} \min & \|\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)\| \\ \text{s.t.} & \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_k\| \leq \|\Delta \mathbf{k}\| \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\Delta \mathbf{k}$ 为信赖域半径。上述模型的解可由

$$\left(\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{X}_k) + \lambda_k \mathbf{I} \right) \mathbf{d}_k = -\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \quad (9)$$

来表示, 进而得到 L-M 算法的迭代公式

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \left(\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{X}_k) + \lambda_k \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \quad (10)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵, $\mathbf{d}_k$ 表示在 $\mathbf{X}_k$ 处计算得到的步长, 参数 $\lambda_k \geq 0$ 。参数 λ_k 的引入克服了雅可比矩阵奇异或坏条件带来的困难, 且能够保证 L-M 算法的迭代步始终为迭代的下降方向。观察式(10)可知, 当 λ_k 很大时, L-M 算法转化为最速下降法, 这使得其在迭代初始时具有最速下降法初始下降量大、迭代迅速、鲁棒性强的特点。在迭代末端, λ_k 接

近 0, 则 L-M 算法转化为最小二乘解的高斯-牛顿法, 这使其快速收敛且避免最速下降法的振荡。因此, L-M 算法中的参数 λ_k 不仅影响 $\mathbf{d}_k$ 的方向, 而且影响 $\mathbf{d}_k$ 的大小, 具有良好的适用性。

1.2 L-M 算法收敛性分析

定义 设 $N \in \mathbf{R}^n$ 且满足 $N \cap \mathbf{X}^* \neq \emptyset$, 如果存在常数 $\kappa_{\text{leb}} > 0$, 使得

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{X})\| \geq \kappa_{\text{leb}} \text{dist}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \quad \forall \mathbf{X} \in N \quad (11)$$

则称 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 在 N 内有局部误差界。式中函数 dist 表示 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}^*$ 的距离, $\mathbf{X}^*$ 为 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ 的解集。

如果雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ 在解 $\mathbf{X}^*$ 处非奇异, 则 $\mathbf{X}^*$ 为孤立解, 因此 $\|\mathbf{F}(\mathbf{X})\|$ 在解 $\mathbf{X}^*$ 的某个邻域上提供了局部误差界条件。

定理 假设 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ 为李普希茨连续, 则 L-M 算法全局收敛。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{X}_k)\| = 0 \quad (12)$$

若问题还满足方程 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ 有解, $\lambda_k = u_k \|\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)\|$, 且 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 在解 $\mathbf{X}^*$ 的邻域 $N(\mathbf{X}^*, b)$ 内满足局部误差界条件, 那么 L-M 算法是 2 次收敛的。式中 u_k 为非负调节因子, b 是小于 1 的正常数, 即 $0 < b < 1$ 。

对航空发动机的稳态和瞬态运行状态, 总是存在着孤立解, 这使其满足局部误差界条件。在合理的插值方法下, 满足方程 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 连续可微和 $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ 的 1 阶李普希茨连续。故通过 L-M 算法总能够找到航空发动机非线性方程组的最小二乘解。

在 L-M 算法中, 参数 λ_k 的选择是保证 L-M 算法收敛性的关键。为了确保算法的稳定性和收敛速度, 本文采用 Fan 等^[32] 证明的 λ_k 参数选取方法, 选取 $\lambda_k = \|\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)\|$ 。

1.3 混合算法原理

L-M 算法在每一步仍需通过中心差分法计算雅可比矩阵, 为了充分利用 Broyden 拟牛顿法计算速度快和 L-M 算法的收敛性范围大的优点。本文将 Broyden 拟牛顿法和 L-M 算法结合, 利用 Broyden 拟牛顿加速 L-M 算法; 为避免 L-M 算法陷入局部解, 在 L-M 算法陷入局部解时, 利用动力学方法修正 $\mathbf{X}_k$ 使其跳出局部解。图 1 为混合算法流程图。

图 1 中 $|\det(\mathbf{A}_k)|$ 为当前点采用 Broyden 拟牛顿法更新得到的矩阵的范数, 用于判断矩阵是否奇异, τ 为判断矩阵奇异的阈值。混合算法总是保证

