

角度-空间间断有限元的热辐射限制器

李思达¹, 孙亚松^{1,2}, 郑澳洲¹, 马 菁³

(1. 西北工业大学 动力与能源学院 基础研究中心, 西安 710072;

2. 西北工业大学 太仓长三角研究院 计算物理与能源科学中心, 江苏 太仓 215400;

3. 长安大学 汽车学院 陕西省交通新能源开发应用与汽车节能重点实验室, 西安 710064)

摘 要: 由于航空发动机内高温热端部件是非规则形状的, 其中的热辐射过程存在明显的间断遮蔽效应, 如何实现该过程的精准模拟是一个挑战。采用间断有限元对辐射传递方程中角度和空间计算域进行离散, 并基于分层限制的思想在角度和空间单元上引入巴斯-叶斯帕森限制器, 对辐射强度数值解在角度和空间上的非物理振荡进行抑制。通过与文献中有限体积法和蒙特卡洛辐射模型的结果对比, 证明了方法的有效性。此外, 通过与辐射强度在角度上的解析解对比, 验证了该限制器可以抑制辐射间断效应造成的数值振荡, 消除辐射强度的非物理解。实现了任意空间位置上辐射强度在角度方向上的三维刻画。

关 键 词: 热辐射; 间断遮蔽效应; 间断伽辽金有限元; 巴斯-叶斯帕森限制器; 角度和空间单元

中图分类号: V231.1

文献标志码: A

Thermal radiation limiter based on angle-space discontinuous finite element

LI Sida¹, SUN Yasong^{1,2}, ZHENG Aozhou¹, MA Jing³

(1. Basic Research Center, School of Power and Energy,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Center of Computational Physics and Energy Science, Yangtze River Delta Research Institute,

Northwestern Polytechnical University, Taicang Jiangsu 215400, China;

3. Key Laboratory of Shaanxi Province for Development and Application of New Transportation Energy, School of Automobile, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: Due to the irregular shape of the high-temperature hot components in the aero-engine, the heat radiation process has obvious discontinuous and shielding effects, and how to achieve accurate simulation of this process is a challenge. Using discontinuous finite element to discretize the angle and space domain in the radiation transfer equation, and based on the hierarchical limiting strategy, the Barth-Jespersen limiter was introduced in the angle and space domain to suppress the non-physical oscillation of the radiation intensity numerical solution in the angle and space. By comparing with the results of the finite volume method and the Monte Carlo method in the literature, the validity of the method was proved. In addition, by comparing with the angular analytical solution of radiation intensity, it was verified that the limiter can effectively suppress the numerical oscillation caused by the radiation discontinuity effect, and can eliminate the nonphysical solution of radiation intensity. The three-dimensional characterization of the radiation intensity in the angular domain at any spatial position was realized.

收稿日期: 2021-07-14

基金项目: 国家自然科学基金(51976173, 51976014); 江苏省自然科学基金(BK20201204)

作者简介: 李思达(1998—), 男, 硕士生, 主要从事航空发动机内高温热辐射研究。

通信作者: 孙亚松(1986—), 男, 副教授、博士生导师, 博士, 主要从事航空发动机内高温传热传质研究。E-mail: yssun@nwpu.edu.cn

引用格式: 李思达, 孙亚松, 郑澳洲, 等. 角度-空间间断有限元的热辐射限制器[J]. 航空动力学报, 2022, 37(12): 2865-2874. LI Sida, SUN Yasong, ZHENG Aozhou, et al. Thermal radiation limiter based on angle-space discontinuous finite element[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(12): 2865-2874.

Keywords: thermal radiation; discontinuous and shielding effect;
discontinuous Galerkin finite element; Barth-Jespersen limiter;
angle and space elements

近些年来高温热辐射在工程实践中得到了广泛应用^[1-3],其应用环境越来越复杂。例如航空发动机内高压涡轮导向叶片表面燃气的热辐射过程^[4-6],与导热和对流不同,存在明显的方向性,在不同方向上存在明显的间断遮蔽效应。如何实现高温热辐射精准分析一直是一项工程难题。目前,常用的热辐射数值计算方法主要有两类:一类是基于拉格朗日坐标的热辐射方法,如蒙特卡洛法(Monte Carlo method, MCM)^[7-9]。该类方法具有计算精度高、对复杂区域适应性好的优点,但也存在计算量大、与流动传热不易耦合计算等限制。另一类是基于欧拉坐标的热辐射方法,如离散坐标法(discrete ordinate method, DOM)^[10]、有限体积法(finite volume method, FVM)^[11]、有限元法(finite element method, FEM)^[12-13]、谱方法(spectral methods, SM)^[14-16]等。该类方法具有计算简单、易与对流传热耦合计算等优点,但也容易带来假散射和射线效应^[11,17]。

Howell 等^[18]指出非规则区域内热辐射计算依然存在很多问题和挑战,传统方法求解非规则区域热辐射时,温度分布会有很大数值振荡。Zabihi 等^[19]采用有限体积法求解辐射传热出现了数值波动问题。这是由于复杂区域内辐射强度在空间上不连续造成的数值不稳定。赵军明和刘林华^[20-21]在空间上采用间断伽辽金法(discontinuous Galerkin, DG)构建了辐射在空间上的分段高阶模型,通过模拟通量实现单元之间的迎风间断,可以有效抑制温度和辐射热流在空间的振荡问题。王存海等^[22]同样采用该方法计算了辐射与导热耦合传热问题。上述研究表明,在热辐射计算过程中,有必要在空间上引入间断迎风方案。但是,前人的研究工作均是在空间上进行改进,而在角度上依然采用传统的离散坐标法。实际上辐射强度在角度上的分布也是变化剧烈的。在角度上采用低阶离散坐标模型,会带来由于离散方向不足而引起的射线效应,影响计算精度。所以,在角度上采用分片高阶算法十分有必要。此外,对于遮蔽问题带来的强数值间断,又迫切需求辐射模型能够有效捕捉到这种数值间断。因此,本文将间断伽辽金思想引入到辐射角度计算,从而实现在角度离散的分片高阶间断方案。构建了间断有

限元法(discontinuous finite element method, DFEM)求解辐射传递方程模型。

由于角度和空间均采用了高阶的数值方法,在辐射强度分布不连续的单元中,会出现非物理的振荡问题。这给热辐射强度分布的精确刻画带来了很大困难。限制器可有效抑制高阶数值振荡,目前已经在空气动力学中得到广泛应用^[23-25]。其中,Barth-Jespersen(BJ)限制器作为典型的激波限制器^[26]是由 Barth 和 Jespersen 提出的一种保证函数单调性的斜率限制器。Biswas 等^[27]基于分层限制思想,改进了 BJ 限制器,使其能够应用到高阶数值解中。本文在角度空间单元上开发了一种基于分层限制思想和 BJ 限制器的热辐射限制器。通过与文献结果和解析解对比,检测其性能。