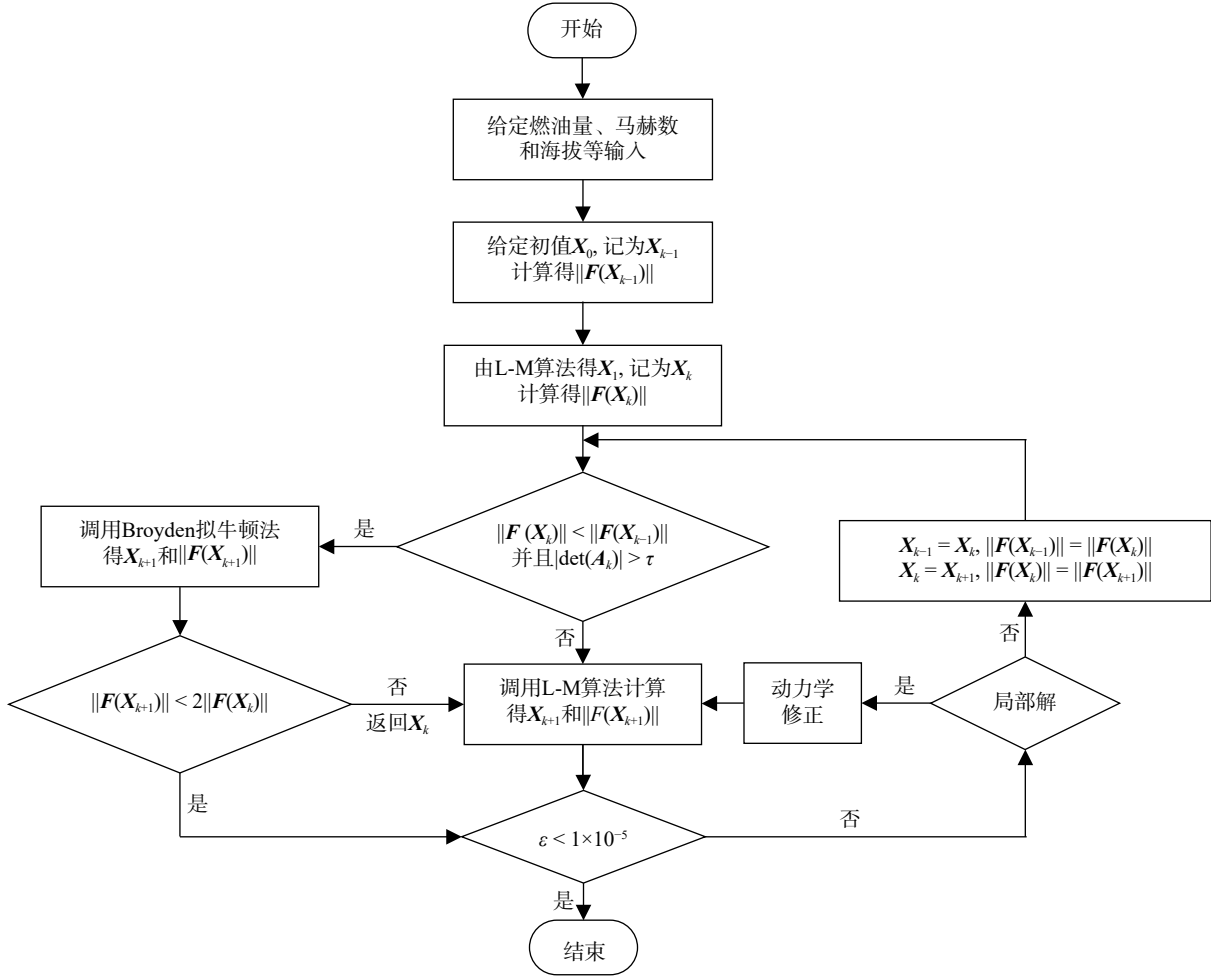


图 1 混合算法流程图

Fig. 1 Flow chart of hybrid algorithm

在残差 ε 下降、迭代矩阵不发生奇异时使用 Broyden 拟牛顿时法,且在 Broyden 拟牛顿时法计算得到的值对应的残差在一定范围时才接受 Broyden 拟牛顿时法的计算结果。

动力学修正原理:发动机在给定初值条件下为质量流量和功率不平衡的不平衡状态,达到收敛解时则为平衡状态,在瞬态计算中没有功率平衡方程。因此发动机模型的求解过程可解释为从不平衡初始状态过渡到平衡状态的过程,这也是容积动力法求解发动机模型的原理,该方法通过动力学微分方程求出步长 $\mathbf{d}_k$,并通过时间推进使质量流量和功率达到平衡得到模型的解。L-M 算法通过梯度计算得到步长 $\mathbf{d}_k$,进而逐渐逼近方程组的解,但当算法陷入局部解时,无法通过梯度求出 $\mathbf{d}_k$ 。本文利用动力学方法在动力学方向修正 L-M 算法使其跳出局部解,但由于动力学计算得到的 $\mathbf{d}_k$ 太小,且 $\mathbf{d}_k$ 太大也会使算法偏离解,因此分别采用后文的式(16)和式(17)确定相对转速 n_r

和压比函数 β 的修正方向,采用式(18)确定 $\mathbf{d}_k$ 的大小。图 2 为动力学修正流程图,流程图中 N 为循环次数, $N_{\max}$ 为一次动力学修正的最大循环次数,函数 sign 表示取符号, t 为时间。

模型使用压比函数 β 和相对转速 n_r 作为迭代变量,因此需求出 β 和 n_r 的动力学方向。压比函数 β 定义如下:

$$\beta = \frac{\pi - \pi_{\min}}{\pi_{\max} - \pi_{\min}} = \frac{\pi}{g(n_{\text{cor}})} - f(n_{\text{cor}}) \quad (13)$$

式中 π 为压比/膨胀比, n_{cor} 为相对折合转速, $\pi_{\min}$ 为某一条折合转速线上的最小压比/膨胀比, $\pi_{\max}$ 为某一条折合转速线上的最大压比/膨胀比。

根据式(13)求导得

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{g(n_{\text{cor}})} \cdot \frac{d\pi}{dt} - \left(\frac{\pi}{[g(n_{\text{cor}})]^2} \cdot \frac{dg}{dn_{\text{cor}}} + \frac{df}{dn_{\text{cor}}} \right) \times \frac{\sqrt{T_{\text{in,d}}}}{n_d} \left(\frac{1}{\sqrt{T_{\text{in}}}} \cdot \frac{dn}{dt} - \frac{1}{2} n T_{\text{in}}^{-\frac{3}{2}} \frac{dT_{\text{in}}}{dt} \right) \quad (14)$$