1 控制方程及数值模型

1.1 物理模型

参与性介质内的辐射传递方程是描述辐射强度在空间和角度上传输的变化规律。它是一个关于空间(3 维)、角度(2 维)和波长(1 维)的多维微分-积分方程^[28]。

$$\mathbf{s} \cdot \nabla I_{\lambda}(r, \mathbf{s}) = \beta_{\lambda}(1 - \omega_{\lambda}) I_{b,\lambda} - \beta_{\lambda} I_{\lambda}(r, \mathbf{s}) + \beta_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_{\lambda}(r, \mathbf{s}') \Phi_{\lambda}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') d\Omega' \quad (1)$$

式中 λ 是波长, I_{λ} 是波长为 λ 的光谱辐射强度, $I_{b,\lambda}$ 是光谱黑体辐射强度, $\mathbf{s}$ 是辐射能的传播方向向量, $\mathbf{s}'$ 表示 $\mathbf{s}$ 的数值, $\beta_{\lambda} = k_{a,\lambda} + k_{s,\lambda}$ 是光谱衰减系数,为光谱吸收系数 $k_{a,\lambda}$ 和光谱散射系数 $k_{s,\lambda}$ 之和, $\Phi_{\lambda}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ 是光谱散射相函数, $\omega_{\lambda} = k_{s,\lambda}/\beta_{\lambda}$ 为光谱散射反照率, r 是空间位置坐标, Ω' 是角度积分时的角度变量。对于二维空间灰体介质,上述方程可以简化为

$$\mu^s \frac{\partial I(r, \mathbf{s})}{\partial x} + \eta^s \frac{\partial I(r, \mathbf{s})}{\partial y} = \beta(1 - \omega) I_b - \beta I(r, \mathbf{s}) + \beta \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(r, \mathbf{s}') \Phi(\mathbf{s}, \mathbf{s}') d\Omega' \quad (2)$$

式中 I 是辐射强度, I_b 是黑体辐射强度, β 是衰减系数, $\Phi(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ 是散射相函数, ω 为散射反照率, x 、 y 为笛卡儿坐标系的方向, μ^s 和 η^s 是 $\mathbf{s}$ 方向上的空间余弦。投入辐射可定义为

$$G(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(r, \mathbf{s}) d\theta d\varphi \quad (3)$$

式中 θ 为方向天顶角, φ 为方向周向角。同时定义辐射热流在笛卡儿坐标系上的分量为

$$\begin{cases} q_x(r) = \int_{4\pi} I(r, s) \mu^s d\theta d\varphi \\ q_y(r) = \int_{4\pi} I(r, s) \eta^s d\theta d\varphi \end{cases} \quad (4)$$

如何有效处理特定位置上的辐射强度在角度和空间上的强间断,是分析上述问题的关键。本文利用间断有限元模型对角度和空间计算域实现高阶离散,并引入 BJ 限制器对数值振荡进行抑制。之后,文中第 1.2 节将介绍间断有限元的角度离散方案;第 1.3 节详细阐述了间断有限元的空间

离散方案,并给出辐射传递方程的最终离散形式;第 1.4 节介绍数值振荡的处理方案;第 1.5 节给出上述模型的整体求解步骤。

1.2 角度离散

如图 1 所示,在角度方向上,采用结构化网格对射线的 z 轴空间余弦 $\xi = \cos \theta$ 和周向角 φ 形成的二维正交角度空间进行离散;其中 θ 为方向天顶角,如方向 s 的天顶角为 θ^s ,在方形计算域中的坐标为 (φ^s, ξ^s) ;在角度单元内引入伽辽金方案^[29]。此外,由于各角度单元之间信息相互独立,方便采用并行计算提升求解效率。

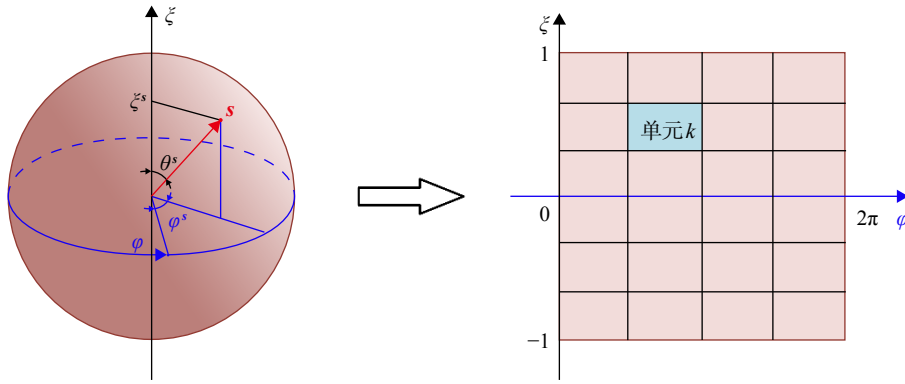


图 1 角度网格示意图

Fig. 1 Grid diagram of angle

角度结构单元内的辐射强度可离散为

$$I(r, s) = \sum_{i=1}^{N_{ca}} w_i(s) I(r, s_i) \quad (5)$$

式中 w_i 为角度离散基函数, N_{ca} 为角度单元内基函数个数。

在角度单元 k 上的球面积分定义如下运算符:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_k &= \int_k f g \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_k f(\xi, \varphi) g(\xi, \varphi) d\xi d\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

采用伽辽金方案后,辐射传递方程的积分形式可表达为

$$\begin{aligned} \left\langle w_a, \mu^s \frac{\partial I(r, s)}{\partial x} + \eta^s \frac{\partial I(r, s)}{\partial y} + \beta I(r, s) \right\rangle_k &= \\ \left\langle w_a, \beta(1 - \omega) I_b + \beta \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(r, s') \Phi(s, s') d\Omega' \right\rangle_k \end{aligned} \quad (7)$$

式中 w_a 为角度权函数。对于伽辽金方案权函数等于基函数, $w_a = w_i$ 。将式(5)代入积分式(7)中,可得角度离散形式的辐射传递方程为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_{ca}} \langle w_j, \mu^s w_i(s) \rangle_k \frac{\partial I(r, s_i)}{\partial x} + \\ \sum_{i=1}^{N_{ca}} \langle w_j, \eta^s w_i(s) \rangle_k \frac{\partial I(r, s_i)}{\partial y} + \\ \sum_{i=1}^{N_{ca}} \langle w_j, \beta w_i(s) \rangle_k I(r, s_i) = \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\langle w_j, \beta(1 - \omega) I_b + \\ &\beta \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I(r, s') \Phi(s, s') d\Omega' \rangle_k \end{aligned}$$

上述方程可以改写成如下的矩阵形式:

$$\begin{aligned} A_x \frac{\partial \mathbf{I}(r)}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{I}(r)}{\partial y} + \mathbf{H} \mathbf{I}(r) &= \mathbf{S}(r) \\ \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{I}(r) + \mathbf{H} \mathbf{I}(r) &= \mathbf{S}(r) \end{aligned} \quad (9)$$

式中 A_x 和 A_y 为系数矩阵,包含了角度离散相关的信息, $\mathbf{I}(r) = [I(r, s_1), \dots, I(r, s_{N_{ca}})]^T$ 包含了所有离散方向上辐射强度信息, $\mathbf{S}$ 为源项, $\mathbf{A}$ 为角度信息矩阵, $\mathbf{H}$ 为系数矩阵,包含介质衰减信息。

1.3 空间离散

在空间上采用非结构的三角网格方便适应非规则区域的离散,与传统间断伽辽金方案^[20]类似,本文辐射强度向量可离散为

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{es}} \phi_i(\mathbf{r}) \mathbf{I}(\mathbf{r}_i) \quad (10)$$

式中 ϕ_i 为空间离散基函数, N_{es} 为空间单元内基函数个数。

空间非结构单元 l 内体积分和面积分定义为如下运算符:

$$\begin{cases} (f, g)_l = \int_l f g \, dV \\ [f, g]_{\partial l} = \oint_{\partial l} f g \, dA \end{cases} \quad (11)$$

式中 V 为体积, A 为面积。采用伽辽金方案, 可获得如下形式的辐射传递方程:

$$[w_s, \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{I}(\mathbf{r}) + \mathbf{H} \mathbf{I}(\mathbf{r})]_l = [w_s, \mathbf{S}(\mathbf{r})]_l \quad (12)$$

式中 w_s 为空间权函数, 利用格林公式, 上述方程可改写为

$$\begin{aligned} [w_s, \mathbf{H} \mathbf{I}(\mathbf{r})]_l - [\nabla w_s, \mathbf{A} \mathbf{I}(\mathbf{r})]_l + \\ [w_s, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{I}(\mathbf{r})]_{\partial l} = [w_s, \mathbf{S}(\mathbf{r})]_l \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{n}$ 为单位外法线向量。将离散方程(式(10))代入积分方程(式(13))中, 令权函数等于基函数, $w_s = \phi$, 整理可得最终离散形式方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \sum_{i=1}^{N_{es}} \int_v \phi_j(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) \, dV \mathbf{I} - \mathbf{A}_x \sum_{i=1}^{N_{es}} \int_v \frac{\partial \phi_j(\mathbf{r})}{\partial x} \phi_i(\mathbf{r}) \, dV \mathbf{I} - \\ \mathbf{A}_y \sum_{i=1}^{N_{es}} \int_v \frac{\partial \phi_j(\mathbf{r})}{\partial y} \phi_i(\mathbf{r}) \, dV \mathbf{I} + \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \sum_{i=1}^{N_{es}} \oint_{\partial v} \phi_j(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) \, dS \mathbf{I} = \int_v \mathbf{S} \phi_j(\mathbf{r}) \, dV \end{aligned} \quad (14)$$

式中 v 为体积, s 为面积。引入迎风间断思想, 将式(14)中的面积分项作为单元之间连接相邻单元的模拟通量, 允许数值解在单元面上存在不连续, 同时保证空间单元的局部守恒。在此基础上, 利用空间扫描策略, 实现空间单元矩阵的逐个求解, 而非传统有限元中空间单元的整体矩阵组装求解。这样, 可以大幅降低计算内存消耗。

1.4 BJ 限制器

求解非规则区域内热辐射问题时, 由于壁面的遮蔽效应, 会导致壁面热辐射强度影响在角度和空间上存在强烈的间断。该间断在求解过程中会引发离散单元附近的高阶数值解存在数值振荡, 形成非物理解。为了消除这种非物理解, 本文采用 BJ 限制器对辐射强度在角度和空间上进行处理。具体实施步骤如下:

首先, 利用 Krivodonva 探测器对间断单元进行探测。该探测器是一种常用的激波探测器, 利用间断有限元在单元边界上的收敛性质可得

$$\Gamma_l = \frac{\left| \int_{\partial \Omega_l} (I_l - I_{nb_l}) \, dA \right|}{h^{(p+1)/2} \|I_l\| |\partial \Omega_l|} \quad (15)$$

式中 h 是外切圆半径, $|\partial \Omega_l|$ 是单元 l 的面积分, Γ 为函数光滑标准, p 为空间离散阶数, 下标 l 表示单元 l 的数值, 下标 nb_l 表示单元 l 相邻单元内的数值。通过如下关系式来判断单元是否间断:

$$\begin{cases} \Gamma_l > C, \text{单元为间断单元} \\ \Gamma_l < C, \text{单元为光滑单元} \end{cases} \quad (16)$$

在空气动力学中, 一般取 $C=1$ ^[30]。

其次, 针对上述判断过程中获得的间断单元, 采用 BJ 限制器进行修正。修正是在角度和空间上分别进行的。如图 2 所示, 以空间非结构网格为例, 0 号单元为待修正单元, 修正的目标是 $\bar{I}_{\min} \leq I_l \leq \bar{I}_{\max}$, 即保证单元内高斯点处的数值位于修正单元与周围相邻单元的最小单元平均值 $\bar{I}_{\min}$ 与最大单元平均值 $\bar{I}_{\max}$ 之间。

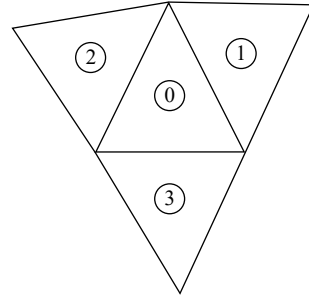


图 2 空间待修正网格示意图

Fig. 2 Grid diagram of space to be modified

最后, 以三角形网格质心为原点对方程进行泰勒展开, 将单元平均值 $\bar{I}$ 代替质心处的值, 可得

$$I = \bar{I} + \sum_{k=1}^K \sum_{1 \leq (m+n) \leq k} \frac{(x-x_c)^m (y-y_c)^n}{m!n!} \left[\frac{\partial^{m+n} I}{(\partial x)^m (\partial y)^n} \right] \quad (17)$$