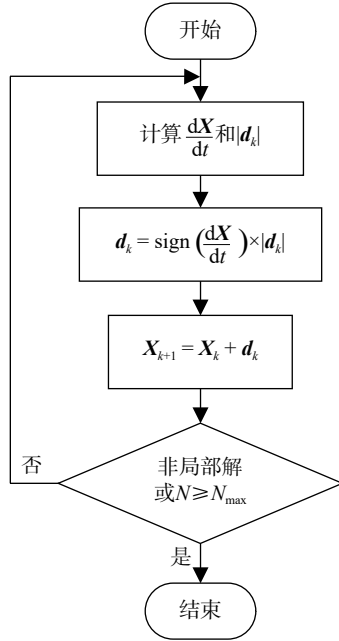


图2 动力学修正流程图

Fig. 2 Flow chart of dynamical modified

式中 T_{in} 为相应容积的进口截面的温度, $T_{in,d}$ 为发动机设计点进口截面的温度, n_d 表示发动机设计点转速。

由式(14)可以看出, 在稳态计算情况下, 若修正所有变量, 由于 n_{cor} 的存在使计算量大幅增加, 因此稳态求解仅修正 n_r 。在瞬态计算中的迭代过程中转速 n 为定值, 又因为在容积动力学中一般忽略 dT/dt , 因此上式可简写为

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{g(n_{cor})} \cdot \frac{d\tau}{dt} \quad (15)$$

根据转子动力学方程和式(15)可得计算中各参数的修正方向。

稳态计算相对转速的修正方向为

$$\text{sign}\left(\frac{dn_r}{dt}\right) = \text{sign}\left(\frac{dn}{dt}\right) \quad (16)$$

瞬态计算 β 的修正方向为

$$\text{sign}\left(\frac{d\beta}{dt}\right) = \begin{cases} \text{sign}\left(p_{in} \frac{dp_{out}}{dt} - p_{out} \frac{dp_{in}}{dt}\right) & \text{压气机} \\ \text{sign}\left(p_{out} \frac{dp_{in}}{dt} - p_{in} \frac{dp_{out}}{dt}\right) & \text{涡轮} \end{cases} \quad (17)$$

式中 p_{in} 和 p_{out} 分别表示容积的进口压力和出口压力。

动力学方向修正值为

$$|d_k| = \begin{cases} |X_0 - X_k| \times \frac{\|F(X_k)\|}{\|F(X_0)\|} & \frac{\|F(X_k)\|}{\|F(X_0)\|} > 0.2 \\ 0.2 \times |X_0 - X_k| & \text{其他} \end{cases} \quad (18)$$

式中 X_0 为初值, X_k 为当前迭代变量值。

2 航空发动机模型

典型带有增压级的大涵道比分开排气涡扇发动机主要由进气道、风扇、增压级压气机、高压压气机、燃烧室、高压涡轮、低压涡轮和喷管组成, 如图3所示, 图中N1表示发动机的高压转子, N2表示低压转子, 图中的编号表示发动机主要截面。在各个部件特性已知的情况下, 可建立详细的涡扇发动机部件级性能仿真模型。对如图3所示发动机, 在发动机运行达到稳定状态后, 具有如式(19)所示的质量流量和功率平衡关系

$$\begin{cases} \Delta_1 = (q_{m,16} - q_{m,18}) / q_{m,16} = 0 \\ \Delta_2 = (q_{m,25} - q_{m,3} - q_{m,bleed}) / q_{m,25} = 0 \\ \Delta_3 = (q_{m,41} - q_{m,43}) / q_{m,41} = 0 \\ \Delta_4 = (q_{m,45} - q_{m,49}) / q_{m,45} = 0 \\ \Delta_5 = (q_{m,6} - q_{m,8}) / q_{m,6} = 0 \\ \Delta_6 = (p_{lpt}\eta_{lp} - p_{lpc}) / p_{lpt} = 0 \\ \Delta_7 = (p_{hpt}\eta_{hp} - p_{hpc} - p_{ex}) / p_{hpt} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

式中 $q_{m,16}$ 、 $q_{m,25}$ 、 $q_{m,41}$ 、 $q_{m,45}$ 、 $q_{m,6}$ 分别为外涵喷管、高压压气机、高压涡轮、低压涡轮、内涵喷管进口计算质量流量; $q_{m,18}$ 、 $q_{m,3}$ 、 $q_{m,43}$ 、 $q_{m,49}$ 、 $q_{m,8}$ 分别为外涵喷管、高压压气机、高压涡轮、低压涡轮、内涵喷管出口计算质量流量; $q_{m,bleed}$ 为高压压气机压间引气量; p_{lpt} 、 p_{lpc} 、 p_{hpt} 、 p_{hpc} 、 p_{ex} 分别为低压涡轮产生功、低压压气机(包含增压级和风扇)消耗功、高压涡轮产生功、高压压气机消耗功、高压轴功率提取功; η_{hp} 、 η_{lp} 分别为高压轴、低压轴效率。

在给定初值 X_0 时将上述平衡方程转化为残差方程如下:

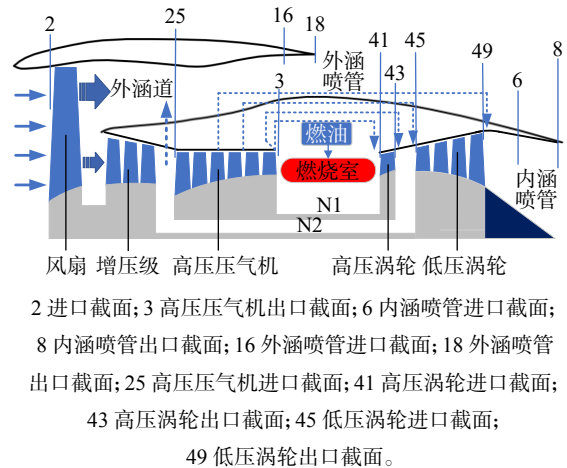


图3 分开排气涡扇发动机简图

Fig. 3 Simplified diagram of a separate exhaust turbofan engine

$$\varepsilon_i = \Delta_i = F_i(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) \quad (20)$$

其中 $X_1 \sim X_7$ 分别为风扇压比函数 β_{fan} 、低压压气机压比函数 β_{lpc} 、高压压气机压比函数 β_{hpc} 、高压涡轮膨胀比函数 β_{hpt} 、低压涡轮膨胀比函数 β_{lpt} 、低压转子相对转速 n_1 、高压转子相对转速 n_2 。表 1 为迭代变量范围限制。

表 1 迭代变量范围

Table 1 Range of iteration variables

迭代变量	最小值	最大值
β_{fan}	0	1
β_{lpc}	0	1
β_{hpc}	0	1
β_{hpt}	0	1
β_{lpt}	0	1
n_1	0.001	1.2
n_2	0.001	1.2

为了使用 L-M 算法求解发动机的平衡方程, 将平衡残差方程转化为非线性最小二乘问题, 构造目标函数为

$$\varepsilon(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{2} \|\varepsilon_i\|^2 \quad (21)$$

式中 $\mathbf{X}$ 为待求解的变量, ε 为迭代残差限, 本文设定 $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ 。

在发动机的动态计算中, 由于各部件的容积较小, 且气动过程参数变化比转速变化快得多, 因此不考虑部件的容积效应, 认为部件的进出口质量流量仍满足平衡关系。此时的功率守恒方程转化为式(22)和式(23)转子动力学方程。在混合算法中, 为了实现局部解的修正, 引入部件的容积效应, 容积动力学方程如式(24)。

$$\frac{dn_l}{dt} = \frac{1}{J_l} \cdot \frac{1}{n_l} \left(\frac{30}{\pi} \right)^2 (p_{lpt} \eta_{lp} - p_{lpc}) \quad (22)$$

$$\frac{dn_h}{dt} = \frac{1}{J_h} \cdot \frac{1}{n_h} \left(\frac{30}{\pi} \right)^2 (p_{hpt} \eta_{hp} - p_{hpc} - p_{ex}) \quad (23)$$

$$\frac{dp_{out}}{dt} = (q_{m,in} - q_{m,out}) \frac{\gamma RT}{V} \quad (24)$$

式中 n_l 和 n_h 分别表示低压转子转速和高压转子转速, J_l 和 J_h 分别表示低压转子的转动惯量和高压转子的转动惯量, γ 、 R 、 T 、 V 分别表示比热比、气体常数、温度、容积体积, $q_{m,in}$ 和 $q_{m,out}$ 分别表示容积进口质量流量和出口质量流量。

3 数值仿真

3.1 稳态仿真

为了验证 L-M 算法和混合算法在航空发动机模型计算中的可行性, 选取 2 个典型工况点(最大推力和巡航工况)作为验证点。在相同的工况下, 通过给定不同的初值来验证 L-M 算法和混合算法的适用性。具体表现为给定参数 $\mathbf{X}$ 的每个变量相对于稳态求解得到的值的偏差量, 其相对偏差量定义如式(25)。选取相对偏差量 R_{el} 变化范围为 $-0.8 \sim 0.8$ 的大范围区间, 并与牛顿法和 Broyden 拟牛顿法的计算效果进行对比, 计算结果见表 2 和表 3, 表中 H 为高度, Ma 为马赫数。表中每列中, 括号内和括号外的数据分别对应。

$$R_{el} = \frac{X_i - X_i^*}{X_i^*} \quad (25)$$

式中 X_i 为迭代初值, X_i^* 为稳态计算结果值。

由表 2 和表 3 可以看出, 当初值距离稳态值较近, 4 种算法均能够达到收敛, 且 Broyden 拟牛

表 2 最大推力工况 ($H=0$ m, $Ma=0$)Table 2 Maximum thrust operation point ($H=0$ m, $Ma=0$)

R_{el} 值	牛顿法		Broyden 拟牛顿法		L-M 算法		混合算法	
	是否收敛	调动次数	是否收敛	调动次数	是否收敛	调动次数	是否收敛	调动次数
-0.1(0.1)	是(是)	61(76)	是(是)	24(23)	是(是)	76(91)	是(是)	24(24)
-0.2(0.2)	是(是)	91(91)	是(是)	31(24)	是(是)	91(106)	是(是)	43(37)
-0.3(0.3)	是(是)	-(106)	否(是)	-(27)	是(是)	121(121)	是(是)	40(53)
-0.4(0.4)	否(否)		否(是)	-(32)	是(是)	121(136)	是(是)	45(68)
-0.5(0.5)	否(否)		否(否)		是(是)	136(151)	是(是)	57(84)
-0.6(0.6)	否(否)		否(否)		是(是)	196(151)	是(是)	86(85)
-0.7(0.7)	否(否)		否(否)		是(是)	256(181)	是(是)	116(100)
-0.8(0.8)	否(否)		否(否)		是(是)	256(181)	是(是)	148(116)

表 3 巡航工况 ($H=11\,000\text{ m}$, $Ma=0.8$)

Table 3 Cruising operating point ($H=11\,000\text{ m}$, $Ma=0.8$)

R_{el} 值	牛顿法		Broyden 拟牛顿法		L-M 算法		混合算法	
	是否收敛	调动次数	是否收敛	调动次数	是否收敛	调动次数	是否收敛	调动次数
-0.1(0.1)	是(是)	61(61)	是(是)	22(22)	是(是)	91(61)	是(是)	23(22)
-0.2(0.2)	是(是)	61(61)	是(是)	27(23)	是(是)	106(91)	是(是)	27(23)
-0.3(0.3)	是(是)	91(91)	是(是)	36(26)	是(是)	121(106)	是(是)	35(39)
-0.4(0.4)	是(是)	91(121)	是(是)	56(34)	是(是)	136(121)	是(是)	46(54)
-0.5(0.5)	否(否)		否(否)		是(是)	151(151)	是(是)	64(69)
-0.6(0.6)	否(否)		否(否)		是(是)	151(166)	是(是)	74(85)
-0.7(0.7)	否(否)		否(否)		是(是)	166(181)	是(是)	92(100)
-0.8(0.8)	否(否)		否(否)		是(是)	151(196)	是(是)	117(116)