式中 m 、 n 、 k 为整数变量, K 为泰勒展开阶数。

采用线性 BJ 限制器进行限制, 其表达式为

$$I_l = \bar{I} + d \left[(x-x_c) \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) + (y-y_c) \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right) \right] \quad (18)$$

式中限制系数 d 的表达式为

$$d = \begin{cases} \min \left[1, (I_{\max} - \bar{I}) / (I(x_l) - \bar{I}) \right] & I(x) > \bar{I} \\ \min \left[1, (\bar{I} - I_{\min}) / (\bar{I} - I(x_l)) \right] & I(x) < \bar{I} \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (19)$$

式中 $I_{\max}$ 是一个单元内辐射强度最大值, $I_{\min}$ 是一个单元内辐射强度最小值。

为了获得高阶的数值解, 引入分层限制思想, 采用一种高阶 BJ 限制器。以 2 阶限制器为例说

明分层限制的过程, 限制后的数值解表达式为

$$I_l = \bar{I} + d_1 \left[(x - x_c) \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) + (y - y_c) \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right) \right] + d_2 \left\{ \sum_{m+n=2} \frac{(x - x_c)^m (y - y_c)^n}{m! n!} \left[\frac{\partial^2 I}{(\partial x)^m (\partial y)^n} \right] \right\} \quad (20)$$

式中 d_1 为 1 阶限制系数, d_2 为 2 阶限制系数。

采用线性 BJ 限制器对 $(\partial I / \partial x)_l$ 和 $(\partial I / \partial y)_l$ 进行修正, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial x} \Big|_{x_c} + d_{2x} \left[(x - x_c) \left(\frac{\partial^2 I}{\partial^2 x} \right) + (y - y_c) \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial I}{\partial y} \Big|_{x_c} + d_{2y} \left[(x - x_c) \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right) + (y - y_c) \left(\frac{\partial^2 I}{\partial^2 y} \right) \right] \end{cases} \quad (21)$$

令 $d_2 = \min(d_{2x}, d_{2y})$, 再根据以下公式判断方程是否需要修正 d_1

$$d_1 = \begin{cases} 1 & d_2 = 1 \\ \max(d_1, d_2) & d_2 < 1 \end{cases} \quad (22)$$

2 阶以上的 BJ 限制器, 可以对高阶项采用上述相同方案, 从而获取高阶修正系数。

1.5 求解过程

具体求解过程如图 3 所示, 其中 N_a 和 N_s 分别

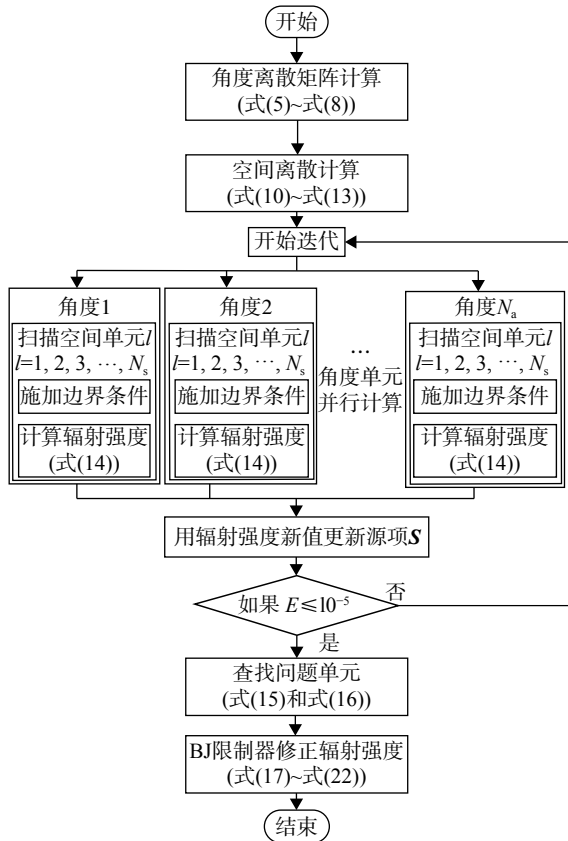


图 3 求解过程流程图

Fig. 3 Diagram of solve procession

为角度和空间单元个数, 收敛误差 E 的公式如下:

$$E = \max \left\{ \left| \frac{I_{\text{old}} - I_{\text{new}}}{I_0} \right| \right\} \quad (23)$$

式中 I_{old} 和 I_{new} 分别为迭代更新前后的辐射强度, I_0 为初始时刻最高温度的黑体辐射强度。

2 结果与讨论

首先, 为了验证方法的正确性, 计算了如图 4 所示的圆边半径 $R = 1$ m, 底部和左侧边长 $L = 0.5$ m 方腔内热辐射平衡问题。其中, 弧线边界为热壁面, 温度 $T_w = 1000$ K, 其他壁面为冷壁面, 温度 $T_w = 0$, 边界均为不透明黑壁面。介质为各向同性灰体介质, 光学厚度 $\tau_L = \beta L = 0.5$ 。角度采用 $N_\xi \times N_\phi = 3 \times 60$ 个结构单元, 空间为 506 个非结构三角单元。经验证, 满足空间和角度单元无关性。计算上壁面无量纲辐射热流 $q^* = q / (4\pi I_0^4)$, 并与 MCM 的基准解进行对比, 式中 q 为辐射热流。

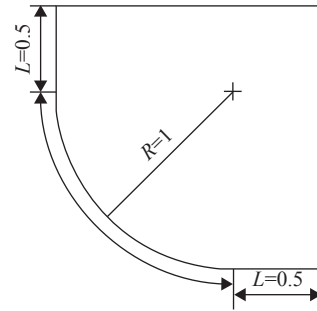


图 4 圆边方腔结构示意图(单位: m)

Fig. 4 Structure diagram of curve cavity (unit: m)

图 5 给出了角度空间间断有限元获得的无量纲辐射热流 (q^*) 沿上壁面 (x) 的分布。通过与文献 [31] 中 MCM 和 FVM 的结果对比, 可以看出: 与 FVM 获得的结果相比, 本文方法 DFEM 的结

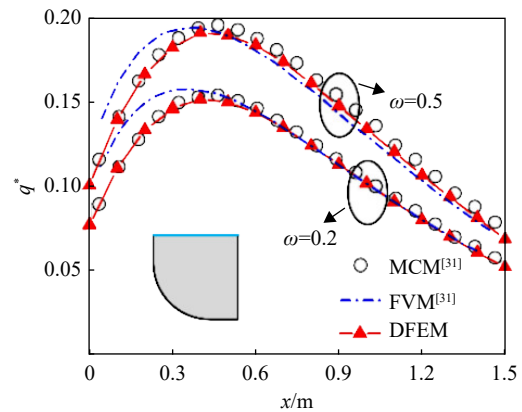


图 5 上壁面无量纲辐射热流图

Fig. 5 Dimensionless radiative heat flux of top wall

果更接近 MCM 的结果。以 MCM 结果为基准, 在 $\omega = 0.2$ 时, DFEM 与 MCM 之间的最大相对误差为 4.44%; 在 $\omega = 0.5$ 时, 最大相对误差为 7.04%。与之相对应的是: 在 $\omega = 0.2$ 时, FVM 与 MCM 之间的最大相对误差为 18.51%, 在 $\omega = 0.5$ 时, 最大相对误差为 15.37%。

为进一步验证限制器性能, 考虑如图 6(a) 所示的“L 形腔”热辐射问题。考虑各个壁面温度分别为 $T_{w1} = 900 \text{ K}$, $T_{w2} = 900 \text{ K}$, $T_{w3} = 1000 \text{ K}$, $T_{w4} = 900 \text{ K}$, $T_{w5} = 1000 \text{ K}$, $T_{w6} = 800 \text{ K}$ 的情形。内部介质为灰体、纯吸收介质 $\omega = 0$, 介质温度 $T_g = 0$ 。在计算过程中, 角度上采用 $N_\xi \times N_\psi = 3 \times 60$ 个结构单元, 空间上采用如图 6(b) 所示的 504 个三角形非结构单元。经网格无关性验证后, 上述网格满足网格无关性要求。

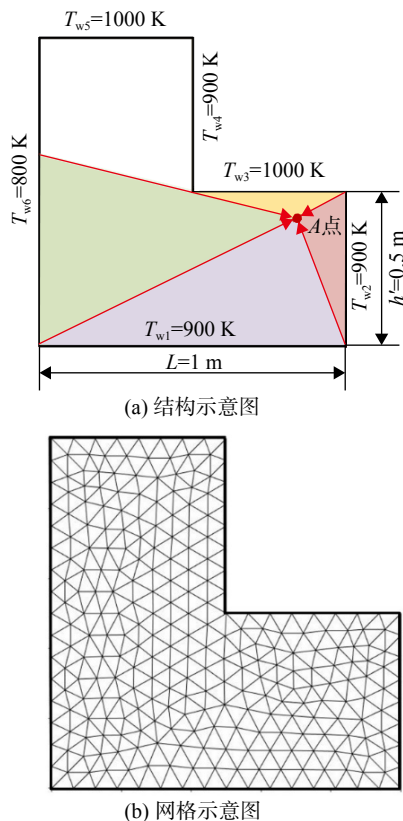


图 6 L 形腔结构示意图及网格示意图

Fig. 6 Structure diagram and grid diagram of L cavity

由于壁面遮蔽和温度不连续的影响, 使得任意一点 A 的辐射强度在角度上分别受不同壁面影响, 并在图 6(a) 中用不同灰度表示。因此壁面温度不连续会使辐射强度角度分布存在数值间断。图 7 给出了光学厚度 τ_L 为 0.1 和 0.5 时, A 点 (0.87, 0.40) 在 $\theta = \pi/2$ 处的周向辐射强度 I 分布。可以发现, 由于壁面遮蔽和温度的不连续导致空间内介

质辐射强度存在多处强烈间断。如果不使用限制器, 辐射强度在间断处将会产生数值振荡, 形成非物理解。采用 BJ 限制器后的辐射强度分布较为理想, 修正了多个间断处的非物理振荡, 将辐射强度限制到合理范围内。此外, 随着光学厚度的增加, 辐射强度在周向变化愈加显著, 辐射强度整体变小, 这些都是因为辐射强度沿程衰减变大导致的。

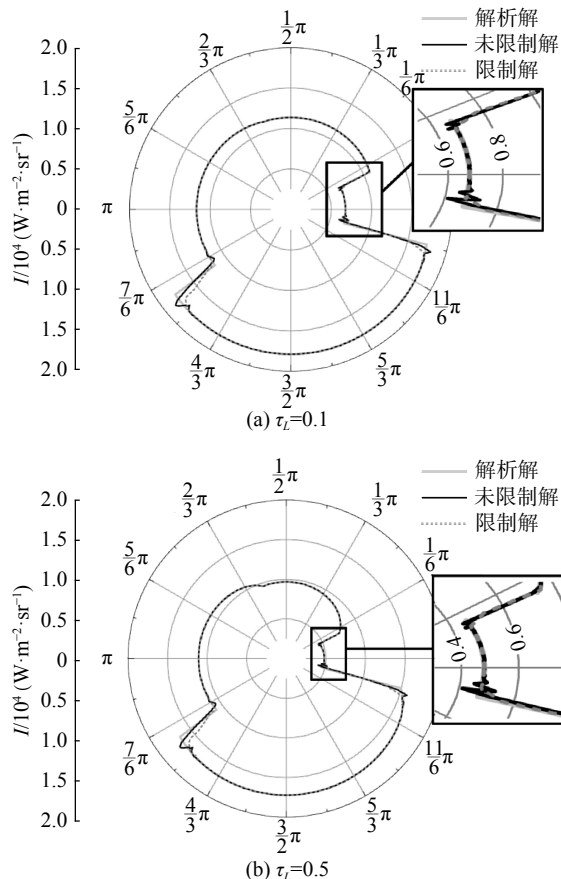
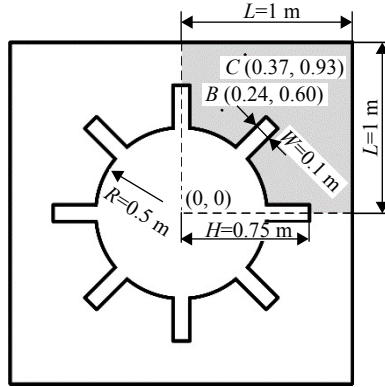