顿法的部件调动次数最少。但当偏差继续增大时, Broyden 拟牛顿法和牛顿法均不能达到收敛, 且会造成计算崩溃并使迭代计算过程中断。其中牛顿法和 Broyden 拟牛顿法的收敛范围均为 $\pm 40\%$ 左右, 但 L-M 算法和混合算法在设定的范围内都能够达到收敛。在 4 种方法都收敛的范围内, L-M 算法的部件调动次数略多于牛顿法, 混合算法的部件调动次数远低于 L-M 算法, 且在小偏差输入时部件调动次数与 Broyden 拟牛顿法基本相同, 但收敛范围远高于 Broyden 拟牛顿法。这是因为在小偏差输入时 Broyden 拟牛顿法占主导地位。在大偏差时, Broyden 拟牛顿法在残差降低时介入, 其他情况则依赖于 L-M 算法更强的收敛范围和计算稳定性。这使得混合算法能够在更大的范围内收敛的同时具有更快的计算速度。

为了进一步对比牛顿法、Broyden 拟牛顿法、L-M 算法和混合算法在极端初始条件下的计算特性, 在参数 $\mathbf{X}$ 限定的范围内随机生成 100 个向量

作为初值 $\mathbf{X}_0$ 。同时通过 1 000 个随机向量 $\mathbf{X}_0$ 进一步对比 L-M 算法和混合算法的收敛性差异。图 4 为随机初值 $\mathbf{X}_0$ 对应的残差分布情况, 图中横坐标为对应初值的残差, 左纵坐标为相应残差区间的随机样本数量, 右纵坐标为对应残差区间随机样本数量的累计百分比。表 4 为随机输入条件下的计算结果对比, 表 4 设定部件调动次数大于 500 时为不收敛点。

由图 4 可以看出, 在随机给定初值条件下, 初始值的残差呈现不均匀分布状态, 能够模拟极端初始计算条件。从表 4 可以看出, 在 100 个随机初值输入条件下, 牛顿法的收敛率为 19%, Broyden 拟牛顿法的收敛率为 7%, 且有小部分陷入局部解, 两者大部分初值输入都会造成计算崩溃并中断计算。L-M 算法和混合算法的收敛率都超过 90%, L-M 算法有少量初值陷入局部解, 但混合算法能够通过动力学修正避免陷入局部解, 两者都仅有少部分点计算中断。从 1 000 个随机初值

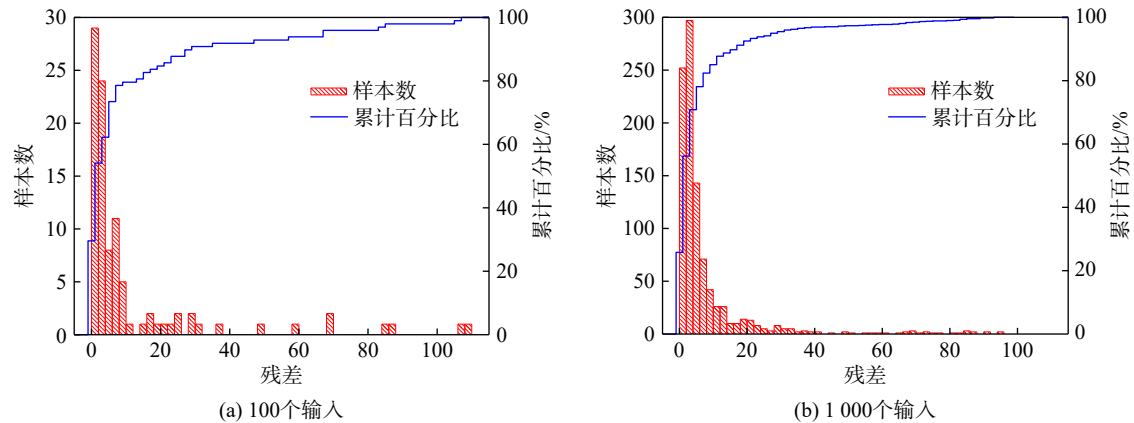


图 4 随机输入残差分布情况

Fig. 4 Residual distribution of random input

表 4 随机输入计算结果对比

Table 4 Comparison of random input calculation results

样本数	方法	最大部件 调动次数	最小部件 调动次数	平均部件 调动次数	中断数	不收敛解 个数	收敛解 个数
100	牛顿法	136	76	100	81	0	19
	Broyden 拟牛顿法	50	27	35	86	7	7
	L-M 算法	391	106	200	5	4	91
	混合算法	375	38	102	5	0	95
1 000	L-M 算法	496	91	213	59	38	903
	混合算法	499	23	112	60	4	936

输入对比可以看出,混合算法能够在大多数 L-M 算法陷入局部解的初值点达到收敛,相比 L-M 算法具有更好的收敛性,能够有效地通过动力学修正避免陷入算法局部解,并快速达到收敛。L-M 算法的部件调动次数最多,明显高于混合算法。混合算法的平均部件调动次数接近 Broyden 拟牛顿法的 3 倍,仅为 L-M 算法的一半左右,但混合算法的最低部件调动次数与 Broyden 拟牛顿法基本相同。这是因为在 Broyden 拟牛顿法不能收敛的区域初值条件更加恶劣,本身部件调动次数较多,同时能够通过 Broyden 拟牛顿法加速减少部件调动次数。随机初值充分体现了 L-M 算法和混合算法相比于牛顿法和 Broyden 拟牛顿法在极端初值条件下更强的收敛性,体现了混合算法相比于 L-M 算法更快的计算速度和避免算法陷入局部解的能力。