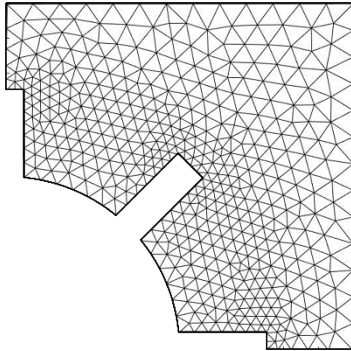
图 7 不同光学厚度下辐射强度分布图(A 点)

Fig. 7 Radiation intensity distribution at different optical thicknesses (point A)

为了进一步检验 DFEM 的有效性, 考虑内部存在遮挡的方腔内热辐射算例。其结构尺寸如图 8(a) 所示, 内部圆柱半径 $R = 0.5 \text{ m}$, 从圆心到肋尖距离 $H = 0.75 \text{ m}$, 肋宽 $W = 0.1 \text{ m}$, 方腔 1/4 对称区域长宽 $L = 1 \text{ m}$ 。内部遮挡的壁温为 $T_w = 1000 \text{ K}$, 周围方腔壁面温度为 $T_w = 300 \text{ K}$, 介质温度恒为 $T_g = 0$, 散射反照率为 $\omega = 0.7$ 。在壁面边界条件对称, 介质为各向同性的情况下, 可以预见其结果的分布也是对称的。为了简化计算, 选取如图 8(b) 所示的 1/4 结构进行计算。其中, 计算域的左壁面和下壁面边界条件为 $q = 0$ 。空间采用 896 个



(a) 结构示意图



(b) 网格示意图

图 8 肋片遮蔽方腔结构示意图及网格示意图

Fig. 8 Structure diagram and grid diagram of curved geometry with fin shield

三角形非结构网格, 角度上采用 $N_\xi \times N_\varphi = 3 \times 80$ 个结构网格。图 9 给出了不同光学厚度下上壁面辐射热流分布情况。通过与文献 [32] 结果对比, 发现在不同光学厚度下与非结构网格有限体积 (UNS FVM) 计算结果的最大相对误差为 2.03%, 与分块计算有限体积 (blocked-off FVM) 计算结果的最大相对误差为 7.15%。

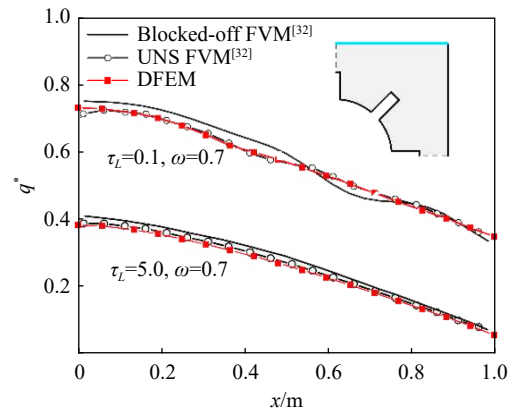
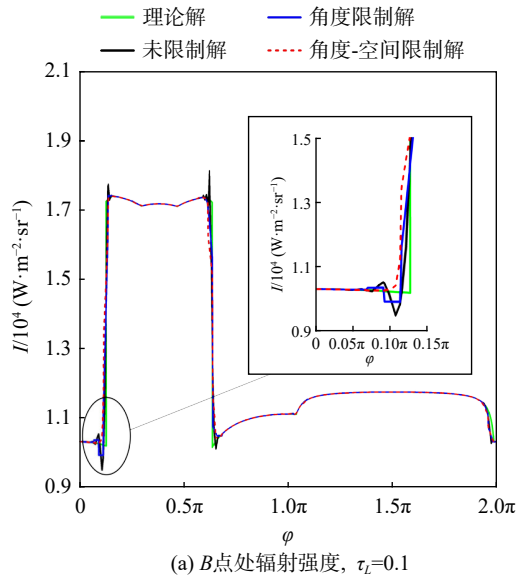
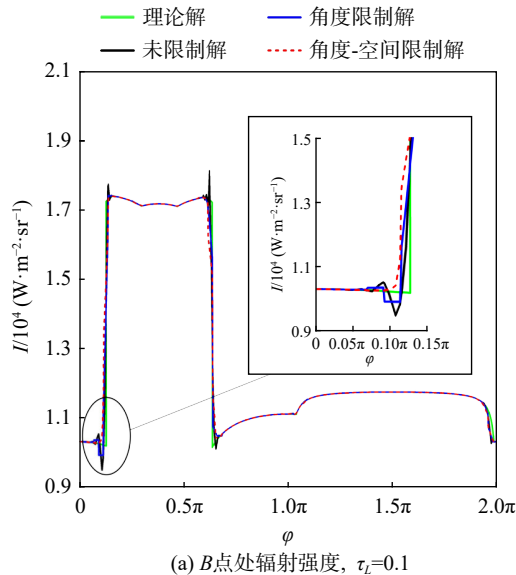
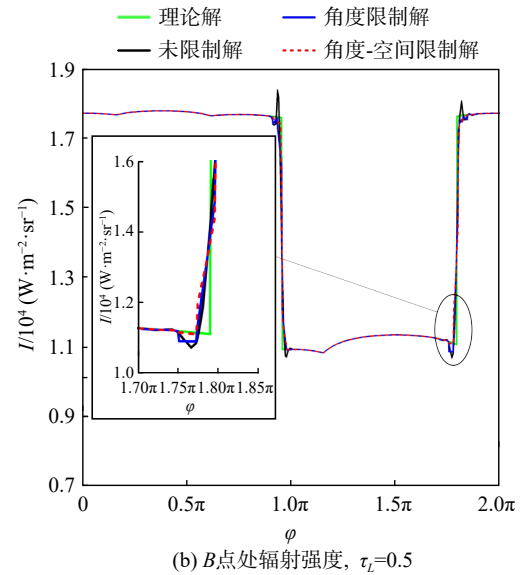


图 9 不同光学厚度时上壁面无量纲辐射热流

Fig. 9 Dimensionless radiative heat flux on wall with different optical thicknesses

为了进一步分析壁面边界条件的影响, 考虑内部遮挡体壁温为 $T_w = 1\,000\text{ K}$ 、方腔壁面温度为 $T_w = 900\text{ K}$ 、介质温度为 $T_g = 0$ 的热辐射非平衡问题。此时内部介质的辐射能量全部来自于壁面发射。在不同的空间位置由于肋片的遮挡会给辐射强度在角度上的分布造成很强烈的间断。如图 10, 计算了在不同光学厚度下, B 点 (0.24, 0.60) 和 C 点 (0.37, 0.93) 的辐射强度分布, 并与精确解进行对比。可以看出: 在不同空间位置, 角度上间断存在位置是不同的。在间断处, 只对角度进行限制能起到一定的效果。但是由于限制器要求保持单元内平均值不变, 在一些间断处振荡的幅度虽然被限制了, 但是并未完全限制到合理范围内。因此, 采用在角度限制的基础上, 进一步在空间上进行限制。采用角度和空间共同限制后, 辐射强度值均被修正到合理范围内, 非物理振荡现象基本消除。