3.2 动态仿真

航空发动机瞬态计算过程中对发动机模型计算实时性要求较高,为了验证 L-M 算法和混合算法在航空发动机瞬态计算中的效果,将燃油输入做阶跃输入信号,选取时间步长 $\Delta t = 0.05 \text{ s}$,分别将牛顿法、Broyden 拟牛顿法、L-M 算法和混合算法在动态仿真中的特性进行对比。

以发动机模型燃油量在设计点分别做 50% 和 60% 的阶跃作为燃油量瞬态输入(记为工况 1 和工况 2),分析 4 种算法的收敛特性。图 5 为燃油输入变化曲线,纵坐标 W_f 为相对设计点燃油百分比。图 6 为 4 种算法在 50% 燃油阶跃下各时刻部件调动次数对比。图 7、图 8 分别为 4 种算法在 60% 燃油阶跃下各时刻部件调动次数和计算时间对比。表 5 为在 60% 燃油阶跃输入情况下的 4 种算法的计算总时间和相对计算时间。

从图 6 可以看出,在时间 $t = 0 \sim 3.05 \text{ s}$ 区间,4

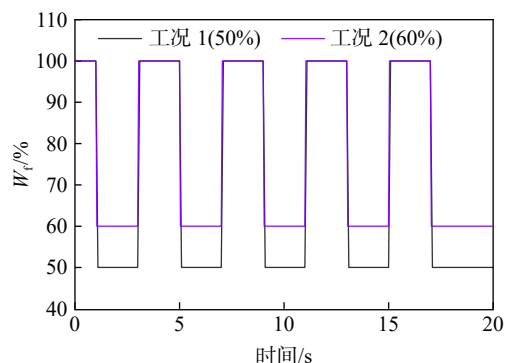


图 5 燃油阶跃输入信号

Fig. 5 Fuel step input signal

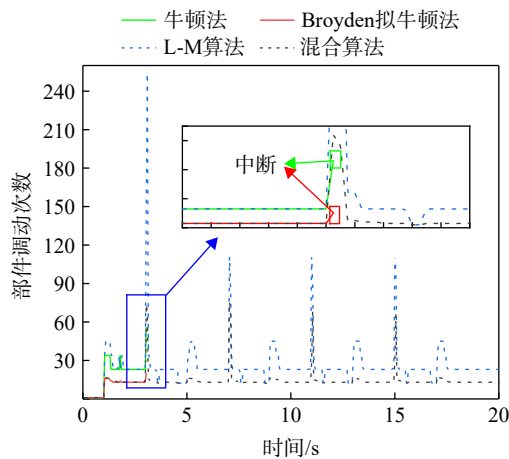


图 6 部件调动次数对比(工况 1)

Fig. 6 Comparison of iterations number (case 1)

种算法都能够达到收敛,且牛顿法与 L-M 算法的部件调动次数基本相同,Broyden 拟牛顿法与混合算法部件调动次数基本相同。在 $t = 3.05 \text{ s}$ 时,牛顿法和 Broyden 拟牛顿法都因为计算不收敛而使计算中断,但 L-M 算法和混合算法仍能够收敛,且混合算法的部件调动次数远低于 L-M 算法。在 $t > 3.05 \text{ s}$ 时,混合算法的部件调动次数明显低于 L-M 算法。这表明混合算法具有 L-M 算法良

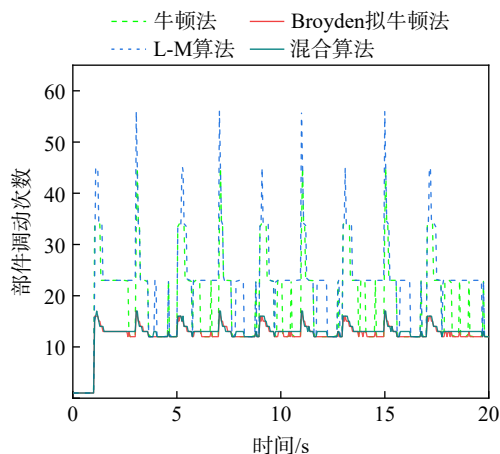


图7 部件调动次数对比(工况2)

Fig. 7 Comparison of iteration number (case 2)

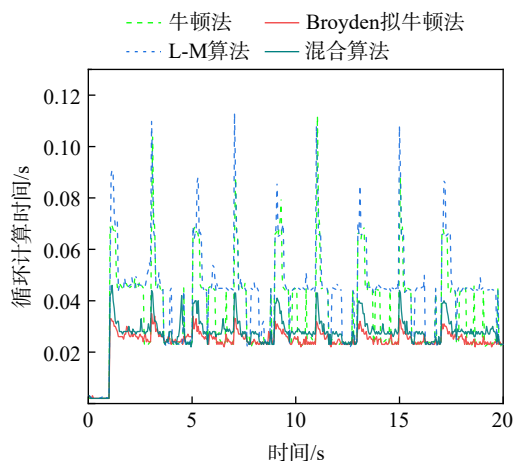


图8 循环计算时间对比(工况2)

Fig. 8 Comparison of cycle computation time (case 2)

表5 总计算时间和相对计算时间(工况2)

Table 5 Total computation time and relative computation time (case 2)