(a) B点处辐射强度, $\tau_L=0.1$ (b) B点处辐射强度, $\tau_L=0.5$

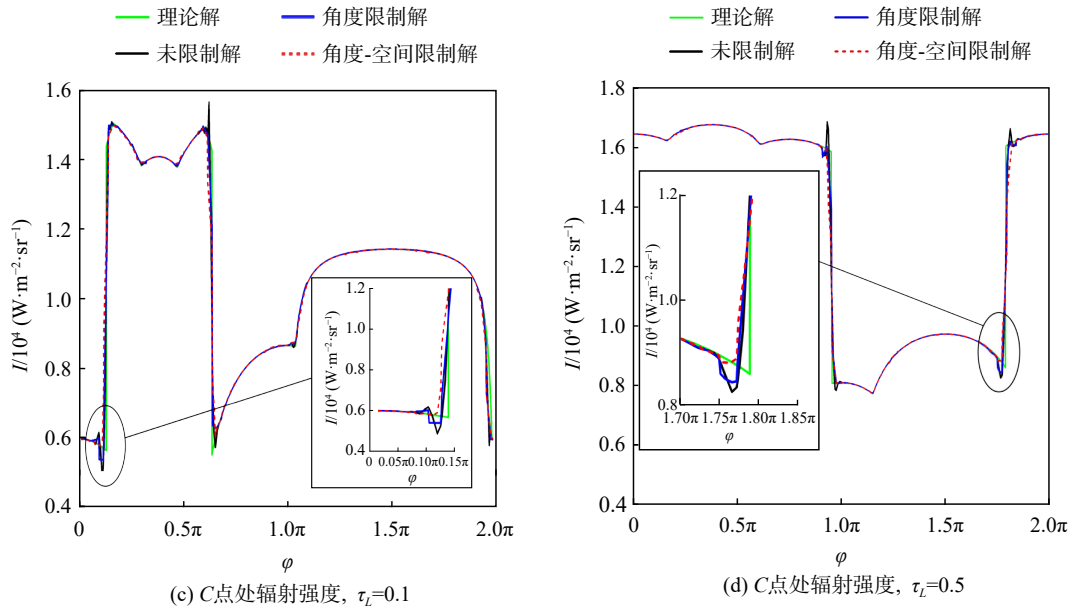
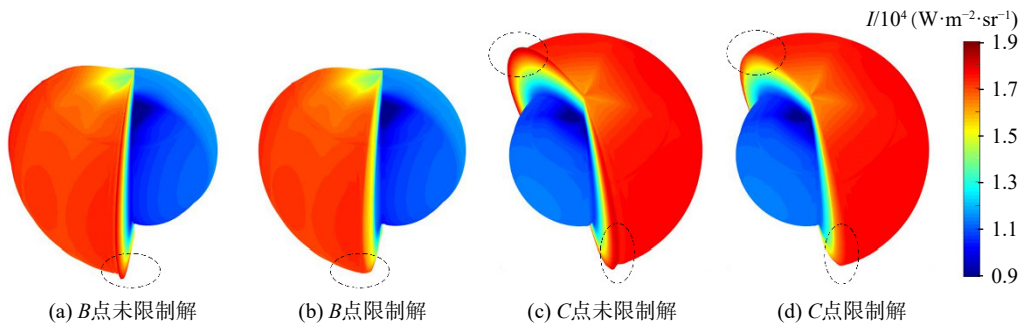
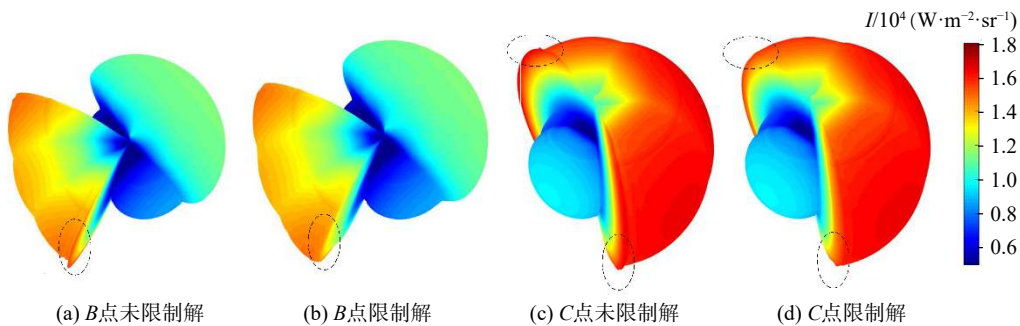


图 10 不同光学厚度下辐射强度分布图(B点和C点)

Fig. 10 Radiation intensity distribution at different optical thicknesses (point B and point C)

如图 11 和图 12 所示,给出了不同光学厚度下,辐射强度的三维角度分布图。随着光学厚度的增加,辐射强度在角度上的分布变化更加剧烈。壁面辐射对空间介质辐射强度分布的影响存在明显的方向性,因此辐射强度在角度上

呈现分段光滑分布。图 11 和图 12 中,黑色虚线框标出了不同光滑段之间数值间断处的辐射强度变化情况。从图中对比可以看出:采用角度-空间限制器可以有效地限制辐射强度的非物理性数值振荡。

图 11 $\tau_L = 0.1$ 时, B 点和 C 点辐射强度三维分布图Fig. 11 Three-dimensional distributions of radiation intensity of $\tau_L = 0.1$ at point B and point C图 12 $\tau_L = 0.5$ 时, B 点和 C 点辐射强度三维分布图Fig. 12 Three-dimensional distributions of radiation intensity of $\tau_L = 0.5$ at point B and point C