计算方法	总时间/s	相对计算时间
牛顿法	13.80	1.43
Broyden 拟牛顿法	9.66	1
L-M 算法	16.92	1.75
混合算法	10.92	1.13

好的收敛性的同时具有 Broyden 拟牛顿法计算速度快的优点。

从图7、图8和表5可以看出,在60%燃油阶跃输入信号下,4种算法都能够在每一时刻都收敛的情况下快速地完成计算。其中L-M算法与牛顿法的部件调动次数基本相同,L-M算法在突变处部件调动次数比牛顿法略多,Broyden拟牛顿法的部件调动次数与混合算法基本相同。从计

算时间上看,L-M算法的计算时间最长,比牛顿法略慢,混合算法的循环计算时间和总时间都比Broyden拟牛顿法略长,瞬态计算总时间仅为Broyden拟牛顿法的1.13倍,体现了混合算法的计算速度远快于牛顿法和L-M算法且与Broyden拟牛顿法相当。

4 结论

本文将航空发动机模型的非线性方程组求解转化为非线性最小二乘优化问题,将L-M算法用于模型求解,选取L-M算法参数 $\lambda_k = \|F(X_k)\|$ 。提出了利用Broyden拟牛顿法加速L-M算法,利用动力学方法在动力学方向修正局部解的混合算法。以两轴分开排气涡扇发动机为对象对L-M算法和混合算法进行了稳态和瞬态仿真研究,验证了L-M算法和混合算法在航空发动机模型求解上的适用性。

1) L-M算法比牛顿法和Broyden拟牛顿法具有更大的收敛范围和计算稳定性,且在相同的收敛范围内,收敛速度与牛顿法基本相同。这是因为L-M算法参数 λ_k 的引入影响了 d_k 的大小和方向,且避免了因雅可比矩阵接近奇异使计算中断的情况。

2) 将方程组迭代求解和发动机动力学过程结合。在L-M算法陷入局部解时,通过动力学方法在动力学方向上修正 X ,使其跳出局部解并迅速达到收敛,降低了方程组求解陷入局部解的可能性。

3) 本文提出的混合算法在具有L-M算法收敛范围大、计算稳定性强的同时,兼具Broyden拟牛顿法计算速度快的优点,同时通过动力学方法降低了算法陷入局部解的可能性。混合算法的计算速度明显快于牛顿法和L-M算法,与Broyden拟牛顿法计算速度相当,且收敛性高于上述3种算法,能够适用于航空发动机非线性模型求解。

参考文献:

- [1] 施洋,屠秋野,严红明,等.一种航空发动机全状态性能模型[J].航空动力学报,2017,32(2):373-381.
SHI Yang, TU Qiuye, YAN Hongming, et al. A full states performance model for area engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(2): 373-381. (in Chinese)
- [2] 曹建国.航空发动机仿真技术研究现状、挑战和展望[J].推进技术,2018,39(5):961-970.
CAO Jianguo. Status, challenges and perspectives of aero-engine simulation technology[J]. Journal of Propulsion Technology, 2018, 39(5): 961-970. (in Chinese)