3 结 论

本文提出了一种角度-空间间断有限元的热辐射限制器,并用于解决高温热辐射的间断遮蔽问题。实施过程中,在辐射角度方向上采用结构化网格离散,在空间上采用非结构三角形网格离散,获得了辐射传递方程的角度和空间离散形式。基于分层限制的思想,在角度和空间单元上均引入 BJ 限制器,有效抑制了热辐射间断遮蔽效应带来的非物理震荡。通过多组算例验证发现:本文提出的角度-空间间断有限元的热辐射限制器,相比于有限体积等传统方法,能够获得高精度数值解。在限制器使用过程中,只有在角度和空间单元上同时实施,才能明显抑制辐射强度的数值震荡。通过对任意空间位置上热辐射强度在角度方向上的三维分布图发现,非规则区域内热辐射存在明显的方向性,且由于高温壁面温度分布不均,会给辐射强度分布带来强烈的不均匀性。

参考文献:

- [1] VISKANTA R. Heat transfer by conduction and radiation in absorbing and scattering materials[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1965, 87(1): 143-150.
- [2] 吴宇, 钟剑龙, 吕其明. 某型飞机短舱辐射换热计算[J]. *航空动力学报*, 2013, 28(5): 1119-1124.
WU Yu, ZHONG Jianlong, LÜ Qiming. Numerical investigation of thermal radiation in a nacelle[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28(5): 1119-1124. (in Chinese)
- [3] WANG P Y, TAN H P, LIU L H, et al. Coupled radiation and conduction in a scattering composite layer with coatings[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2000, 14(4): 512-522.
- [4] MO D, CHEN S, CHEN L, et al. Similarity criteria of target thermal radiation characteristics and their application to infrared radiation of jet engine exhaust system[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, 125: 358-368.
- [5] MAURENTE A, ALVES C G. Radiation heat transfer in a gas slab with properties characteristics of a jet engine combustor[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, 145(C): 118734.1-118734.9.
- [6] GAMIL A A A, NIKOLAIDIS T, LELAJ I, et al. Assessment of numerical radiation models on the heat transfer of an aero-engine combustion chamber[J]. *Case Studies in Thermal Engineering*, 2020, 22: 100772.1-100772.8.
- [7] MARCHESINI G, WEBBER B R. Monte Carlo simulation of general hard processes with coherent QCD radiation[J]. *Nuclear Physics B*, 1988, 310(3/4): 461-526.
- [8] ANDREO P. Monte Carlo techniques in medical radiation physics[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1991, 36(7): 861-920.
- [9] RAESIDE D E. Monte Carlo principles and applications[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 1976, 21(2): 181-197.
- [10] ADAMS M L, Larsen E W. Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations[J]. *Progress in Nuclear Energy*, 2002, 40(1): 3-159.
- [11] CHAI J C, LEE H O S, PATANKAR S V. Finite volume method for radiation heat transfer[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1994, 8(3): 419-425.
- [12] BADRI M A, JOLIVET P, ROUSSEAU B, et al. High performance computation of radiative transfer equation using the finite element method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 360: 74-92.
- [13] MOHAN P S, TARVAINEN T, SCHWEIGER M, et al. Variable order spherical harmonic expansion scheme for the radiative transport equation using finite elements[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(19): 7364-7383.
- [14] CHEN S S, LI B W, SUN Y S. Chebyshev collocation spectral method for solving radiative transfer with the modified discrete ordinates formulations[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, 88: 388-397.
- [15] SUN Y S, MA J, LI B W. Spectral collocation method for convective-radiative transfer of a moving rod with variable thermal conductivity[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2015, 90: 187-196.
- [16] SUN Y S, XU J L. Thermal performance of continuously moving radiative-convective fin of complex cross-section with multiple nonlinearities[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2015, 63: 23-34.
- [17] COELHO P J M. The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified discrete ordinates methods[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2002, 73(2/3/4/5): 231-238.
- [18] HOWELL J R, MENGÜÇ M P. Challenges for radiative transfer 1: towards the effective solution of conjugate heat transfer problems[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2018, 221: 253-259.
- [19] ZABIHI M, LARI K, AMIRI H. Coupled radiative-conductive heat transfer problems in complex geometries using embedded boundary method[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2017, 39(7): 2847-2864.
- [20] ZHAO J M, LIU L H. Discontinuous spectral element method for solving radiative heat transfer in multidimensional semitransparent media[J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2007, 107(1): 1-16.
- [21] ZHAO J M, LIU L H. Discontinuous spectral element approach for solving transient radiative transfer equation[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2008, 22(1): 20-28.
- [22] 王存海, 郑树, 张欣欣. 非规则形状介质内辐射-导热耦合传热的间断有限元求解[J]. *物理学报*, 2020, 69(3): 176-184.
WANG Cunhai, ZHENG Shu, ZHANG Xinxin. Discontinuous finite element solutions for coupled radiation conduction heat transfer in irregular media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, 69(3): 176-184. (in Chinese)
- [23] LUO H, BAUM J D, LÖHNER R. A Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 225(1): 686-713.
- [24] SUGIMOTO S, KIDA J, ARITA H, et al. Principle and characteristics of a fault current limiter with series compensation[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 1996, 11(2): 842-847.
- [25] 李芳, 孙唯哲, 刘鑫, 等. 非结构网格限制器研究[J]. *航空动力学报*, 2015, 30(9): 2151-2159.
LI Fang, SUN Weizhe, LIU Xin, et al. Research on limiters of unstructured grid[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2015, 30(9): 2151-2159. (in Chinese)

- [26] BARTH T, JESPERSEN D. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes[R]. Reno, US: 27th Aerospace Sciences Meeting, 1989.
- [27] BISWAS R, DEVINE K D, FLAHERTY J E. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws[J]. [Applied Numerical Mathematics](#), 1994, 14(1/2/3): 255-283.
- [28] HOWELL J R, MENGUC M P, DAUN K, et al. Thermal radiation heat transfer[M]. 7th edition. New York, US: CRC Press, 2021.
- [29] CLARKE P, WANG H, GARRARD J, et al. Space-angle discontinuous Galerkin method for plane-parallel radiative transfer equation[J]. [Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer](#), 2019, 233: 87-98.
- [30] MICHALAK C, OLLIVIER-GOOCH C. Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations[J]. [Journal of Computational Physics](#), 2009, 228(23): 8693-8711.
- [31] DO Y B, SEUNG W B, KIM M Y. Thermal radiation in a discretely heated irregular geometry using the Monte-Carlo, finite volume, and modified discrete ordinates interpolation method[J]. [Numerical Heat Transfer: Part A applications](#), 2000, 37(1): 1-18.
- [32] KIM M Y, BAEK S W, PARK J H. Unstructured finite-volume method for radiative heat transfer in a complex two-dimensional geometry with obstacles[J]. [Numerical Heat Transfer: Part B fundamentals](#), 2001, 39(6): 617-635.

(编辑:王碧琚、秦理曼)