- [3] 周文祥, 黄金泉, 窦建平. 涡扇发动机部件级启动模型[J]. 航空动力学报, 2006, 21(2): 248-253.
ZHOU Wenxiang, HUANG Jinquan, DOU Jianping. Development of component-level startup model for a turbofan engine[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2006, 21(2): 248-253. (in Chinese)
- [4] 苟学中, 周文祥, 黄金泉. 变循环发动机部件级建模技术[J]. 航空动力学报, 2013, 28(1): 104-111.
GOU Xuezhong, ZHOU Wenxiang, HUANG Jinquan. Component-level modeling technology for variable cycle engine[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(1): 104-111. (in Chinese)
- [5] 陈玉春, 徐思远, 杨云铠. 改善航空发动机特性计算收敛性的方法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(12): 2242-2248.
CHEN Yuchun, XU Siyuan, YANG Yunkai. Research on the method to solve convergence problem in aero turbo engine performance computation[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(12): 2242-2248. (in Chinese)
- [6] 陈玉春, 徐思远, 屠秋野, 等. 求解航空发动机非线性方程组的变步长牛顿法[J]. 航空计算技术, 2009, 39(1): 39-41.
CHEN Yuchun, XU Siyuan, TU Qiuye, et al. Solving aeroengine nonlinear equations based on variable step size Newton method[J]. *Aeronautical Computing Technique*, 2009, 39(1): 39-41. (in Chinese)
- [7] 王元, 李秋红, 黄向华. 基于自校正Broyden拟牛顿法的航空发动机模型数值计算[J]. 航空动力学报, 2016, 31(1): 249-256.
WANG Yuan, LI Qiuhong, HUANG Xianghua. Numerical calculation of area-engine model based on self-tuning Broyden quasi-Newton method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2016, 31(1): 249-256. (in Chinese)
- [8] 朱正琛, 李秋红, 王元, 等. 基于微分进化算法的航空发动机模型修正[J]. 航空发动机, 2016, 42(1): 53-58.
ZHU Zhengchen, LI Qiuhong, WANG Yuan, et al. Correction of aeroengine model based on differential evolution algorithm[J]. *Aeroengine*, 2016, 42(1): 53-58. (in Chinese)
- [9] 苏三买. 遗传算法及其在航空发动机非线性数学模型中的应用研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.
SU Sanmai. Research on genetic algorithm and its application in nonlinear mathematical model of aeroengine[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2002. (in Chinese)
- [10] 苏三买, 廉小纯. 遗传算法在航空发动机非线性数学模型中的应用[J]. 推进技术, 2004(3): 237-240.
SU Sanmai, LIAN Xiaochun. Application of genetic algorithm in aeroengine nonlinear mathematical models[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2004(3): 237-240. (in Chinese)
- [11] 钱海鹰, 杨培源, 徐松林. 基于粒子群算法的发动机部件模型求解[J]. 推进技术, 2012, 33(6): 974-980.
QIAN Haiying, YANG Peiyuan, XU Songlin. Application of particle swarm optimization in obtaining solution of aeroengine component-level model[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2012, 33(6): 974-980. (in Chinese)
- [12] 黄飞燕, 黄洲荣, 陈洪骏. 基于粒子群算法的变循环发动机部件法建模及优化[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(14): 107-116.
HUANG Feiyan, HUANG Zhourong, CHEN Hongjun. Application of particle swarm optimization on modeling and optimization of variable cycle engine component-level model[J]. *Mathematical in Practice and Theory*, 2014, 44(14): 107-116. (in Chinese)
- [13] 郝旺, 王占学, 张晓博, 等. 基于自适应差分进化算法的变循环发动机模型求解方法研究[J]. 推进技术, 2021, 42(9): 1-11.
HAO Wang, WANG Zhanxue, ZHANG Xiaobo, et al. Solving variable cycle engine model based on adaptive differential evolution algorithm[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2021, 42(9): 1-11. (in Chinese)
- [14] 苏三买, 陈永琴. 基于混合遗传算法的航空发动机数学模型解法[J]. 推进技术, 2007(6): 661-664.
SU Sanmai, CHEN Yongqin. Hybrid genetic algorithm in solving aeroengine nonlinear mathematical model[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2007(6): 661-664. (in Chinese)
- [15] 王军, 隋岩峰. 求解航空发动机数学模型的迭代算法及其改进算法的收敛性研究[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(2): 310-314.
WANG Jun, SUI Yanfeng. Study on convergence and improvement of iteration methods in aero-engine mathematical models[J]. *Journal of System Simulation*, 2014, 26(2): 310-314. (in Chinese)
- [16] 白洋, 段黎明, 柳林, 等. 基于改进的混合粒子群算法的变循环发动机模型求解[J]. 推进技术, 2014, 35(12): 1694-1700.
BAI Yang, DUAN Liming, LIU Lin, et al. Solving variable cycle engine model based on improved hybrid particle swarm optimization[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2014, 35(12): 1694-1700. (in Chinese)
- [17] 肖红亮, 李华聪, 李嘉, 等. 基于QPSO混合算法的变循环发动机建模方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2018, 44(2): 305-315.
XIAO Hongliang, LI Huachong, LI Jia, et al. Modeling method of variable cycle engine based on QPSO hybrid algorithm[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2018, 44(2): 305-315. (in Chinese)
- [18] 唐世建, 童万军. 基于容积法的某涡扇发动机动态建模方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(3): 709-713.
TANG Shijian, TONG Wanjun. Turbofan engine transient modeling based on inter-component volume method[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(3): 709-713. (in Chinese)
- [19] 黄开明, 黄金泉, 刘杰, 等. 基于无迭代解法的航空发动机实时模型[J]. 航空发动机, 2004(2): 35-38.
HUANG Kaiming, HUANG Jinquan, LIU Jie, et al. An aeroengine real time model based on non-iterative method[J]. *Aeroengine*, 2004(2): 35-38. (in Chinese)
- [20] FAWKE A J, SARAVANAMUTTOO H. Digital computer simulation of the dynamic response of a twin-spool turbofan with mixed exhaust[J]. *Aeronautical Journal*, 1973, 77(753): 471-478.
- [21] 杨刚, 孙健国, 黄向华, 等. 一种不需要迭代的发动机辅助变量建模方法[J]. 航空动力学报, 2003, 18(2): 289-294.
YANG Gang, SUN Jianguo, HUANG Xianghua, et al. A non-iterative method of aero-engine modeling using complementary variables[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2003, 18(2): 289-294. (in Chinese)
- [22] RAHMAN N U, WHIDBORNE J F. Real-time transient three spool turbofan engine simulation: a hybrid approach[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, 131(5): 051602.1-051602.8.
- [23] ROBERTS R A, EASTBOURN S M. Modeling techniques for a computational efficient dynamic turbofan engine model[J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2014, 2014: 283479.1-283479.11.
- [24] SANGHI V, LAKSHMANAN B K. Timescaling control volumes during real time digital simulation of a military turbofan[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2012, 18(4): 964-966.

- [25] FAN J Y. The modified Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations with cubic convergence[J]. *Mathematics of Computation*, 2012, 81(277): 447-466.
- [26] FAN J Y. Accelerating the modified Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations[J]. *Mathematics of Computation*, 2014, 83(287): 1173-1187.
- [27] CHEN L. A high-order modified Levenberg-Marquardt method for systems of nonlinear equations with fourth-order convergence[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 285: 79-93.
- [28] YANG X. A higher-order Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(22): 10682-10694.
- [29] 尹大伟. 航空发动机模型求解算法及性能寻优控制中的参数估计研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2011.
- YI Dawei. Algorithms for solving aeroengine nonlinear mathematical model and parameter estimation in performance-seeking control[D]. Changsha: Graduate School of National University of Defense Technology, 2011. (in Chinese)
- [30] LU J, LU F, HUANG J. Performance estimation and fault diagnosis based on Levenberg-Marquardt algorithm for a turbofan engine[J]. *Energies*, 2018, 11(1): 181-198.
- [31] 范金燕, 袁亚湘. 非线性方程组数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [32] FAN J Y, YUAN Y X. On the quadratic convergence of the Levenberg-Marquardt method without non-singularity assumption[J]. *Computing*, 2005, 74(1): 23-39.

(编辑: 王碧琚、秦理曼)